2
P
14
IX. n
BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE ROMA
55
2 K
23
14-21, G. 4

EVCLIDES
RESTITVTVS,
A IO: ALPHONSO BORELLIO.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

EVCLIDES
RESTITVTVS,

Siue

PRISCA GEOMETRIÆ ELEMENTA,

Breuiùs, & faciliùs contexta;

In quibus pręcipuè

PROPORTIONVM THEORIÆ noua, firmiorique Methodo promuntur

A IO: ALPHONSO BORELLIO
in Meſſanenſi pridem, nunc verò in Piſana
Academia Matheſeos Profeſſore.

Domus Sanctę Marię Magdalenę urbis



BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Piſis, ex Officina Franciſci Honophri. 1658. *Superiorum permiſſu.*

EVCLIDES
RESTITVTVS,
Siue
PRISCA GEOMETRIÆ
ELEMENTA,

Breuius, & facilius contexta,

In quibus præcipuè

PROPORTIONVM THEORIA

noua, firmiorique Methodo promuntur

A IO: ALPHONSO BORELLIO

in Messanensi pridem, nunc verò in Pisana

Academia Matheseos Professore.

SERENISSIMO PRINCIPI
LEOPOLDO
AB HETRVRIA
Io: Alphonſus Borellius F.

SEmper odi atque irriſi (Sereniſs. Princeps) vulgarem illam ſententiam,qua pręclara hominum ingenia à nouis rerum mirandarum inuentionibus arcentur; præconceptam videlicet illam opinionem, quòd priſci tantùm magiſtri nati ſint arcanorum naturæ inſpectores atque interpretes, ſapientiamque vniuerſam iure ſibi debitam hauſerint; neque aliquid pręterea detegendum, ſiue melius aut facilius explicandum poſteris relictum ſit: cęteraque hominum multitudo inter diſcipulos reponi debeat, cui non liceat oculos aut mentem è libris maiorum amouere. Non tamen is ſum, qui præceptoribus debitos honores denegandos eſſe exiſtimem: vtrumque vitium fugiendum eſt; ingratitudinis nimirum, & ignorantiæ. Gratiæ ergo & honores priſcis reddendi ob doctrinam nobis liberaliter traditam. Simul ratum ſit tamen eos non caruiſſe vitijs, quibus humana imbecillitas ſubiacet. Hoc autem ipſimet credere nos iubent,dum ſcibilium infinitatem à finito ac tenui humano ingenio poſt mille ſęcula exhauriri non poſſe frequenter enunciant; pariterque præceptores inculpabiles habendos non eſſe, ſatis apertè docent, tum emendationes ab ijs factæ, tum nonnulla variè innouata, vel expoſita contra ſuorum præceptorum mentem. Quod vt clarius pateat, omiſſis alijs, ea ſaltem, quæ ad rem elementarem ſpectant, vel prolixè ac fideliter exequi ex Procli commentationibus ad Euclidem operę pretium duxi.

Poſt vetuſtiſſimam itaque Geometriæ in Aegypto inuentionem, Thales Mileſius primus eam auxit, atque in Græciam tranſtulit; exinde Ameriſtus Steſicori Poetę frater, Hippias Eleus, atque Pythagoras, qui præcipuè eam philoſophiam, quæ circa Geometriam verſatur, in liberalis doctrinæ formam,altius eiuſdē principia contemplatus,inſtru-

xit.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

xit. Poſt eos non pauca, quę ad Geometriam pertinent, aggreſſus eſt Anaxagoras Clazomenius; hoc verò aliquantò iunior Oenopides Chius, Hippocrates itidem Chius, atq; Theodorus Cyreneus inſignes in Geometria euaſere; ac primus eorum, qui afferuntur, Hippocrates elementa Geometrica conſcripſit. Succeſſit Plato, qui tum Geometriam, tum cęteras mathematicas diſciplinas quam maximè coluit & auxit. Eodem tempore floruere Leodamus Thaſius, Archytas Tarentinus, Theęthetus Athenienſis, Neoclides, atque eius diſcipulus Leon; horum primi Theoremata auxerunt, ad peritioremq; perduxere conſtitutionem; poſtremi verò multa ijs, quę ſuperiores excogitauerant, addidere, ita vt Leon accuratius conſtruxerit elementa, & propter multitudinem, & propter vſum eorum, quæ in ipſis oſtenduntur: ac determinationem inuenerit, quando ſcilicet Problema, quod quæritur, poſſibile ſit nec ne. Eudoxus deinde Cnidius primus Theorematum eorum, quæ vniuerſalia appellantur, numerum reddidit locupletiorem, ac tribus proportionibus tres alias adiecit, quęque circa ſectionem à Platone ſumpſerant initium, in copiam, reſolutionibus, vt ille, in ipſis vſus, diffudit vberiorem. Amyclas verò Heracleotes, Menęchmus Eudoxi diſcipulus, eiuſque frater Dinoſtratus perfectiorem adhuc fecere Geometriam. Poſtmodum Theudius Magnes elementa conſtruxit egregiè, multaque particularia magis vniuerſalia fecit. Succeſſere Cyzicinus Athenienſis, atque Hermotimus Colophonius illuſtres Geometræ, qui Hermotimus ea, quę ab Eudoxo, & Theęthetο edita fuerant fuſius illuſtrauit, compluraque inuenit elementa, locoſque nonnullos conſcripſit. Poſt Philippum denique Metæum Platonicum Euclides hęc aggreſſus eſt diligentius; nam elementa collegit, & multa quidem conſtruxit eorum, quæ ab Eudoxo, multa verò perfecit, quæ à Theætheto reperta fuerant; & quæ priores imbecillius oſtenderant, ad eas ipſe demonſtrationes redegit, quæ neque coargui, neque conuinci poſſunt. Poſt ipſum Euclidem vſque ad tempora Procli Diadochi, licet nullus vniuerſam elementarem inſtitutionem ſit auſus aliter contexere, adhuc tamem extant in ipſo Proclo fragmenta Apollonij, Ptolemæi, Pappi Alexandrini, Heronis, & Gemini, in quibus non pauca Euclidianæ inſtitutionis elementaris corriguntur, & prolixitatis, aut obſcuritatis incuſantur. Vnde coniectari licet quamplurima alia Euclidis loca veterum cenſuram non effugiſſe, quamuis non extent innumeri codices, quibus hoc poſſit manifeſtè comprobari; proximis quidem temporibus non defuerunt Arabes, qui duo præcipua Euclidis loca corrigere ſtuduerint; alterum in primo libro, vbi parallelarum paſſiones oſtenduntur; alterum in quinto de proportionibus. Idem Io: Baptiſta Benedictus, nonnullique iuniores fecere.

Sicuti ergo multis ante, & poſt ipſum Euclidem licuit, licebit quo-

que

quę mihi, ſeruata antiquitatis reuerentia, iterum elementa Geometrię à maioribus reperta, longoque tempore exculta, atque aucta in nouam formam, clariorem, aliquibus etiam in locis firmiorem contexta restituere; quod quidem, quo ordine ſit factum, poſt quam occaſionem, quę me ad ſcribendum impulit, enarrauero, paucis exponam.

Decimus ſeptimus eſt annus, ex quo cùm à Mamertino Senatu ad Italiæ Academias miſſus Florentiam attigiſſem, Tua Celſitudo me humaniſſimè excepit; cùmque tunc temporis de quinto Euclidis elementorum libro reſtaurando inter viros doctos diſceptaretur; ipſe quoque eandem rem contemplari ſum aggreſſus, animaduertique reſtitutiones omnes eiuſdem quinti libri ab alijs factas, ſiue typis excuſas, ſiue ſtylo exaratas optatam difficultatis metam minimè attigiſſe, neque debitam Euclidiano operi adhibuiſſe medicinam. Inueni demum (niſi fallor) legitimam demoſtrandi viam, illamque Geometriæ partem hactenus obſcuram declaraui. Idcirco de proportionibus, & proportionalitate librum compoſui, & cum plurimis mathematicas probè callentibus amicis communicaui; quorum iudicio atque hortatu ſollicitatus, reliquos etiam elementaris inſtitutionis Euclidianæ libros (quos facilius ac breuius tradi poſſe multoties affirmaueram; ſi nimirum ordo ab ipſo Euclide ſeruatus perturbaretur) ſum denique aggreſſus. Quorum exemplaria ſchedis commiſſa, Piſis tandem in hanc breuiſſimam formam redegi, in qua ea omnia quæ Euclides propoſitionibus 473. comprehendit, ea ego propoſ. 230. expoſui, ſi excipiantur lemmata, & quæ ex Archimede, Pappo, & alijs adieci. Atque eiuſmodi forma contexui, vt propoſitiones prædictæ multo breuiores ac faciliores, ſæpe etiam vniuerſaliores redderentur; illas autem propoſitiones tantummodo intactas reliqui, quas faciliores, breuioreſque reddere minimè potui. Primus itaque meus liber propoſitiones 34. tantùm habet. Secundus 24. & ipſæ ſunt, quæ in I. & III. Euclidis. Tertius autem de proportione, & proportionalitate agit; qui omnino nouus eſt, amplectiturq; propoſitionibus 27. omnia, quę Euclidis V. habet, cum alijs additis propoſitionibus Pappi, Campani, &c. Quartus verò propoſ. 26. ea, quæ in VI. Euclides, tradit. Quintus propoſ. 33. breuiſſimè exponit propoſitiones IV. & II. Euclidis, ſed methodo vniuerſaliori, & reliqua omnia, quæ ad Geometriam planam pertinent. Sextus propoſ. 37. Elementa Stereometriæ noua & faciliori methodo XI. & XII. Eucl. comprehendit. Septimus propoſ. 17. deſcriptiones quinque corporum regularium cum omnibus laterum comparationibus, radiorum, ſuperficierum planarum, atque ipſorum corporum vberrimè præſtat, quæ omnia ab Euclide in XIII. & XIV. atque à Pappo aperiuntur, cum plurimis antehac non conſideratis. Octauus propoſ. 48. elementarem Arithmeticam inſtitutionem enodat, quæ in Eucl. libb. VII. VIII. IX. reperiuntur. No-

nus

nis denique de quantitatibus rationalibus, & irrationalibus vniuerſaliori methodo agit, & nedum lineis, atque earum quadratis, vt Euclides; ſed etiam omnibus quantitatibus cuiuſlibet generis eaſdem paſſiones conuenire demonſtrat, idq; ea breuitate, vt propoſ. 45. contineat propoſitiones 116. lib. X. Euclidis.

Quia tandem Euclidis elementa iuxta vulgatum Theonis ordinem paſſim in libris mathematicorum citantur, vt ſtudioſis conſulerem, eadem ad operis calcem cum locis, in quibus exponuntur, appoſui.

Reſtabat ipſo iam opere perfecto, vt cui potiſſimum dicandum eſſet ſtatuerem. At Vir Princeps quærendus erat, qui auctoritate ac dignitate, huius nobiliſſimę Scientiæ ſuſciperet patrocinium, ſtudiumque ac nomen amplificaret: mihi nempe imitandam propoſueram veterum mathematicorum conſuetudinem, qui non niſi huius diuinæ facultatis peritioribus ſua dicabant opera, eorumque ſubmittebant iudicio: ac denique is debebat eſſe Princeps, qui non, vt complures diuerſis detenti ſtudijs noua omnia contemnunt; nihilque quod ab antiquitate recedat, vtile atque honeſtum ducunt; ſed qui ſummopere philoſophię ſtudia promouere, nouiſque ditare inuentis omni conatu contenderet. Hæc omnia cùm in Te vno (Sereniſſ. Princeps) ſummo cum amore erga mathematicas excellenter coniuncta reperiſſem, hunc qualemcunque meum laborem Tibi dicatum, & commendatum magnoperè velim. Tibi, cui iure hereditario omnium ſcientiarum patrocinium debetur, vt qui ex ea familia ortum habuiſti, quæ non modò ſcientias atq; artes è Græcia in Italiam transferri curauit; ſed nunquam non auctoritate protexit, ſtudio auxit, munificētia locupletauit. Tibi, cui rerum mathematicarū ea eſt peritia, vt facile ſit inuenire neminem, qui ſupremi Principis munia minimè ſeponens, ita probè calleat, quæ Euclides, ac diuinus Archimedes, alijque mathematici litteris mandauere. Studium porrò tuum Philoſophiam promouendi, detegendique falſitates per ſedula impenſis liberalioribus facta experimenta, nullus eſt quem fugiat. Quo circa ſi elementaris inſtitutio ad ritè rectèque philoſophandum maximè neceſſaria cenſetur, Tibi potiſſimùm dicanda erat, qui Naturalis Philoſophię inſtaurationem moliri vehementer deſideras. Si ergo aliquid ex hac mea reſtitutione Reipublicæ litterariæ vtilitatis eueniet; vti etiam ex phyſiologico opere, quod nunc meditor circa naturæ phaenomena, quæ in dies accuratiſſimè experiri curas; quantum quantum erit à Tuæ Celſitudinis benignitate oriri cognoſcent meritò poſteri, Tibique gratias habebunt, quòd mihi id otium impertitus ſis, vt mea opera & perfici & in lucem prodire valerent: mihi verò pergratum fuerit hoc meæ Tibi obtuliſſe obſeruantiæ & gratitudinis monumentum, tempuſque in caſſum non omnino triuiſſe. Vale.

EVCLIDIS PROPOSITIONES

iuxta methodum Theonis vulgatam, cum locis huius operis, in quibus eædem Eucl. propoſitiones exponuntur.

LIBER I.

1 *Super datæ recta linea terminata, triangulum ęquilaterum conſtituere. libri 1. prop. 1.* *pagina* 18

2 *Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. lib. 1. prop. 2.* 20

3 *Duabus datis rectis lineis inęqualibus, de maiore ęqualem minori rectam lineam detrahere. lib. 1. pr. 3.* 21

4 *Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrunque vtrique, habeant verò & angulum angulo ęqualem ſub ęqualibus rectis lineis contentum: & baſin baſi æqualem habebunt, eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. lib. 1. pr. 4.* 21

5 *Iſoſcelium triangulorum qui ad baſin ſunt anguli, inter ſe ſunt ęquales: & ſi vlterius productæ ſint ęquales illæ rectę lineæ, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe æquales erunt. lib. 1. pr. 6.* 24

6 *Si trianguli duo anguli ęquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt. lib. 1. pr. 20.* 45

7 *Super eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineę ęquales, vtraque vtriq; non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. deducitur ex lib. 1. pr. 7.* 25

8 *Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrunque vtrique, ęqualia, habuerint verò & baſin baſi æqualem: angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo ęqualem habebunt. lib. 1. prop. 7.* 26

9 *Datum angulum rectilineum bifariam ſecare. lib. 1. prop. 8.* 27

10 *Datam rectam lineam finitam bifariam ſecare. lib. 1. prop. 9.* 28

11 *Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare. lib. 1. prop. 10.* 28

12 *Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere. lib. 1. prop. 11.* 29

13 *Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam, angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis ęquales efficiet. lib. 1. prop. 12.* 29

14 *Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duę rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ, eos qui ſunt deinceps angulos duobus rectis ęquales fecerint, in directum erunt inter ſe ipſæ rectę lineę. lib. 1. prop. 13.* 30

15 *Si duæ rectæ lineę ſe mutuò ſecuerint,*

rint, angulos qui ad verticem ſunt, ęquales inter ſe efficient. lib. 1. Coroll. prop.5. 24

16 *Cuiuſcunque trianguli vno latere producto, externus angulus vtroque interno & oppoſito maior eſt. lib.1. Cor.1. pr.18.* 42

17 *Cuiuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti. lib.1.cor.1.prop.18.* 42

18 *Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. lib.1.prop. 19.* 45

19 *Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. lib.1.prop.20.* 45

20 *Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta. lib.1.prop.21.* 46

21 *Si ſuper trianguli vno latere ab extremitatibus duę rectæ lineæ interius conſtitutę fuerint, hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt. lib.1.pr.22.* 47

22 *Ex tribus rectis lineis, quę ſunt tribus datis rectis lineis ęquales, triãgulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores, omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta, reliquo ſunt maiora. lib.1.prop.23.* 48

23 *Ad datam rectam lineam datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere. lib.1. pr.24.* 50

24 *Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrunque vtrique, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſin baſi maiorem habebunt. lib.2.cor.3.prop.6.* 72

25 *Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrunque vtrique, baſin verò baſi maiorem: & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt. lib.2.ſch.prop.6.* 72

26 *Si duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habuerint, vtrunque vtrique, vnumque latus vni lateri ęquale, ſiue quod ęqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni ęqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrunque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo ęqualem habebunt. lib.1. prop.25.* 50

27 *Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos ęquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectę lineę. lib.1.prop.16.* 36

28 *Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: parallelę erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ. lib.1.prop.16.* 36

29 *In parallelas rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos inter ſe ęquales efficit, & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes ęqualem, & internos & ad eaſdem partes duobus rectis ęquales facit. lib.1.prop.15.* 35

30 *Quę eidem rectę lineę parallelę, & inter ſe ſunt parallelę. lib.1.pr.17.* 40

31 *A dato puncto, datę rectę lineę parallelam rectam lineam ducere. lib. 1.cor.prop.16.* 37

32 *Cuiuſcunque trianguli vno latere vlte-*

vlterius producto: externus angulus duobus internis & oppoſitis eſt ęqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis ęquales. lib.1.prop. 18. 41

33 Rectæ lineę quę æquales & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt, & ipſæ ęquales & parallelę ſunt. lib.1.prop.27. 52

34 Parallelogrammorum ſpatiorum ęqualia ſunt inter ſe quæ ex aduerſo & latera & anguli: atque illa bifariam ſecat diameter. lib.1.prop.26. 51

35 Parallelogramma ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt equalia.lib.1.prop.31.59

36 Parallelogramma ſuper ęqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt ęqualia. lib.1. prop.31. 59

37 Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. lib.1.prop.32. 60

38 Triangula ſuper ęqualibus baſibus conſtituta & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt ęqualia. lib.1.próp.32. 60

39 Triangula ęqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis. lib.4. cor.1. prop.1. 164

40 Triangula ęqualia ſuper ęqualibus baſibus & ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis. lib.4. cor.1.prop.1. 164

41 Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. lib. 1. cor.2.prop.32. 61

42 Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. lib.1.prop.33. 62

43 In omni parallelogrammo, complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, interſe ſunt ęqualia. lib.4.prop.19. 185

44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo. lib.4. cor.prop.20. 189

45 Dato rectilineo ęquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. lib.4. prop.20. 186

46 A data recta linea quadratum deſcribere. lib.1.prop.34. 62

47 In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, ęquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis. lib.5.prop.18. 228

48 Si quadratum quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, ęquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: angulus cōprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt. lib.5. cor.2. prop.29. 242

LIB. II.

1 Si fuerint duę rectę lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub inſecta & quolibet ſegmentorum comprehenduntur. lib.4. ſchol.prop.1. 165

2 Si recta linea ſecta ſit vtcunque, rectangula quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, ęqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato. lib.4.ſchol. prop.1. 165

3 Si recta linea ſecta ſit vtcunque, rectangulum ſub tota & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prędicto ſegmento deſcribitur, quadrato. lib.4. ſchol. prop.1. 165

4 Si recta linea ſecta ſit vtcunque: quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis quę à ſegmentis deſcribuntur quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo. lib.5. cor.2.prop.19. 227

5 Si recta linea ſecetur in ęqualia & non ęqualia: rectangulum ſub inęqualibus ſegmentis totius comprehenſum vnà cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei quod à dimidia deſcribitur, quadrato. lib.5. cor.prop.22. 233

6 Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quędam linea in rectum adijciatur, rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta & adiecta, ſimul cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tũ ex adiecta componitur, tanquam ab vna deſcripto. lib.5.cor.prop.22. 233

7 Si recta linea ſecetur vtcunque: quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quòd bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato. lib.5.cor.1.prop. 20. 229

8 Si recta linea ſecetur vtcunque: rectangulum quater comprehenſum ſub tota & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, ęquale eſt ei, quod à tota & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato. lib.5. cor.1.prop.21. 231

9 Si recta linea ſecetur in ęqualia & non ęqualia: quadrata quę ab inęqualibus totius ſegmentis fiunt, duplicia ſunt & eius quod à dimidia, & eius quod ab intermedia ſectionum fit, quadratorum. lib.5. prop.23. 233

10 Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quępiam recta linea: quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata, duplicia ſunt & eius quod à dimidia, & eius quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna deſcriptum ſit, quadratorum. lib.5. prop.23. 233

11 Datam rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato. lib.4.pr.25. 195

12 In amblygonijs triangulis, quadratum quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehenſi, & ab vno laterum quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum. lib.5. cor.1. prop.28. 240

13 In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente, minus eſt quadratis quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehenſi, & ab vno laterum

terum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum. lib.5.cor.1.prop.29. 241

14 Dato rectilineo ęquale quadratum conſtituere. lib.4 prop.21. 187

LIB. III.

1 Dati circuli centrum reperire. lib. 2.prop.1. 66

2 Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint, recta linea quę ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet. lib.2.prop.4. 68

3 Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet: & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit. lib.2.prop. 2. 67

4 Si in circulo duę rectę lineæ ſeſe mutuò ſecent non per cẽtrum extenſę, ſeſe mutuò bifariam non ſecabunt. lib. 2.prop.3. 68

5 Si duo circuli ſeſe mutuò ſecent, non erit illorum idem centrum. lib.2.prop. 5. 69

6 Si duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, eorum nõ erit idem centrum. lib. 2. prop. 5. 69

7 Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eòque puncto in circulum quędam rectæ lineę cadant: maxima quidem erit ea in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum vero propinquior illi quę per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt. Duę autem ſolùm rectę lineæ ęquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimę. lib.2.prop. 6. 70

8 Si extra circulum ſumatur pũctum quodpiam, ab eòque puncto ad circulum deducantur rectæ quędam lineę, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquę verò vt libet: in cauam peripheriam cadẽtium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt. In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem eſt illa, quę inter punctum & diametrum interponitur: aliarum autem, ea quæ propinquior eſt minimę, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineę ęquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimę. lib.2.prop.6. 70

9 Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales, acceptum punctum cẽtrum ipſius eſt circuli. lib. 2.cor.2. prop.6. 72

10 Circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis non ſecat. lib.2. prop. 7. 72

11 Si duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra, ad eorum centra adiuncta recta linea & producta, in contactum circulorum cadet. lib.2.prop.8. 73

12 Si duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta quę ad centra eorum adiungitur, per contactum illum tranſibit. lib.2. prop.8. 73

13 Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus in-

tus ſiue extra tangat. lib.2.prop.9. 74
14 *In circulo æquales rectę lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quę æqualiter diſtant à centro, ęquales ſunt inter ſe. lib.2.prop.10.* 74
15 *In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior. lib.2.prop.11.* 76
16 *Quę ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet, & in locum inter ipſam rectam lineam & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet. Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor. lib.2. prop.21.* 88
17 *A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum. lib. 2.prop.22.* 96
18 *Si circulum tangat recta quępiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quędam linea: quę adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit. lib.2. prop. 23.* 96
19 *Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli. lib.2. prop.23.* 96
20 *In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis angulorum. lib.2.prop.13.* 77
21 *In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, ſunt inter ſe ęquales. lib. 2.prop.14.* 78
22 *Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt ęquales. lib.2.prop.15.* 79
23 *Super eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia & inęqualia non conſtituentur ad eaſdem partes. ex lib.5.prop.15.* 221
24 *Super ęqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe ęqualia. ex lib.5.prop.15.* 221
25 *Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. lib.2. prop.1.* 66
26 *Inęqualibus circulis, ęquales anguli ęqualibus peripherijs inſiſtunt ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. lib.2.prop.16.* 80
27 *In æqualibus circulis, anguli qui ęqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe ęquales ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. lib.2. prop.17.* 82
28 *In ęqualibus circulis ęquales rectę lineę ęquales peripherias auferunt, maiorem quidem, maiori, minorem autem, minori. lib.2 prop.18.* 84
29 *In ęqualibus circulis, ęquales peripherias ęquales rectę lineę ſubtendunt. lib.2.prop.18.* 84
30 *Datam peripheriam bifariam ſecare. lib.2.cor.prop.19.* 86
31 *In circulo angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto. lib. 2. prop. 20.* 86
32 *Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quędam recta linea circulum ſecans: anguli quos ad contingentem facit,*

ęquales ſunt ijs qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis. lib.2. prop.24. 97

33 Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum ęqualem dato angulo rectilineo. lib.2.prop.25. 98

34 A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum ęqualem dato angulo rectilineo. lib.2.prop.26. 99

35 Si in circulo duę rectę lineę ſeſe mutuò ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, ęquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo. lib.4. prop.22. 188

36 Si extra circulum ſumatur pũctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duę rectę lineę, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriã aſſumpta comprehenditur rectangulum, ęquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato. lib.4. prop.22. 188

37 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem quod ſub tota ſecante & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, ęquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato: incidens ipſa circulum tanget. lib.4. prop. 22. 188

LIB. IV.

1 In dato circulo, rectam lineam accommodare ęqualem datę rectæ lineę, quę circuli diametro non ſit maior. lib.2.prop.12. 76

2 In dato circulo, triangulum deſcribere dato triangulo ęquiangulum. lib. 5.prop. 3. 201

3 Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo ęquiangulum. lib.5.prop.4. 204

4 In dato triangulo, circulum inſcribere. lib.5.prop.6. 207

5 Circa datum triangulum, circulum deſcribere. lib.2.ſchol.prop.1. 66

6 In dato circulo, quadratum deſcribere. lib.5.prop.3. 201

7 Circa datum circulum, quadratum deſcribere. lib.5.prop.4. 204

8 In dato quadrato, circulũ inſcribere. lib.5. prop. 6. 207

9 Circa datum quadratum, circulum deſcribere. lib.5. prop.5. 207

10 Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrunque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui. lib.5.cor.prop.1. 200

11 In dato circulo, pentagonum ęquilaterum & ęquiangulum inſcribere. lib.5.prop.3. 201

12 Circa datum circulum, pentagonũ ęquilaterum & ęquiangulum deſcribere. lib.5. prop.4. 204

13 In dato pentagono ęquilatero & ęquiangulo, circulum inſcribere. lib.5. prop.6. 207

14 Circa datum pentagonum ęquilaterum & ęquiangulum, circulum deſcribere. lib.5. prop. 5. 207

15 In dato circulo hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere. lib.5.pr.3. 201

16 In dato circulo, quintidecagonum & ęquilaterum & ęquiangulum deſcribere. lib.5. prop. 3 201

LIB.

LIB. V.

1 Si ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum ęqualium numero, ſingulę ſingularum ęquè multiplices, quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. ex lib.3. prop.15. 143

2 Si prima ſecundę ęquè fuerit multiplex, atque tertia quartę, fuerit autem & quinta ſecundę ęquè multiplex, atque ſexta quartę: erit & compoſita prima cum quinta, ſecundę æquè multiplex, atque tertia cum ſexta, quartę. ex lib.3. prop.22. 153

3 Si ſit prima ſecundę ęquè multiplex, atque tertia quartę, ſumantur autem ęquè multiplices primæ & tertiæ: erit & ex ęquo ſumptarum vtraque vtriuſque ęquè multiplex, altera quidem ſecundę, altera autem quartæ. ex lib. 3. prop. 17. 146

4 Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: etiam æquè multiplices primę & tertię, ad ęquè multiplices ſecundæ & quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint. lib.3. cor.1. prop.14. 150

5 Si magnitudo magnitudinis ęquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. ex lib.3. pro. 15. 143

6 Si duę magnitudines, duarum magnitudinum ſint ęquè multiplices, & detractę quędam ſint earundem æquè multiplices: & reliquę eiſdem aut ęquales ſunt, aut ęquè ipſarum multiplices. ex lib. 3 cor. prop. 22. & cor. 1. prop.15. 144

7 Æquales ad eandem, eandem habent rationem: & eadem ad ęquales. lib.3. prop. 3. 132

8 Inęqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. lib.3. prop. 2. 131

9 Quæ ad eandem, eandem habent rationem, ęquales ſunt inter ſe: & ad quas eadem, eandem habet rationem, eę quoque ſunt inter ſe ęquales. lib.3. prop.4. 133

10 Ad eandem magnitudinem, rationem habentium, quę maiorem rationem habet, illa maior eſt. ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. lib.3. prop.5. 134

11 Quę eidem ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eędem. lib. 3. prop. 7. 135

12 Si ſint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. lib.3. prop.15. 143

13 Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: prima quoque ad ſecũdam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam. lib.3. prop.6. 134

14 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima verò quàm tertia maior fuerit: erit & ſecunda maior quam quarta. Quòd ſi prima fuerit ęqualis tertię, erit & ſecũda ęqualis quartę: ſi

verò

verò minor, & minor erit. lib.3. cor. 1. prop.16. 146

15 *Partes, cùm pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent; ita ſumantur. lib.3. prop.11.* 139

16 *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. lib.3.prop.12.* 140

17 *Si compoſitę magnitudines proportionales fuerint, hę quoque diuiſę proportionales erunt. lib.3.prop.13.* 141

18 *Si diuiſę magnitudines ſint proportionales, hę quoque compoſitæ proportionales erunt. lib.3.prop.14.* 142

19 *Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit. lib.3.prop.15.* 143

20 *Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis ęquales numero, quæ binę & in eadem ratione ſumantur, ex ęquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quòd ſi prima tertię fuerit ęqualis, erit & quarta ęqualis ſextę: ſin illa minor, hæc quoque minor erit. ex lib. 3. prop.19.& cor.1.prop.16.*

21 *Si ſint tres magnitudines, & alię ipſis ęquales numero quę binæ & in eadem ratione ſumantur, fueritq; perturbata earum proportio, ex ęquo autem prima quàm tertia maior fuerit, erit & quarta quã ſexta maior. quòd ſi prima tertię fuerit ęqualis, erit & quarta ęqualis ſextę: ſin illa minor, hęc quoque minor erit. ex lib.3. prop. 20.& cor.1.prop.16.*

22 *Si ſint quotcunque magnitudines, & alię ipſis ęquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, & ex ęqualitate in eadem ratione erunt. lib. 3.prop.19.* 148

23 *Si ſint tres magnitudines, alięque ipſis æquales numero, quæ binę in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. lib.3.prop.20.* 151

24 *Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta ad quartam. lib.3.prop.22.* 153

25 *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. lib.3.pr. 16.* 146

LIB. VI.

1 *Triangula & parallelogrãma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe vt baſes. lib.4. prop.1.* 162

2 *Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quędam linea: hęc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela. lib.4. prop.2.* 165

3 *Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem quam reliqua ipſius trianguli latera, recta linea, quę à vertice ad ſectio-*

ctionem producitur, ea bifariam ſecat trianguli ipſius angulum. lib.4. prop.3. 167

4 Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quę circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quę ęqualibus angulis ſubtenduntur. lib.4.prop.4. 168

5 Si duo triangula latera proportionalia habeant, ęquiangula erunt triãgula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur. lib.4.prop.5. 169

6 Si duo triangula vnum angulum vni angulo ęqualem, & circum ęquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erũt triangula, ęqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. lib.4. prop.6. 169

7 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò ſimul vtrunque aut minorem aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & ęquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera. lib.4. prop.8. 172

8 Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. lib.4. prop.9. 173

9 A data recta linea imperatam partem auferre. lib.1.pr.28. 55

10 Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit. lib.4. prop. 12. 175

11 Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire. lib.4. pr. 10. 174

12 Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem adinuenire. lib.4. pr. 11. 175

13 Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire. lib.4. pr. 10. 174

14 Æqualium, & vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrãmorum reciproca ſunt latera, quę circum ęquales angulos: & quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo ęqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum ęquales angulos, illa ſunt ęqualia. lib.4. prop.14. 177

15 Æqualium, & vnum angulum vni ęqualem habentium triangulorum reciproca ſunt latera, quę circum ęquales angulos: & quorum triangulorum vnum angulum vni ęqualem habentium reciproca ſunt latera, quę circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. lib.4.prop.14. 177

16 Si quatuor rectę lineę proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum ęquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectę lineę proportionales erunt. lib.4.cor.1.prop.14. 178

17 Si tres rectę lineę ſint proportionales, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum ęquale eſt ei, quòd à media deſcribitur quadrato: & ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum ęquale ſit ei quod à media deſcribitur quadrato, illę tres rectæ lineæ propor-

tio-

tionales erunt. lib. 4. cor. 2. prop. 14. 179

18 *A data recta lineæ, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere. lib. 4. prop. 16.* 180

19 *Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum. lib. 4. prop. 15.* 179

20 *Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus. lib. 4. prop. 17.* 181

21 *Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. lib. 4. cor. prop. 16.* 181

22 *Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint, ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt. lib. 4. prop. 18.* 183

23 *Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. lib. 4. prop. 181* 176

24 *In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti & inter ſe ſunt ſimilia. lib. 4. prop. 19.* 185

25 *Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere. lib. 4. prop. 21.* 187

26 *Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit & ſimile toti & ſimiliter poſitum communem cum eo habens angulum, hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit. l. 4. pr. 19.* 185

27 *Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur, maximum id eſt quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum, ſimile exiſtens defectui. ex lib. 4. prop. 24.* 193

28 *Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri rectilineo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles ſint defectus, & eius quod à dimidia deſcribitur, & eius cui ſimile deeſſe debet. lib. 4. prop. 24.* 193

29 *Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato. lib. 4. prop. 24.* 193

30 *Propoſitam rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione ſecare. lib. 4. prop. 25.* 195

31 *In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. lib. 5. prop. 18.* 225

32 *Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela, tum reliqua illorum triangulorum latera in*

 re-

rectam lineam collocata reperientur. lib.4.prop.7. 170

33 In ęqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum ipſis peripherijs in quibus inſiſtunt, ſiue ad cētra, ſiue ad peripherias conſtituti illis inſiſtant peripherijs. Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. lib. 5.prop.11. 215

LIB. VII.

1 Duobus numeris inęqualibus propoſitis, ſi detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur pręcedentem quoad aſſumpta ſit vnitas: qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt. lib.8.prop.1.340

2 Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. lib.8.prop.2. 341

3 Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. lib.8.pro. 3. 343

4 Omnis numerus cuiuſque numeri, minor maioris aut pars eſt, aut partes. lib.3.def.1.& 3. 108

5 Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quę vnus eſt vnius. ex lib.3.prop. 15. 143

6 Si numerus ſit numeri partes, & alter alterius eędem partes, & ſimul vterque vtriuſque ſimul eędem partes erunt, quæ ſunt vnus vnius. ex lib.3. prop.15. 143

7 Si numerus numeri eadem ſit pars quę detractus detracti, & reliquus reliqui eadem pars erit quæ totus eſt totius. ex lib.3. prop.15. 143

8 Si numerus numeri eędem ſint partes quę detractus detracti, & reliquus reliqui eędem partes erunt, quæ ſunt totus totius. ex lib.3. prop.15. 143

9 Si numerus numeri pars ſit, & alter alterius eadem pars & viciſſim quæ pars eſt vel partes primus tertij; eadē pars erit vel eędem partes & ſecundus quarti. lib.3.prop.10. 138

10 Si numerus numeri partes ſint, & alter alterius eędem partes, etiam viciſſim quę ſunt partes aut pars primus tertij, eędem partes erunt vel pars & ſecundus quarti. ex lib. 3. prop.12. 140

11 Si quemadmodum ſe habet totus ad totum, ita detractus ad detractum, & reliquus ad reliquum ita ſe habebit vt totus ad totum. ex lib.3.prop.15.143

12 Si ſint quotcunque numeri proportionales, quemadmodum ſe habet vnus antecedentium ad vnum ſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. ex lib. 3.prop.15. 143

13 Si quatuor numeri ſint proportionales, & viciſſim proportionales erūt. ex lib.3.prop. 12. 140

14 Si ſint quotcunque numeri & alij illis ęquales multitudine, qui bini ſumantur & in eadem ratione: etiam ex ęqualitate in eadem ratione erunt. ex lib.3.prop.17. 146

15 Si vnitas numerum quempiam metiatur, alter verò numerus alium quēdam numerum æquè metiatur, & viciſſim vnitas tertium numerum ęquè metietur atque ſecundus quartum. ex lib.3.prop.10. 138

16 Si duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes faciant aliquos, qui ex illis geniti fuerint inter ſe ęquales erunt. lib.

lib.8.cor.prop.7. 348

17 *Si numerus duos numeros multiplicans faciat aliquos, qui ex illis procreati erunt eandem ratione habebunt quam multiplicati. lib.8.prop.7.* 347

18 *Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes faciant aliquos, geniti ex illis eandem habebunt rationem, quam qui illum multiplicarunt. lib.8. prop.7.* 347

19 *Si quatuor numeri ſint proportionales, qui ex primo & quarto fit, æqualis erit ei qui ex ſecundo & tertio: & ſi qui ex primo & quarto fit numerus, æqualis ſit ei qui ex ſecundo & tertio, illi quatuor numeri proportionales erunt. lib.8.prop.8.* 348

20 *Si tres numeri ſint proporrionales, qui ab extremis continetur, æqualis eſt ei qui à medio efficitur. Et ſi qui ab extremis continetur, æqualis ſit ei qui à medio deſcribitur, illi tres numeri proportionales erunt. lib. 8. prop.9.* 349

21 *Minimi numeri omnium qui eãdem cum eis rationem habent, æqualiter metiuntur numeros eandem rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem. lib. 8. prop. 6.* 346

22 *Si tres ſint numeri & alij multitudine illis æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione, ſit autem perturbata eorum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. ex lib.3.prop.20.* 151

23 *Primi inter ſe numeri minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. lib.8. prop.6.* 346

24 *Minimi numeri omniũ eandem cum eis rationem habentium, primi ſunt inter ſe. lib. 8. prop. 6.* 346

25 *Si duo numeri ſint primi inter ſe, qui alterutrum illorum metitur numerus, is ad reliquum primus erit. lib. 8. prop.5.* 345

26 *Si duo numeri ad quempiam numerum primi ſint, ad eundem primus is quoque futurus eſt, qui ab illis productus fuerit. lib.8.prop.13.* 352

27 *Si duo numeri primi ſint inter ſe, qui ab vno eorũ gignitur ad reliquum, primus erit. lib. 8. cor.prop.13.* 352

28 *Si duo numeri ad duos numeros ambo ad vtrumque, primi ſint, & qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt. lib.8. prop.13.* 352

29 *Si duo numeri primi ſint inter ſe, & multiplicãs vterque ſeipſum procreet aliquem, qui ex ijs producti fuerint, primi inter ſe erunt. Quòd ſi numeri initio propoſiti multiplicantes eos qui producti ſunt, effecerint aliquos, hi quoque inter ſe primi erunt, & circa extremos idem hoc ſemper eueniet. lib. 8. prop.15.* 353

30 *Si duo numeri primi ſint inter ſe, etiam ſimul vterque ad vtrunque illorum primus erit. Et ſi ſimul vterque ad vnum aliquem eorum primus ſit, etiam qui initio poſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt. lib.8.prop.5.* 345

31 *Omnis primus numerus ad omnem numerum quem non metitur, primus eſt. lib.8. prop.4.* 344

32 *Si duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes faciant aliquem, hunc autem ab illis productum metiatur primus quidam numerus, is alterum etiam metitur eorum qui initio poſiti erant. lib. 8. prop.12.* 351

33 *Omnem compoſitum numerum aliquis*

quis

quis primus metitur. lib. 8. prop. 4. 344

34 *Omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. lib. 8. cor. 1. prop. 4.* 345

35 *Numeris datis quotcunque, reperire minimos omnium qui eandem cum illis rationem habeant. lib. 8. prop. 16.* 354

36 *Duobus numeris datis, reperire quem illi minimum metiantur numerum. lib. 8. pr. 17.* 355

37 *Si duo numeri numerum quempiam metiantur, & minimus quem illi metiuntur eundem metietur. lib. 8. prop. 18.* 356

38 *Tribus numeris datis, reperire quẽ minimum numerum illi metiantur. lib. 8. prop. 19.* 357

39 *Si numerus quiſpiam numerum metiatur, menſus partem habebit metiẽti cognominem. lib. 8. cor. 1. prop. 22.* 359

40 *Si numerus partem habuerit quamlibet, illum metietur numerus parti cognominis. lib. 8. cor. 2. prop. 22.* 360

41 *Numerum reperire, qui minimus cùm ſit, datas habeat partes. lib. 8. prop. 22.* 358

LIB. VIII.

1 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, quorum extremi ſint inter ſe primi, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. lib. 8 prop. 23.* 360

2 *Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam in data ratione. lib. 8. prop. 24.* 360

3 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi habẽtium eandem cum eis rationem, illorum extremi ſunt inter ſe primi. lib. 8. prop. 25.* 361

4 *Rationibus datis quotcunque in minimis numeris reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. lib. 8. prop. 26.* 362

5 *Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. lib. 8. prop. 31.* 367

6 *Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur, neque alius quiſquam vllum metietur. lib. 8. cor. prop. 27.* 364

7 *Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam ſecundum metietur. lib. 8. prop. 27.* 363

8 *Si inter duos numeros medij continua proportione incidant numeri, quot inter eos medij continua proportione incidunt numeri, tot & inter alios cãdem cum illis habentes rationem medij continua proportione incident. lib. 8. prop. 28.* 365

9 *Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione incidant numeri, quot inter illos medij continua proportione incidunt numeri, totidem & inter vtrunque eorum ac vnitatem deinceps medij continua proportione incident. lib. 8. prop. 29.* 366

10 *Si inter duos numeros & vnitatem continuè proportionales incidant numeri, quot inter vtrunque ipſorum & vnitatem deinceps medij continua proportione incidunt numeri, totidem & inter illos medij continua proportione incident. lib. 8. prop. 30.* 366

11 *Duo-*

11 *Duorum quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: & quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. lib.8. prop.32.* 368

12 *Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: & cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. lib.8. prop.32.* 368

13 *Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos, qui ab illis producti fuerint proportionales erunt: & ſi numeri primùm poſiti, ex ſuo in procreatos ductu faciant aliquos, ipſi quoque proportionales erũt. lib.8. cor. prop.22.* 369

14 *Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur, & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius, & quadratus quadratum metietur. lib.8. prop.35.* 372

15 *Si cubus numerus cubum numerum metiatur, & latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur, tum cubus cubum metietur. lib.8. prop.35.* 372

16 *Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur. lib.8. prop.35.* 372

17 *Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi alicuius latus alterius non metiatur, neque cubus cubum metietur. lib.8. pr. 35.* 372

18 *Duorum ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. lib.8. prop.33.* 370

19 *Inter duos ſimiles numeros ſolidos, duo medij proportionales incidunt numeri, & ſolidus ad ſimilem ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum. lib. 8. prop.34.* 371

20 *Si inter duos numeros vnus medius proportionalis incidat numerus, ſimiles plani erunt illi numeri. lib.8. prop. 33.* 370

21 *Si inter duos numeros duo medij proportionales incidant numeri, ſimiles ſolidi ſunt illi numeri. lib.8. prop. 34.* 371

22 *Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus, & tertius quadratus erit. lib. 8. cor. prop.26.* 374

23 *Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus, & quartus cubus erit. lib.8. cor. prop.26.* 374

24 *Si duo numeri rationem habeant inter ſe quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit. lib.8. prop.27.* 375

25 *Si numeri duo rationem inter ſe habeant quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus ſit, & ſecundus cubus erit. lib. 8. prop. 27.* 375

26 *Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. lib.8. prop.*

prop. 37. 375

27 Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum. lib.8. prop.37. 375

LIB. IX.

1 Si duo ſimiles plani numeri mutuò ſeſe multiplicantes quendam procreent, productus quadratus erit. lib. 8. prop.38. 376

2 Si duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes quadratum faciant, illi ſimiles ſunt plani. lib.8.prop.38. 376

3 Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem, productus cubus erit. lib.8.prop.39. 377

4 Si cubus numerus cubum numerum multiplicans quendam procreet, procreatus cubus erit. lib.8.prop.39. 377

5 Si cubus numerus numerum quendam multiplicans cubum procreet, & multiplicatus cubus erit. lib.8. prop. 39. 377

6 Si numerus ſeipſum multiplicans cubum procreet, & ipſe cubus erit. lib. 8.prop.39. 377

7 Si compoſitus numerus quendam numerum multiplicās quempiam procreet, productus ſolidus erit. ex lib.8. def. 9. & cor. 1. prop.4.

8 Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales ſint, tertius ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes: quartus autem cubus, & duobus intermiſſis omnes: ſeptimus verò cubus ſimul & quadratus, & quinque intermiſſis omnes. lib. 8. prop.40. 378

9 Si ab vnitate ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, ſit autem quadratus is qui vnitatem ſequitur, & reliqui omnes quadrati erunt. Quòd ſi qui vnitatem ſequitur cubus ſit & reliqui omnes cubi erunt. lib. 8. prop.41. 379

10 Si ab vnitate numeri quotcunque proportionales ſint, non ſit autem quadratus is qui vnitatem ſequitur, neque alius vllus quadratus erit, demptis tertio ab vnitate ac omnibus vnum intermittentibus. Quòd ſi qui vnitatem ſequitur cubus non ſit, neque alius vllus cubus erit demptis quarto ab vnitate ac omnibus duos intermittentibus. lib.8.prop.42. 380

11 Si ab vnitate numeri quotlibet deinceps proportionales ſint, minor maiorem metitur per quempiam eorum qui in proportionalibus ſunt numeris. lib.8. prop.43. 381

12 Si ab vnitate quotlibet numeri ſint proportionales, quot primorum numerorum vltimum metiuntur, totidem & eum qui vnitati proximus eſt, metientur. lib.8. prop.43. 381

13 Si ab vnitate ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſit qui vnitatem ſequitur, maximum nullus alius metietur, ijs exceptis qui in proportionalibus ſunt numeris. lib.8. prop. 44. 382

14 Si minimum numerum primi aliquot numeri metiantur, nullus alius numerus primus illum metietur, ijs exceptis qui primò metiuntur. lib.8. pr. 20. 357

15 Si tres numeri deinceps proportionales ſint minimi eandem cum ipſis habentium rationem, duo quilibet cōpoſiti ad tertium primi erunt. lib.8. pr. 45. 383

16 Si duo numeri ſint inter ſe primi, nō ſe habebit quemadmodum primus ad ſecun-

ſecundum, ita ſecundus ad quempiam alium. lib.8. pr. 10. 349
17 Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, quorum extremi ſint inter ſe primi, non erit quemadmodum primus ad ſecundum, ita vltimus ad quempiam alium. lib.8.prop.10. 349
18 Duobus numeris datis, conſiderare poſſitne tertius illis inueniri proportionalis. lib.8. prop.11. 350
19 Tribus numeris datis, conſiderare poſſitne quartus illis reperiri proportionalis. lib.8. prop.11. 350
20 Primi numeri plures ſunt quacunque propoſita multitudine primorum numerorum. lib.8.prop.21. 358
21 Si pares numeri quotlibet compoſiti ſint, totus eſt par. lib. 8. ſch. prop. 46. 386
22 Si impares numeri quotlibet compoſiti ſint, ſit autem par illorum multitudo, totus par erit. lib.8. ſch. prop. 46. 386
23 Si impares numeri quotcunq; compoſiti ſint, ſit autem impar illorum multitudo, & totus impar erit. lib.8. ſch.prop.46. 386
24 Si de pari numero par detractus ſit, & reliquus par erit. lib.8. ſch.pr. 46. 386
25 Si de pari numero impar detractus ſit, & reliquus impar erit. lib. 8. ſch. prop.46. 386
26 Si de impari numero impar detractus ſit, & reliquus par erit. lib.8.ſch. pr.46. 386
27 Si ab impari numero par ablatus ſit, reliquus impar erit. lib.8. ſch. pr. 46. 386
28 Si impar numerus parem multiplicans procreet quempiam, procreatus par erit. lib.8. ſch. prop.46. 386
29 Si impar numerus imparem numerũ multiplicans quendã procreet, procreatus impar erit. l.8.ſc. pr.46. 386
30 Si impar numerus parem numerũ metiatur, & illius dimidium metietur. ex lib.8. def. 9. & ſch. prop.46. 386
31 Si impar numerus ad numerum quempiam primus ſit, & ad illius duplum primus erit. lib.8.prop.14. 355
32 Numerorum, qui à binario dupli ſunt, vnuſquiſque pariter par eſt tantùm. lib.8. prop.46. 385
33 Si numerus dimidium imparẽ habeat, pariter impar eſt tantùm. lib.8. prop.46. 385
34 Si par numerus nec ſit duplus à binario, nec dimidium imparẽ habeat, pariter par eſt, & pariter impar. lib. 8.prop.46. 385
35 Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, detrahantur autem de ſecundo & vltimo æquales ipſi primo, erit quemadmodum ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes qui vltimum antecedunt. lib.8.pr. 47. 386
36 Si ab vnitate numeri quotlibet deinceps expoſiti ſint in dupla proportione quoad totus compoſitus primus factus ſit, iſq; totus in vltimum multiplicatus quempiam procreet, procreatus perfectus erit. lib.8. pr.48. 387

LIB. X.

1 Duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi de maiore detrahatur plus dimidio, & rurſus de reſiduo iterum detrahatur plus dimidio, idque ſemper fiat: relinquetur quædam magnitudo minor altera minore ex duabus propoſitis. lib.2. prop.27. 101

2 *Duabus magnitudinibus propoſitis inęqualibus, ſi detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reſiduum vnquam metiatur id quod ante ſe metiebatur, incommenſurabiles ſunt illæ magnitudines. lib.9.prop.6.* 399

3 *Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram reperire. lib.9. prop.7.* 400

4 *Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram reperire. lib.9. prop.7.* 400

5 *Commenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem eam habent, quam habet numerus ad numerum. lib.9. cor.1.prop.8.* 403

6 *Si duæ magnitudines proportionem eam habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, commenſurabiles ſunt illę magnitudines. lib.9. cor.1. prop.8.* 403

7 *Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quā numerus ad numerum. lib. 9. cor. 1. prop.8.* 403

8 *Si duę magnitudines inter ſe proportionem non habeāt, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles illæ ſunt magnitudines. lib.9. cor. 1. prop. 8.* 403

9 *Quadrata, quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine commenſurabilibus, inter ſe proportionem habent, quam numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter ſe, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habent quoque latera longitudine commenſurabilia. Quadrata verò quę deſcribuntur à lineis longitudine incommenſurabilibus, proportionem non habent inter ſe, quam quadratus numerus ad numerum alium quadratum. Et quadrata non habentia proportionem inter ſe, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque latera habebunt longitudine commenſurabilia. lib.9. prop. 8.* 401

10 *Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima verò ſecundę fuerit commenſurabilis, tertia quoque quartę commenſurabilis erit. quòd ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis, tertia quoque quartę incommenſurabilis erit. lib. 9. cor. 3. prop. 8.* 404

11 *Propoſitæ lineæ rectæ Rationali reperire duas lineas rectas incommenſurabiles, hanc quidem longitudine tantùm, illam verò non longitudine tantùm, ſed etiam potentia incommenſurabilem. lib.9. prop.9.* 404

12 *Magnitudines quę eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, inter ſe quoque ſunt commenſurabiles. lib. 3. cor.pr.17.* 147

13 *Si ex duabus magnitudinibus hęc quidem commenſurabilis ſit tertię magnitudini, illa verò eidem incommenſurabilis, incommenſurabiles erūt illæ duę magnitudines. lib.9.cor.prop. 12.* 412

14 *Si duarum magnitudinum commenſurabilium altera fuerit incommenſurabilis magnitudini alteri cuipiā tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertię incommenſurabilis erit. lib. 9. cor. prop.12.* 412

15 Si.

15 *Si quatuor rectę proportionales fuerint, poſſit autem prima pluſquàm ſecunda tanto quantum eſt quadratum lineę ſibi commenſurabilis longitudine: tertia quoque poterit pluſquàm quarta tanto quantum eſt quadratum lineę ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi prima poſſit pluſquàm ſecunda quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: tertia quoque poterit pluſquàm quarta quadrato lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. ex lib.9.prop.10.* 405

16 *Si duę magnitudines commenſurabiles componantur, tota magnitudo compoſita ſingulis partibus commenſurabilis erit. Quòd ſi tota magnitudo compoſita alterutri parti commenſurabilis fuerit, illæ duę quoque partes commenſurabiles erunt. lib.9. cor.1. prop.10.* 406

17 *Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, ipſa quoque tota magnitudo ſingulis partibus componentibus incommenſurabilis erit. Quòd ſi tota alteri parti incommenſurabilis fuerit, illæ quoque primę magnitudines inter ſe incommenſurabiles erunt. lib.9. cor.2.prop.10.* 407

18 *Si fuerint duę rectę lineę inequales, & quartæ parti quadrati quod deſcribitur à minore, ęquale parallelogrammum applicetur ſecundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi: ſi præterea parallelogrammum ſui applicatione diuidat lineam illam in partes inter ſe commenſurabiles lõgitudine: illa maior linea tanto plus poteſt quàm minor, quantum eſt quadratum lineę ſibi cõmenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior plus poſſit quã minor, tanto quantum eſt quadratum lineę ſibi commenſurabilis longitudine, & prętęrea quartę parti quadrati lineæ minoris ęquale parallelogrammum applicetur ſecundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi: parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe longitudine commenſurabiles. lib.9. prop.10.* 405

19 *Si fuerint duæ rectæ inequales, quartę autẽ parti quadrati lineæ minoris ęquale parallelogrammum ſecundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus eiuſdem parallelogrammi: ſi parallelogrammum præterea ſui applicatione diuidat lineã in partes inter ſe longitudine incommenſurabiles: maior illa linea tanto plus poteſt quàm minor quantum eſt quadratum lineę ſibi maiori incommenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior linea tanto plus poſſit quàm minor, quantum eſt quadratum lineę incõmenſurabilis ſibi lõgitudine: & pręterea quartæ parti quadrati lineæ minoris ęquale parallelogrammum applicetur ſecundum maiorem, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius: parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe incommenſurabiles longitudine. lib.9. prop.10.* 405

20 *Superficies rectangula contenta ex*

lineis rectis rationalibus longitudinę commenſurabilibus ſecundum vnum aliquem modum ex antedictis, rationalis eſt. lib.9. prop.11. 410

21 Si rationale ſecundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commenſurabilem longitudine lineę cui rationale parallelogrammum applicatur. lib.9.prop.11. & cor. eius. 410

22 Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potētia tantum commenſurabilibus, irrationalis eſt. Linea autem quę illam ſuperficiem poteſt, irrationalis & ipſa eſt: vocetur verò medialis.lib.9.prop. 12. 411

23 Quadrati lineæ medialis applicati ſecundum lineam rationalem, alterum latus eſt linea rationalis, & incommenſurabilis longitudine lineę ſecundùm quam applicatur. lib.9.prop. 13. 413

24 Linea recta mediali commenſurabilis, eſt ipſa quoque medialis. lib. 9. prop.14. 413

25 Parallelogrammum rectangulum contentum ex lineis medialibus longitudine commenſurabilibus, mediale eſt. lib.9.prop.14. 413

26 Parallelogrammum rectangulum comprehenſum duabus lineis medialibus potentia tantùm commenſurabilibus, vel rationale eſt, vel mediale. lib.9.cor.1.prop.16. 417

27 Mediale non eſt maius quàm mediale ſuperficie rationali. lib. 9. cor. 2. prop. 23. 426

28 Mediales lineas inuenire potentia tantùm commenſurabiles rationale comprehendentes. lib.9.prop.15. 415

29 Mediales lineas inuenire potentia tantùm commenſurabiles mediale cōprehendentes. lib.9. pr.16. 416

30 Reperire duas rationales potentia tantùm commenſurabiles huiuſmodi, vt maior ex illis poſſit plus quàm minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. lib.9. pr.17. 417

31 Reperire duas lineas mediales potentia tantùm commenſurabiles rationalem ſuperficiem continentes, tales inquam, vt maior poſſit plus quàm minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. lib.9.pr.18. 418

32 Reperire duas lineas mediales potentia tantum commenſurabiles medialem ſuperficiem continentes, huiuſmodi vt maior plus poſſit quam minor quadrato lineę ſibi commenſurabilis longitudine. lib.9.pr.18. 418

33 Reperire duas rectas potentia incommenſurabiles, quarum quadrata ſimul addita faciant ſuperficiem rationalem, parallelogrammum verò ex ipſis contentum ſit mediale. lib.9. pr. 19. 420

34 Reperire lineas duas rectas potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitū ex ipſarum quadratis mediale, parallelogrammum verò ex ipſis contentum rationale. lib.9. pr.20. 421

35 Reperire duas lineas rectas potentia incommenſurabiles, conficientes id quod ex ipſarum quadratis componitur mediale, ſimulque parallelogrammum ex ipſis contentum, mediale, quod præterea parallelogrammum ſit incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. lib.9. pr. 20. 421

36 Si duæ rationales potentia tantùm con-

commenſurabiles componantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium. lib.9. pr. 21. 422

37 Si duæ mediales potentiâ tantùm commenſurabiles rationale continentes componantur, tota linea eſt irrationalis. vocetur autem Bimediale prius. lib.9. pr. 22. 423

38 Si duæ mediales potentia tantùm commenſurabiles mediale continentes componantur, tota linea eſt irrationalis. vocetur autem Bimediale ſecundum. lib. 9. prop.23. 425

39 Si duæ rectę potentia incommenſurabiles componantur, cōficientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrammum verò ex ipſis contentum mediale, tota linea recta eſt irrationalis. Vocetur autem linea maior. lib.9. prop. 24. 427

40 Si duę rectæ potentia incommenſurabiles componantur, conficientes cōpoſitum ex ipſarum quadratis mediale, id verò quod fit ex ipſis, rationale, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale. lib. 9. prop.25. 428

41 Si duę rectę potentia incommenſurabiles componantur, conficientes cōpoſitum ex quadratis ipſarum mediale, & quod continetur ex ipſis, mediale, & pręterea incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia. lib. 9. prop.26. 428

42 Binomium in vnico tantùm puncto diuiditur in ſua nomina, ideſt in lineas ex quibus componitur. lib.9.prop.27. 429

43 Bimediale prius in vnico tantùm puncto diuiditur in ſua nomina. lib.9. prop. 27. 429

44 Bimediale ſecundum in vnico tantùm puncto diuiditur in ſua nomina. lib.9. prop.27. 429

45 Linea maior in vnico tantùm puncto diuiditur in ſua nomina. lib.9. pr. 27. 429

46 Linea potens rationale & mediale in vnico tantùm puncto diuiditur in ſua nomina. lib. 9. prop. 27. 429

47 Linea potens duo medialia in vnico tantùm puncto diuiditur in ſua nomina. lib.9.27. 429

48 Reperire Binomium primum. lib.9. prop.28. 431

49 Reperire Binomium ſecundum. lib. 9. prop.29. 432

50 Reperire Binomium tertium. lib.9. prop.30. 433

51 Reperire Binomium quartum. lib. 9. prop.31. 434

52 Reperire Binomium quintum. lib.9. prop.32. 435

53 Reperire Binomium ſextum. lib.9. prop.33. 435

54 Si ſuperficies contenta fuerit ex rationali & Binomio primo, linea, quę illam ſuperficiem poteſt, eſt irrationalis, quæ Binomium vocatur. lib.9. pr.35. 438

55 Si ſuperficies contenta fuerit ex linea rationali & Binomio ſecundo, linea potens illam ſuperficiem eſt irrationalis, quæ Bimediale primum vocatur. lib.9. prop.35. 438

56 Si ſuperficies contineatur ex rationali & Binomio tertio, linea quę illam ſuperficiem poteſt, eſt irrationalis, quę dicitur Bimediale ſecundum. lib.9.prop.35. 438

57 Si

57 *Si ſuperficies contineatur ex rationali & Binomio quarto, linea potens ſuperficiem illam, eſt irrationalis, quę dicitur maior. lib.9. pr.35.* 438

58 *Si ſuperficies contineatur ex rationali & Binomio quinto, linea quę illam ſuperficiem poteſt, eſt irrationalis, quę dicitur potens rationale & mediale. lib.9. prop.35.* 438

59 *Si ſuperficies contineatur ex rationali & Binomio ſexto, linea quę illam ſuperficiem poteſt, eſt irrationalis, quę dicitur potens duo medialia. lib. 9.prop.35.* 438

60 *Quadratum Binomij ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus Binomium primum. lib. 9. prop.36.* 442

61 *Quadratum Bimedialis primi ſecundum rationalem lineam applicatum, facit alterum latus Binomium ſecundum. lib.9.prop.36.* 442

62 *Quadratum Bimedialis ſecundi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus Binomium tertium. lib. 9. prop.36.* 442

63 *Quadratum lineæ maioris ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus Binomium quartum. lib.9.prop.36.* 442

64 *Quadratum lineę potentis rationale & mediale ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus Binomium quintum. lib.9.prop.36.* 442

65 *Quadratum lineę potentis duo medialia ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus Binomium ſextum. lib. 9. prop.36.* 442

66 *Linea longitudine commenſurabilis Binomio, eſt & ipſa Binomium eiuſdem ordinis. lib.9.prop.34.* 436

67 *Linea longitudine commenſurabilis alteri bimedialium eſt, & ipſa bimediale etiam eiuſdem ordinis. lib.9.pro. 34.* 436

68 *Linea commenſurabilis lineę maiori, eſt & ipſa maior. lib.9.pr.34.* 436

69 *Linea commenſurabilis lineæ potenti rationale & mediale, eſt & ipſa linea potens rationale & mediale. lib. 9. prop.34.* 436

70 *Linea commenſurabilis lineę potenti duo medialia, eſt & ipſa linea potens duo medialia. lib. 9. prop. 34.* 436

71 *Si duę ſuperficies rationalis & medialis ſimul componantur, linea quæ totam ſuperficiem compoſitam poteſt, eſt vna ex quatuor irrationalibus, vel ea quę dicitur Binomium vel bimediale primum, vel linea maior, vel linea potens rationale & mediale. lib.9.pr. 37.* 445

72 *Si duæ ſuperficies mediales incommenſurabiles ſimul componatur, fiunt reliquę duę lineæ irrationales, vel bimediale ſecundum, vel linea potens duo medialia. lib.9. pr.38.* 446

73 *Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantùm commenſurabilis ipſi toti, reſidua eſt irrationalis. vocetur autem Reſiduum. lib. 9. prop.21.* 422

74 *Si de linea mediali detrahatur medialis potentia tantùm commenſurabilis toti lineę, quæ verò detracta eſt cum tota contineat ſuperficiem rationalem, reſidua eſt irrationalis. Vocetur autem Reſiduum mediale primum. lib.9. prop. 22.* 423

75 *Si de linea mediali detrahatur medialis potentia tantùm commenſura-*

bilis

bilis toti, quę verò detracta eſt, cum tota contineat ſuperficiem medialem, reliqua eſt irrationalis. Vocetur autem reſiduum mediale ſecundum. lib. 9. prop. 23. 425

76 *Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti, compoſitum autem ex quadratis totius lineę & lineę detractę ſit rationale, parallelogrammum verò ex iiſdem contentum ſit mediale, reliqua linea erit irrationalis. Vocetur autem linea minor. lib. 9. prop. 24.* 427

77 *Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti lineę, compoſitum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ ſit mediale, parallelogrammum verò bis ex eiſdem contentum ſit rationale, reliqua linea eſt irrationalis. Vocetur autem linea faciens cum ſuperficie rationali totam ſuperficiem medialem. lib. 9. prop. 25.* 428

78 *Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti lineę, compoſitum autem ex quadratis totius & lineę detractæ ſit mediale, parallelogrammum verò bis ex iiſdem ſit etiam mediale: præterea ſint quadrata ipſarum incommenſurabilia parallelogrammo bis ex iiſdem contento, reliqua linea eſt irrationalis. Vocetur autem linea faciens cum ſuperficie mediali totam ſuperficiem medialem. lib. 9. prop. 26.* 428

79 *Reſiduo vnica tantùm linea recta coniungitur rationalis, potentia tantùm commenſurabilis toti lineę. lib. 9. prop. 27.* 429

80 *Reſiduo mediali primo vnica tantùm linea coniungitur medialis, potentia tantùm commenſurabilis toti, ipſa cum tota continens rationale. lib. 9. prop. 27.* 429

81 *Reſiduo mediali ſecundo vnica tantùm coniungitur medialis, potentia tantùm cõmenſurabilis toti, ipſa cum tota continens mediale. lib. 9. prop. 27.* 429

82 *Lineę minori vnica tantùm recta coniungitur potentia incommenſurabilis toti, faciens cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, id verò parallelogrammum, quod bis ex ipſis fit, mediale. lib. 9. prop. 27.* 429

83 *Lineę facienti cum ſuperficie rationali totam ſuperficiem medialem, vnica tantùm coniungitur linea recta potentia incommenſurabilis toti, faciens autem cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id verò quod fit bis ex ipſis, rationale. lib. 9. prop. 27.* 429

84 *Lineę cum mediali ſuperficie facienti totam ſuperficiem medialem, vnica tantùm coniungitur linea potẽtia toti incommenſurabilis, faciens cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id verò quod fit bis ex ipſis etiam mediale, & præterea faciens compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei quod fit bis ex ipſis. lib. 9. prop. 27.* 429

85 *Reperire primum Reſiduum. lib. 9. pr. 28.* 431

86 *Reperire ſecundum Reſiduum. lib. 9. pr. 29.* 432

87 *Reperire tertium Reſiduum. lib. 9. pr. 30.* 433

88 *Reperire quartum Reſiduum. lib. 9. pr. 31.* 434

89 *Reperire quintum Reſiduum. lib. 9. prop.*

prop.32. 435

90 *Reperire ſextum Reſiduum. lib. 9. prop. 33.* 435

91 *Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo primo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum: lib.9. pr.35* 438

92 *Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo ſecundo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum mediale primum. lib. 9. pr.35.* 438

93 *Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo tertio, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum mediale ſecundum. lib.9.pr.35.* 438

94 *Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo quarto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt linea minor. lib.9.pr.35.* 438

95 *Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo quinto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt ea quæ dicitur cum rationali ſuperficie faciens totam medialem. lib.9. pr.35.* 438

96 *Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo ſexto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt ea quę dicitur faciens cum mediali ſuperficie totam medialem. lib.9. pr.35.* 438

97 *Quadratum reſidui ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus Reſiduum primum. lib. 9. prop. 36.* 442

98 *Quadratum reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus Reſiduum ſecundum. lib. 9. pr. 36.* 442

99 *Quadratum reſidui medialis ſecundi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus Reſiduum tertium. lib.9. prop. 36.* 442

100 *Quadratum lineæ minoris ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quartum. lib.9. pr.36.* 442

101 *Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum. lib. 9. pr.36.* 442

102 *Quadratum lineę cum mediali ſuperficie facientis totam medialem, ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus, reſiduum ſextum. lib. 9. pr.36.* 442

103 *Lineæ reſiduo commenſurabilis longitudine, eſt & ipſa reſiduum, & eiuſdem ordinis. lib.9. pr.34.* 436

104 *Linea commenſurabilis reſiduo mediali, eſt & ipſa reſiduum mediale, & eiuſdem ordinis. lib. 9. prop. 34.* 436

105 *Linea commenſurabilis lineę minori, eſt & ipſa linea minor. lib.9. prop. 34.* 436

106 *Linea commenſurabilis lineę cum rationali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem. lib.9. pr.34.* 436

107 *Linea commenſurabilis lineę cum mediali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa cum mediali ſuperficie faciens totam medialem. lib. 9. pr.34.* 436

108 *Si de ſuperficie rationali detrahatur ſuperficies medialis, linea quę reliquam ſuperficiem poteſt, eſt alterutra ex duabus irrationalibus, aut Reſiduum, aut linea minor. lib. 9. pr. 37.* 445

109 *Si de ſuperficie mediali detrahatur ſuperficies rationalis, alię duę irrationales*

naleſ fiunt; aut Reſiduum mediale primum, aut cum rationali ſuperficie faciens totam medialem. lib.9. prop. 37. 445

110 Si de ſuperficie mediali detrahatur ſuperficies medialis quę ſit incommēſurabilis toti, reliquę duę fiunt irrationales, aut reſiduum mediale ſecundum, aut cum mediali ſuperficie faciens totam medialem. lib. 9. prop. 38. 446

111 Linea quę Reſiduum dicitur, non eſt eadem cum ea quę dicitur Binomium. lib.9. prop. 39. 447

112 Quadratum lineę rationalis ſecundum Binomium applicatum, facit alterum latus reſiduum, cuius nomina ſunt commenſurabilia Binomij nominibus, & in eadem proportione: prętérea id quod fit Reſiduum, eundem ordinem retinet quem Binomium. lib.9. prop. 40. 449

113 Quadratum lineę rationalis ſecundum reſiduum applicatum, facit alterum latus Binomium, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus reſidui & in eadem proportione; prętérea id quod fit Binomium eſt eiuſdem ordinis, cuius & reſiduum. lib.9. prop. 40. 449

114 Si parallelogrammum contineatur ex reſiduo & Binomio, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus reſidui & in eadem proportione, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt rationalis. lib.9. pr.41. 451

115 Ex linea mediali naſcuntur lineę irrationales innumerabiles, quarum nulla vlli antè dictarum eadem ſit. lib.9 prop. 42. 452

116 Propoſitum nobis eſto demonſtrare in figuris quadratis diametrum eſſe longitudine incommenſurabilem ipſi lateri lib.2. prop. 29. 103

LIB. XI.

1 Quædam rectæ lineæ pars in ſubiecto quidem non eſt plano, quædam verò in ſublimi. lib.6. axioma 4. 250

2 Si duæ rectę lineæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano: atque triangulum omne in vno eſt plano. lib. 6. axio. 5. 250

3 Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio eſt recta linea. lib. 6. pr.1. 251

4 Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuò ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. lib.6. pr.2. 251

5 Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuò tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illę tres rectę in vno ſunt plano. lib.6. prop.3. 253

6 Si duę rectę lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, parallelę erunt illæ rectæ lineæ. lib.6. pr.5. 254

7 Si duę ſint parallelę rectę lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta, illa linea quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. lib.6. cor. prop. 4. 254

8 Si duę ſint parallelę rectæ lineę, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. lib. 6. propoſ. 4. 253

9 Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano, hę quoque ſunt inter ſe parallelæ. lib. 6. pr. 7. 256

10 *Si duę rectæ lineę ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano, illę angulos ęquales comprehendent. li b.6.pr.10.* 259

11 *A dato ſublimi puncto, in ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. lib.6.pr.6.* 256

12 *Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare. lib.6. pr.6.* 256

13 *Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineę ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. lib.6. cor.1.pr.5.* 255

14 *Ad quę plana, eadem recta linea recta eſt, illa ſunt parallela.lib.6.cor.2.pr.9.* 259

15 *Si duæ rectæ lineę ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelę, non in eodem conſiſtentes plano parallela ſunt quæ per illas ducuntur plana. lib.6. pr.10.* 259

16 *Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur, communes illorum ſectiones ſunt parallelę. lib.6. cor.1.pr.9.* 259

17 *Si duę rectę lineę parallelis planis ſecentur, in eaſdem rationes ſecabuntur.lib.6.pr.11.* 261

18 *Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, illa etiam omnia quæ per ipſam plana, ad rectos eidem plano angulos erunt. lib.6.pr.4.* 253

19 *Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. lib. 6. pr. 8.* 257

20 *Si angulus ſolidus planis tribus angulis contineatur, ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores. lib. 6.pr.12.* 262

21 *Solidus omnis angulus minoribus continetur, quam rectis quatuor angulis planis. lib.6. pr.13.* 262

22 *Si plani tres anguli æqualibus rectis contineantur lineis, quorum duo vt libet aſſumpti tertio ſint maiores, triangulum conſtitui poteſt ex lineis ęquales illas rectas coniungentibus. ex lib.6. pr.14.* 263

23 *Ex planis tribus angulis, quorum duo vt libet aſſumpti tertio ſint maiores, ſolidum angulum conſtituere. Decet autē illos tres angulos rectis quatuor eſſe minores. lib.6. pr.14.* 263

24 *Si ſolidum parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana & ęqualia ſunt & parallelogramma.lib.6.pr. 17.* 271

25 *Si ſolidum parallelis planis contentum plano ſecetur aduerſis planis parallelo, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. lib. 6.pr.30.* 291

26 *Ad datam rectam lineam eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem. lib. 6. cor.pr.14.* 265

27 *A data recta, dato ſolido parallelis planis comprehenſo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelis planis contentum deſcribere. ex lib. 6. cor. pr.14.& ex pr.18.*

28 *Si ſolidum parallelis planis comprehenſum, ducto per aduerſorum planorum diagonios plano ſectum ſit, illud ſolidum ab hoc plano bifariam ſecabitur. lib.6.cor.1. pr.29.* 291

29 *Solida parallelis planis comprehenſa, quæ ſuper eandem baſim, & in*

eadem

eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. lib.6.cor.1.pr.29. 291

30 *Solida parallelis planis circunſcripta, quę ſuper eandem baſin & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineę non in iiſdem reperiuntur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. lib.6.cor.1.pr.29.* 291

31 *Solida parallelis planis circunſcripta, quę, in eadem ſunt altitudine, ęqualia ſunt inter ſe. lib.6.cor.1. prop. 29.* 291

32 *Solida parallelis planis circunſcripta quę eiuſdem ſunt altitudinis, eam habent inter ſe rationem, quam baſes. lib.6.cor.pr.31.* 294

33 *Similia ſolida parallelis planis circunſcripta, habent inter ſe rationem homologorum laterum triplicatam. lib.6.pr.37.* 302

34 *Æqualium ſolidorum parallelis planis contentorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et ſolida parallelis planis contenta, quorum baſes cum altitudinibus reciprocantur, illa ſunt æqualia. lib.6.pr.32.* 294

35 *Si duo plani ſint anguli ęquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineę inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineant æquales, vtrunque vtrique, in ſublimibus autem lineis qualibet ſumpta ſint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ ſint perpendiculares, ab earum verò punctis, quæ in planis ſignata fuerint, ad angulos primùm poſitos adiunctę ſint rectę lineę, hę cum ſublimibus ęquales angulos comprehendent. lib.6. prop.15.* 265

36 *Si rectę tres lineę ſint proportionales, quod ex his tribus fit ſolidum parallelis planis contentum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelis planis comprehenſo, quod æquilaterum quidem ſit, ſed antedicto æquiangulum. lib.6. pr.33.* 295

37 *Si rectę quatuor lineę ſint proportionales, illa quoque ſolida parallelis planis contenta, quę ab ipſis lineis & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelis planis comprehenſa, quę & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, ſint proportionalia, illę quoque rectę lineæ portionales erunt. ex lib. 6. pr.37. & ex lib.3.pr.19.*

38 *Si planum ad planum rectum ſit, & à quodam puncto eorum quæ in vno ſunt planorum perpendicularis ad alterum ducta ſit, illa quę ducitur perpendicularis, in communem cadet planorum ſectionē. lib.6.cor.2. pr.5.* 255

39 *Si in ſolido parallelis planis circunſcripto, aduerſorum planorum lateribus bifariam ſectis, educta ſint per ſectiones plana, communis illa planorum ſectio, & ſolidi parallelis plani circunſcripti diameter, ſe mutuò bifariam ſecant. ex lib.6. cor.1. prop.29.* 291

40 *Si duo ſint ęqualis altitudinis priſmata, quorum hoc quidem baſim habeat parallelogrammum, illud verò triangulum, ſit autem parallelogrammum trianguli duplum, illa priſmata erunt ęqualia. lib.6. ſch.pr. 28.* 289

LIB. XII.

1 *Similia quæ ſunt in circulis polygona, rationem habent inter ſe quam*

deſcripta à diametris quadrata, lib. 5. prop. 10. 213
2 Circuli eam inter ſe rationem habent, quam deſcripta à diametris quadrata. lib. 5. pr. 12. 217
3 Omnis pyramis trigonam habens baſim, in duas diuiditur pyramidas non tantùm ęquales & ſimiles inter ſe, ſed toti etiam pyramidi ſimiles, quarum trigonæ ſunt baſes, atque in duo priſmata ęqualia, quę duo priſmata dimidio pyramidis totius ſunt maiora. lemma omiſſum.
4 Si duę eiuſdem altitudinis pyramides trigonas habeant baſes, ſit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramidas inter ſe ęquales totique ſimiles, & in duo priſmata ęqualia, ac codem modo diuidatur vtraque pyramidum quę ex ſuperiore diuiſione natę ſunt, idque perpetuò fiat: quemadmodum ſe habet vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia quę in vna pyramide priſmata, ad omnia quę in altera pyramide priſmata, multitudine ęqualia. lemma omiſſum.
5 Pyramides eiuſdem altitudinis, quarum trigonę ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent quam ipſę baſes. lib. 6. pr. 25. 283
6 Pyramides eiuſdem altitudinis, quarum polygonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent quam ipſę baſes. lib. 6. pr. 25. 283
7 Omne priſma trigonam habens baſim, diuiditur in tres pyramidas inter ſe ęquales, quarum trigonę ſunt baſes. lib. 6. pr. 28. 287
8 Similes pyramides, quæ trigonas habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione. lib. 6. pr. 37. 302
9 Æqualium pyramidum & trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus. Et quarum pyramidum trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus, illæ ſunt ęquales. lib. 6. prop. 32. 294
10 Omnis conus tertia pars eſt Cylindri eandem cum ipſo cono baſim habentis, & altitudinem ęqualem. lib. 6. pr. 29. 289
11 Coni & cylindri eiuſdem altitudinis, eam inter ſe rationem habent quã baſes. lib. 6. pr. 27. 286
12 Similes coni & cylindri, triplicatam habent inter ſe rationem diametrorum quæ ſunt in baſibus. lib. 6. pr. 37. 302
13 Si cylindrus plano ſectus ſit aduerſis planis parallelo, erit quemadmodum cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. lib. 6. pr. 30. 291
14 Coni & cylindri qui in ęqualibus ſunt baſibus, eam habent inter ſe rationem, quam altitudines. lib. 6. pr. 30. 291
15 Æqualium conorum & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et quorum conorum & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur illi ſunt ęquales. lib. 6. pr. 32. 294
16 Duobus circulis circum idem centrum conſiſtentibus, in maiore circulo polygonum ęqualium pariumque laterum inſcribere, quod minorem circulum non tangat. lemma omiſſum.
17 Duabus ſphęris circum idem centrum conſiſtentibus, in maiore ſphęra ſolidum polyedrum inſcribere, quod minoris

minoris ſphærę ſuperficiem non tangat. lemma omiſſum.

18 *Sphęrę inter ſe rationem habent ſuarum diametrorum triplicatam. lib. 6. pr. 37.* 302

LIB. XIII.

1 *Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, maius ſegmentum quod totius lineę dimidium aſſumpſerit, quintuplum poteſt eius quadrati, quod à totius dimidia deſcribitur. lib. 5. pr. 27.* 237

2 *Si recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum poſſit, & dupla ſegmenti huius linea per extremam & mediam rationem ſecetur, maius ſegmentum reliqua pars eſt lineę primùm poſitæ. lib. 5. pr. 27.* 237

3 *Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, minus ſegmentum quod maioris ſegmenti dimidium aſſumpſerit, quintuplum poteſt eius, quod à maioris ſegmenti dimidio deſcribitur, quadrati. lib. 5. prop. 26.* 236

4 *Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, quod à tota, quodque à minore ſegmento ſimul vtraq; quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. lib. 5. pr. 24.* 234

5 *Si ad rectam lineam, quę per extremam & mediam rationem ſecetur, adiuncta ſit altera ſegmento maiori ęqualis, tota hęc linea recta per extremam & mediam rationem ſecta eſt, eſtq; maius ſegmentum linea primùm poſita. lib. 4. cor. pr. 26.* 197

6 *Si recta linea rationalis, per extremam & mediam rationem ſecta ſit, vtrunque ſegmentorum irrationalis eſt linea, quę dicitur Reſiduum. lib. 9. pr. 43.* 453

7 *Si pentagoni ęquilateri tres ſint æquales anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſequuntur, illud pentagonum erit ęquiangulum. ex lib. 5. ſch. prop. 7.* 209

8 *Si pentagoni ęquilateri & æquianguli duos qui deinceps ſequuntur angulos rectę ſubtendant lineę, illæ per extremam & mediam rationem ſe mutuò ſecant, earumque maiora ſegmenta, ipſius pentagoni lateri ſunt ęqualia. lib. 5. prop. 7.* 208

9 *Si latus hexagoni & latus decagoni eidem circulo inſcriptorum compoſita ſint, tota recta linea per extremam & mediam rationem ſecta eſt, eiuſque ſegmentum maius, eſt hexagoni latus. lib. 5. prop. 8.* 210

10 *Si circulo pentagonum ęquilaterum inſcriptum ſit, pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum. lib. 5. pr. 32.* 245

11 *Si in circulo Rationalem habente diametrum, inſcriptum ſit pentagonum ęquilaterum, pentagoni latus irrationalis eſt linea, quę vocatur Minor. lib. 9. pr. 44.* 454

12 *Si in circulo inſcriptum ſit triangulum ęquilaterum, huius trianguli latus potentia triplum eſt eius lineæ, quę ex circuli centro ducitur. lib. 5. pr. 30.* 242

13 *Pyramidem conſtituere, & data ſphęra complecti, atque docere illius ſphęrę diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis. lib. 7. pr. 1.* 306

14 Octae-

14 *Octaedrum conſtituere, eaque ſphęra qua pyramidem complecti, atque probare illius ſphærę diametrum potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri. lib.7.pr.2.* 308

15 *Cubum conſtituere, eaque ſphæra qua & ſuperiores figuras complecti, atque docere illius ſphęrę diametrum potentia triplam eſſe lateris ipſius cubi. lib.7. pr.3.* 310

16 *Icoſaedrum conſtituere, eademque ſpæra qua & antedictas figuras complecti, atque probare icoſaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ vocatur Minor. lib.7.pr.4.* 312
& lib.9.pr.45. 455

17 *Dodecaedrum conſtituere, eademque ſphęra qua & antedictas figuras complecti, atque probare dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quę vocatur Reſiduum. lib.7.pr.5.* 315

18 *Quinque figurarum latera proponere, & inter ſe comparare. lib.7. pr.7.* 321. *& lib.9.pr.45.* 455

LIB. XIV.

1 *Perpendicularis linea, quæ ex circuli cuiuſpiam centro in latus pentagoni ipſi circulo inſcripti ducitur, dimidia eſt vtriuſq; ſimul lineæ, & eius quæ ex centro, & lateris decagoni in eodem circulo inſcripti. lēma omiſſum.*

2 *Idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum, eidem ſphęrę inſcriptorum. lib.7. cor. 1. pr. 8.* 325

3 *Si pentagono & æquilatero & ęquiangulo circunſcriptus ſit circulus, ex cuius centro in vnum pentagoni latus ducta ſit perpendicularis: quod vno laterum & perpendiculari trigeſies continetur, illud ęquale eſt dodecaedri ſuperficiei. lib.7. pr.9.* 326

4 *Hoc perſpicuum cùm ſit, probandum eſt, quemadmodum ſe habet dodecaedri ſuperficies ad icoſaedri ſuperficiem, ita ſe habere cubi latus ad icoſaedri latus. lib.7. pr.9.* 326

LIB. XV.

1 *In dato circulo pyramidem inſcribere. omiſſa.*

2 *In data pyramide octaedrum inſcribere. omiſſa.*

3 *In dato cubo octaedrum inſcribere. omiſſa.*

4 *In dato octaedro cubum inſcribere. omiſſa.*

5 *In dato Icoſaedro dodecaedrum inſcribere. omiſſa.*

Finis elementorum Euclidis, ex traductione St. Gracilis.

Imprimatur ſi ita videbitur Reuerendiſs. Patri Inquiſitori Piſarum.

Ab. Ioannes Pinoc. Vic. Gen.

Videat, & referat Adm. R. P. Magiſter Hieronymus Peri de Burgo S.Laurentij Theologus publicus Piſarum hac die 11. Decemb. 1657.

Fr. Hieronymus de Lugo Inquiſitor Piſarum.

Iuſſu Reuerendiſſimi Patris Magiſtri Hieronymi Baroni de Lugo ordinis Minorum Conu. Inquiſitoris Generalis Piſarum, Vidi librum inſcriptum. Euclides Reſtitutus. Auctore Perilluſtri, & Excellentiſſimo D. Io: Alphonſo Borellio, in Meſſanenſi pridem, nunc verò in Piſano Gymnaſio Matheſeos Profeſſore. In quo nedùm Euclidem Reſtitutum, & elegantius reformatum, verùm etiam Archimedem è Siciliæ oris denuò erumpentem ſuſpicatus ſum. Rediuiuo perennitatem auguror. Cùmque in ſuis demonſtrationibus nihil fidei, moribuſque aduerſum indigitet, digniſſimum, qui prælo detur exiſtimo.

F. Hieronymus Peri Ordinis Minorum Conu. in Vniuerſitate Piſana S. Theologiæ Profeſſor, & Sanctiſs. Inquiſitionis Conſultor.

Stante prędicta atteſtatione Imprimatur.

F. Hieronymus de Lugo Inquiſitor Generalis Piſarum.

Alexander Victorius Senator Ser. M. Ducis Aud.

EVCLIDIS RESTITVTI

A IOAN. ALPHONSO BORELLIO.

Liber I.

PROOEMIVM.

GEOMETRIA precipua, inter diſciplinas mathematicas, magnitudines conſiderat; atq; vniuerſa ſpeculatio ſcientifica, quę de tali ſubiecto fieri poteſt, verſatur, aut in cõtemplatione rationis ſtructuræ, qua magnitudines formatę ſunt; aut in cõtemplatione proprietatum eſſentialium, & paſſionũ earundem magnitudinum. Cumq; aliquę magnitudinum ſtructuræ, atque paſſiones, ſint adeò faciles, & euidentes, vt nedum nullam prorſus laborioſam inquiſitionem requirant; ſed nemo ſanæ mentis eis aſſenſum negabit: aliæ verò ſint adeò reconditæ, & difficiles, vt nullo pacto concedi poſſint: ſitque innata nobis via à notioribus ad ignota procedendi (cùm omnis doctrina intellectiua ex præexiſtenti, ſeu anticipatá cognitione fiat): debent euidentes conſtructiones, & paſſiones magnitudinum, aſſumi vt principia, ex quibus ſcientificè diſcurrendo aliæ abſtruſæ, & difficiles conſtructiones, & paſſiones venentur.

Attamen, ſiue faciles, ſiue difficiles ſint huiuſmodi contemplationes, ſemper nuncupari conſueuerunt propoſitio-

nes; eo quod in qualibet earum aliquid contemplandum proponitur intellectui.

Patet ergo principia Geometriæ eſſe propoſitiones, exponentes facilem rationem ſtructuræ, qua magnitudines formantur; aut facilem, & euidentem proprietatem, vel paſſionem earundem magnitudinum.

Et quoniam ſæpenumero magnitudines, habentes euidentiſſimam conſtructionem, aut paſſionem, non habent proprium nomen; aut habent nomina æquiuoca, ſeu diuerſas ſignificantia: propterea, vt quælibet magnitudo diſtinguatur à qualibet alia, nomen ipſi imponi debet, aut exponi germana nominis ſignificatio. Quapropter principiorum Geometriæ tria genera erunt.

Primum, in quo declaratur, ſeu imponitur nomen alicuius magnitudinis, habentis euidentem conſtructionem, aut manifeſtam paſſionem: Et vocatur Definitio.

Secundum, in quo magnitudinis, cuius nomen impoſitum, & vſu receptum eſt, exponitur aliqua euidens eius conſtructio: Et vocatur Petitio.

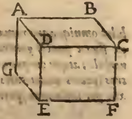
Tertium, in quo magnitudinis, iam nominatæ, exponitur euidens eius proprietas; aut aliqua manifeſta eius paſſio; & vocatur Dignitas, vel Axioma, aut Pronunciatum, ſiue communis notitia.

Et quoniam huiuſmodi principia demonſtrari nequeunt, cùm ſint notiſſima; propterea tantummodo eorum catalogus in veſtibulo huius ſcientiæ apponetur; vt poſtea, demonſtratiuè ſyllogizzando, ex eis deducantur veritates aliarum propoſitionum reconditarum; quæ pariter ſubdiuiduntur. Propoſitio itaque difficilis, in qua contemplatur ratio ſtructuræ, qua magnitudo aliqua formatur, vocabitur Problema: Illa verò propoſitio abſtruſa, in qua contemplatur proprietas, vel paſſio aliqua magnitudinis, vocatur Theorema.

I.

CORPORIS extremitates, nullam profunditatem habentes: vocentur Superficies.

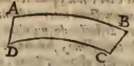
Quoniam magnitudo ſpecies eſt quantitatis continuæ, cuius proprium eſt diuidi ſemper poſſe, augeri, multiplicarique; eſtque corpus magnitudo quædam, quæ terminos, atque extremitates habet: iam termini extremi, latitudine ſua corpus comprehendentes, à quibus per intellectum omnino profunditas excluditur (qui termini aliquid ſunt, non autem nihil, cùm exiſtant in natura, & menſurari poſſint, diuidi, & augeri): vocantur Superficies. Vt corporis A B C D E F G extrema pleura, ſiue apparentia A B C D, à qua terminatur corpus, excluſa omni profunditate, ita vt indiuiſibilis remaneat, quoad profunditatem, licet, quoad longitudinem, & latitudinem, diuidi ſemper poſſit: vocatur ſuperficies, ſicuti etiam ſuperficies erit A G E D, &c.



II.

SVPERFICIEI extremitates, nullam latitudinem habentes: vocentur Lineæ.

Similiter ſuperficiei, latitudinem habentis, termini extremi, comprehendentes longitudine ſua dictam ſuperficiem; ſi ab eis per intellectum omnis latitudo tollatur: vocantur lineæ; qui ſanè termini determinatum ſitum in mundi ſpatio occupant. in reuolutione enim cuiuslibet corporis in ſeipſum, aut circa ſuum extremum, manifeſtè aliquid in eo aſſignari poteſt quieſcens, diſtinctum, & ſeparatum à reliquis partibus translatis; quod verò quieſcit, corpus non eſt, cùm vniuerſum corpus transferri ſupponatur. Igitur erit linea, ſeu ſimplex longitudo. Vt ſuperficiei A B C D extremus terminus A B, vel B C, aut C D, ſiue D A, à quo terminatur ſuperficies, excluſa totaliter latitudine, ita vt indiuiſibilis remaneat, quoad latitudinem, & profunditatem, licet quoad longitudinem tantummodo diuidi poſſit: vocatur linea.



III.

LINEAE extremitates, nullam longitudinem habentes, vocentur Puncta.

Pari modo lineæ, longitudinem tantummodo habentis, termini extremi, determinantes menſuram longitudinis ipſius; ſi ab eis per intellectum omnis longitudo tollatur: prædicti termini, qui non ſunt nihil, cùm ſint ſigna, poſitionem in mundi ſpatio habentia: Vocantur puncta. Vt lineæ A B extremi termini A, & B, à quibus menſura longitudinis ipſius lineæ A B determinatur, ablata totaliter longitudine, ita vt induiſibiles omniquaque remaneant: Vocantur puncta. Patet ergo quod linea ex fluxu puncti generari poteſt; ſuperficies verò ex fluxu lineæ tranſuerſali; atque corpus ex fluxu ſuperficiei tranſuerſali gigni poteſt. Quæ tres ſpecies quantitatis continuæ poſſunt concipi infinitæ; ſi nimirum fluxus per infinitum ſpatium continuari intelligatur.



IV.

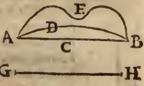
LINEAM autem omnium breuiſſimam earum, quę à puncto ad punctum extendi poſſunt, Rectam voco.

Hæc eſt definitio rectæ lineæ Archimedea; Euclides autem ait: Recta linea eſt, quæ ex ęquo ſua interiacet puncta. *Valde laborant Interpretes in expoſitione huius definitionis. Proclus putat tunc lineam ex ęquo inter ſua puncta interiacere; quando ſpatium, ſeu interuallum inter duo puncta eius extrema, æquale eſt ipſimet lineæ. hæc quidem expoſitio valde abſtruſa videtur, eo quod ignoratur quęnam ſit vera diſtantia inter duo puncta; imo ignoratur quidnam ipſa diſtantia ſit. non enim proprietas, à qua diſtantia deſignatur, expoſita fuit ab Euclide. Clauius poſtea aliter definitionem exponit. Inquit enim rectam lineam eſſe eam, quæ ęqualiter inter ſua puncta extenditur; hoc eſt in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel ad latera deflectendo ſubſultat; in qua denique nihil flexuoſum eſt, veluti in filo tenuiſſimo, ſumma vi extenſo, omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent ſitum, neque vlla eſt alia ſublimior, aut humilior; ſed omnes æquabiliter progrediuntur, inter extremos ſuos fines diſpoſitæ. Hęc tamen expoſitio etiam obſcura videtur; eo quod æquabilitas diſpoſitionis par-*

Lib. 1. cap. 11.

in lib. 1. Eucl. Def. 4.

partium in linea, denotat terminum alium relatiuum, reſpectu cuius, partes ipſæ æqualibiter diſpoſitæ ſunt; & omnia illa vocabula ſupponunt lineam rectam, eſſe iam cognitam. nam illud eſt flexuoſum, quod non eſt rectum. ergo malè per excluſionem inflexionis declaratur rectitudo; quandoquidem hæ duæ voces æquè ignotæ ſunt. Melius ergo Archimedes expoſuiſſe mihi videtur naturam rectæ lineæ per proprietatem notiorem, cùm dicit rectam lineam eſſe breuiſſimam ex vno in aliud punctum extenſionem. *Si enim intellectu collocentur duo puncta A, & B in ſpatio mundano, concipi poteſt vnum ipſorum fluere verſus aliud diuerſis itineribus, in quibus omnibus deſcribētur variæ, & infinitæ lineæ, ſeu longitudines A D B, A E B, & A C B; quæ quidem valde inæquales inter ſe eſſe poſſunt; & in hac multitudine infinita inæqualium linearum neceſſe eſt, vt detur breuiſſima omnium; quæ quidem vnica erit: aliàs non eſſet breuiſſima. hac inquam breuiſſima extenſio, ſeu fluxus breuiſſimus à puncto ad punctum,*



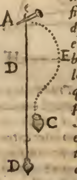
qui ponatur eſſe A C B, linea recta meritò vocari poteſt. Tradita iam clara, & intelligibili definitione lineæ rectæ, benè intelligi poteſt curuam aliquam, eoſdem terminos cum recta habentem A D B, vel A E B flexuoſum aliquid habere, & partes intermedias non iacere ex æquo inter extrema, ſiue non habere eandem æquabilitatē, facta comparatione cum linea recta, iam cognita. Erit ergo recta A B regula, ſeu trutina, qua examinari reliquæ lineæ poſſunt; & ſic cùm dubitatur an linea G H ſit recta, vel curua, fieri debet comparatio cum alia A B, quæ recta linea ex hypotheſi erat; & ſi omnia puncta ipſius G H ex æquo ſunt diſpoſita inter ſua extrema, veluti ſunt ea, quæ in propoſita recta A B, collocantur: aut ſi omnes partes lineę G H omnibus partibus lineæ rectæ A B ſimiliter congruunt: vel ſi omnia puncta ipſius G H diſtant æqualiter à linea A B: tunc puncta illius non ſubſultabunt ſurſum, aut deorſum; neque ipſa aliquid flexuoſum habebit. Quare neceſſe eſt lineam G H eſſe quoque rectam. Ex his ergo patet Euclidis definitionem vſum habere poſſe, quando comparatur aliqua linea cum recta, prius expoſita; ſed abſolutè non declarare paſſionem manifeſtam lineę rectę.

Hinc manifeſtum eſt Procli expoſitionem idem prorſus ſignificare, ac verba Archimedis ſonant. Nam inquit: Quando interuallum inter duo puncta ęquale eſt lineę, quę inter eadem duo puncta extenditur: Tunc quidem linea aſſumpta recta eſt. *Sed quia interuallum inter duo puncta eſt diſtantia breuiſſima omnium, quæ concipi poſſunt. Ergo tunc linea erit equalis interuallo inter duo puncta, quando erit æqualis diſtantiæ breuiſſimę; ſeu quando linea aſſumpta eſt eadem-*

met

met diſtantia inter duo puncta; ſiue eſt breuiſſima omnium linearum, quæ à puncto ad punctum duci poſſunt; hæc autem erat definitio Archimedis. Ergo Euclidis definitio iuxta Procli expoſitionem idem prorſus ſonat, ac illa, quę ab Archimede tradita eſt: ſed in hoc tamen deficit, quod Proclus vtitur nomine interualli ignoto, quando nondum definitio interualli tradita eſt.

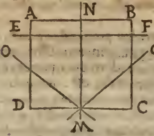
Tandem quęnam ſint lineę rectæ, & quam paſſionem habeant pluri-nis exemplis oſtendit natura ipſa. Nam radij lucidi, & viſuales, nec non motus grauium deſcendentium per rectas lineas fiunt, ideſt fluunt itinere breuiſſimo; quod quidem multis experimentis comprobari poteſt; ſed ſatis erit vnico exemplo veritatem hanc confirmare. Sit pila plumbea B alligata filo tenuiſſimo A B, atque eius extremum clauo A firmatum ſit: Tunc plumbum B liberè premendo, dum accedere contendit ad Telluris centrum, directam fili producit extenſionem, quam rectam lineam eſſe dico. Nam ſi plumbum B ſubterpoſita manu ſuſpendatur, & transferatur in locum C: Tunc quidem longitudo fili inflectetur, conſtituetque lineam A E C: eritque interuallum, ſeu diſtantia ab A puncto ad C minor, quàm longitudo ipſius fili A E C, ſeu A D B; ideoque A D B recta, & A E C curua erit. Hoc exemplum, licet ſenſibile ſit, & improprium; inſeruiet ſaltem ad tollendam difficultatem imaginationis, tum rectitudinis, tum curuitatis.



V.

SVPERFICIES, cui omni ex parte recta linea congruit: plana vocetur.

Hæc definitio Heronis clarior mihi videtur, quàm Euclidiana, quæ iiſdem difficultatibus, quibus definitio lineæ rectæ, inuoluitur. Inquit enim: Superficies plana eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas. *Melius ergo cum Herone dicemus: Si in ſuperficie A B C D, recta linea M G congruit, ideſt tota tangit ipſam ſuperficiem; & nedum in ſitu M G, ſed ſimiliter ſi transferatur in ſitum M N, & in ſitum M O, & ſic in reliquos omnes; & in quacunque applicatione congruit, ideſt præcisè tota eius lõgitudo tangit ſuperficiem A B C D: vocetur dicta ſuperficies plana.*



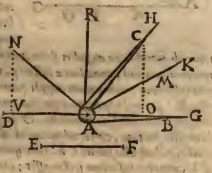
VI.

VI.

QVANTITAS inclinationis duarum rectarum linearum, in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram: vocetur angulus planus.

Ambigit Proclus in quo genere quantitatis angulus planus reponi debeat. Nam ſi eſt quantitas permanens, & continua, erit linea, aut ſuperficies. linearis quantitas eſſe non poteſt. Primò quia in ſuperficie plana non determinat, aut menſurat longitudinem ſolam, ſed ſpatium. Secundò quia vt linea diuiditur à puncto, ſic ſuperficies à linea; ſed angulus à linea diuiditur. Ergo ſuperficies eſt. lib. 2. c. 11.

Aliqui vero dixerunt angulum planum non eſſe ſuperficiem, aut lineam, ſed meram relationem. Proclus autem vtramque naturam, magnitudinis ſcilicet, & relationis in ſe habere exiſtimauit. Quæ omnia vt clarè intelligantur, exponatur in plano linea recta A B, infinitè extenſa verſus G. Iam alia linea recta quatuor modis collocari poteſt circa rectam A B. Primò ſi illam nullo modo contingat, vt E F, & tunc hæ duæ rectæ angulum conſtituere non dicuntur. Secundò ſi illam contingat, ſed ſit poſita in directum, vt D A, tangens rectam A B in

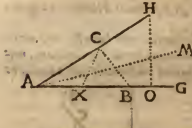


puncto A; & tunc pariter angulum non conſtituunt; ſed ſolummodo vnicam lineam rectam D A B. Tertiò ſi tota linea totam lineam contingat, vt A G, & A B non conſtituunt angulum; cùm vnicam rectam lineam componant. Quartò ſi recta linea A C contingat quidem rectam A B in puncto A tantummodo, ſed non ſit in directum poſita, vt erat D A; tunc quidem duæ rectæ B A, & C A angulum dicuntur conſtituere. Vbi notandum, quod recta A C diſtat quidem ab alia recta A B, ſed non eo modo, vt E F, prioris caſus, ab alia diſtabat; cum hæ ſint prorſus ſeparatæ, illæ verò ſe ſe contingant in puncto A. Hæc inquam diſtantia, ſeu ſeparatio non abſoluta linearum A C, & A B, ſe tangentium in puncto A, dicitur angulus.

Sed rurſus notandum eſt, vt Proclus, Carpum Antioch. redarguens, ait: dici non poſſe angulum eſſe illarum linearum diſtantiam; quia ſi concipiatur lib. 2. c. 11.

tur

tur regula A C, cum linea A C H, collocata ſuper immobilem lineam rectam A B G; & poſtea aperiatur regula transportando brachium A C, primò in ſitum A M K: Secundò in ſitum A H: Tertiò in ſitum A R: Quartò in ſitum A N efficientur quidem ſemper anguli maiores, & maiores in infinitum: & tamen diſtantię linearum ne dum nō augentur menſura, qua anguli creſcunt; ſed è contra poſſunt diſtantiæ decreſcere, cùm anguli augentur. Vt diſtantia N V rectæ A N à recta A B minor eſſe poteſt, quàm diſtantia C O inter rectas A C, & A B: Et tamen angulus N A B maior eſt, quàm angulus C A B. Rationabilius ergo dicemus anguli menſuram ſumi debere ex apertione, ſeu dilatatione totius lineæ A C ab ipſa A B. Nam in primo inſtanti, in quo punctum C ſeparatur à puncto B, tota linea A C neceſſariò ſeparatur à tota linea A B, excepto communi puncto A. Quo ergo maior fuerit hęc dilatatio, ſeu apertio, menſura anguli augebitur. Et quia magis appoſitè, & ſignificanter hęc dilatatio exprimitur per vocabulum Inclinationis, proptereà iure angulus inclinatio dicetur. Modò cùm quæritur ab antiquis an angulus ſit magnitudo? Dico non eſſe ſuperficiem: primò quia ſpatium, quod lineæ infinitę A B G, & A C H amplectuntur, erit infinitum; cùm tamen anguli quantitas, ſeu menſura inclinationis finita ſit: Secundò ſpatium infinitum non poteſt diuidi, nec augeri; & tamen inclinatio anguli diuiditur, & augetur. Tertiò licet ſpatium angulare eſſet finitum, & terminatum ab aliqua recta linea H O, ad libitum ducta, vel ab aliā curuā C B: tunc quidem, ſecto ſpatio bifariam à recta C X, angulus bifariam ſectus eſſet; quod eſt falſum. Nam ſolummodo à linea A M, per punctum A ducta, angulus diuidi poteſt; quando nimirum apertio, ſiue inclinatio linearum C A, & B A diuiditur in duas inclinationes ęquales C A M, & M A B. Patet ergo angulum ſuperficiem non eſſe; neque in genere magnitudinis contineri.



Reſtat modò, vt exponamus in quo genere quantitatis angulus reponi debeat. Dico angulum eſſe genus quantitatis continuę diuerſum à linea, ſuperficie, & corpore; ſicuti proportio duarum magnitudinum eſt quantitas diuerſa à linea, ſuperficie, corpore, & ab angulo; licet in quolibet genere quantitatis proportio reperiatur; & ſicuti proportio duorum numerorum diuiditur à numero; & proportio duarum linearum diuiditur à linea, à qua efficiuntur duę proportiones, nec propterea proportio illarum linearum erit ſuperficies: ita angulus planus diuidi poterit à linea, nec propterea erit ſuperficies, ſed erit inclinatio diuiſa in duas inclinationes.

VII.

VII.

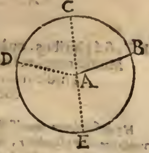
SVPERFICIES plana ſub vno, vel aliquibus terminis comprehenſa, Figura vocetur.

Poteſt ab vnico termino ſuperficies plana claudi: quando nimirum ab aliqua linea curua, in ſe ipſam reflexa, terminatur, vt patet in figura A: Si verò à pluribus lineis ſpatium circumſcribatur, vt patet in B: dicetur hæc figura à pluribus terminis comprehenſa.



VIII.

FIGVRA, quæ deſcribitur ex reuolutione rectæ lineæ finitę in plano, circa alterum eius punctum extremum quieſcens, quouſque ad eum locum redeat, à quo moueri cęperat, vocetur Circulus. Et punctum quieſcens vocetur Centrum. linea verò, ab extremo eius termino deſignata, dicatur Circunferentia. Et quęlibet recta, à centro ad circunferentiam extenſa, Radius circuli nuncupetur, vel ſemidiameter.



Vt ſi recta linea A B, circa punctum A quieſcens, reuoluatur in plano per E, D, & C, quouſque redeat ad locum A B, à quo moueri cęperat: Vocabitur figura plana, ex fluxu illius lineę deſcripta, Circulus; & punctum A, Centrum; & linea B E D C, Circunferentia; & rectę lineę A C, & A B Radij circuli vocentur.

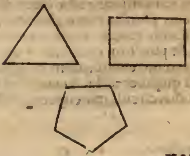
Vulgata circuli deſinitio hæc eſt: Circulus eſt figura plana ab vna linea comprehenſa, quę peripheria appellatur, in qua ab vno puncto eorum, quę intra figuram ſunt poſita, cadentes lineę rectę ſunt ęquales. *Et hęc eſt vna ex ijs definitionibus, quę paſſionem ignotam tradunt. Non enim facilè eſt videre, an in natura reperiri poſſit talis figura, quę habeat punctum vnicum intra ſe, à quo omnes rectę, ad eius terminum ductę, ſint inter ſe ęquales. Semper enim dubitari poteſt, an aliqua ex infinitis illis lineis habeat eãdem menſuram*

Lib.I. *ſuram cum reliquis. Melius ergo procedemus definiendo circulũ eo modo, quo Euclides in definitione ſpherę vſus eſt, in quà nulla difficultas adeſt; neque dubitari poteſt an in natura detur figura, quę à centro ad circunferentiam habeat diſtantias ęquales: cum ex ipſamet deſcriptione, & conſtructione, in definitione poſita, declaretur. Nam eadem linea reuoluta circa centrum, cùm ſit ſemper eiuſdem menſurę, neceſſariò facit diſtantias à centro ad circunferentiam inter ſe ęquales.*

IX.

FIGVRAE planę, quę à rectis lineis continentur, vocentur Rectilineę.

X.



ET, quæ à tribus rectis lineis, Trilateræ, ſeu Triangula vocentur.

XI.

QVAE ſub quatuor, Quadrilaterę, ſeu quadrangula.

XII.

ET, ſi á pluribus, quàm quatuor rectis lineis contineantur, Multilateræ, vel multangulæ dicantur, denominatæ à multitudine laterum, ipſam figuram comprehendentium.

Hę definitiones manifeſtę ſunt. Nam poſt definitionem circuli, quę vnico termino clauditur, declarantur reliquę figurę planę, quę à pluribus terminis comprehenduntur, quę licet ſint diuerſę inter ſe, vt potè quę à pluribus lineis curuis comprehendi poſſunt, (de quibus in hiſce libris non tractatur) definiendę ſunt tantummodo figurę planę, quę à rectis lineis continentur. hę quidem tot ſpecies conſtituunt, quot ſunt multitudines rectarum linearum, ſuperficiem comprehendentium. Et quia agitur pręcipuè in hiſce libris de triangulis, & quadrangulis; proptcrea hę duę ſpecies figurarum pręcipuè declarantur, & definiuntur.

XIII.

XIII.

MAGNITVDO magnitudinis menſura dicitur, cùm illa, multoties ſumpta, alteri ęqualis fuerit.

Vt linea C dicitur menſura lineę A B, ſi ipſa C, ſumpta multoties, ſcilicet quater, quinquies, ſexies, &c. ęqualis fuerit ipſi A B.



PETITIONES, SEV POSTVLATA.

I.

A PVNCTO ad punctum lineam rectam ducere.

II.

ET lineam rectam producere in continuum, & directum.

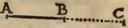
III.

ET quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.

IV.

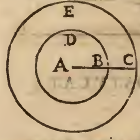
ITEM quacunque magnitudine data, poſſe aliam magnitudinem ſumi, vel maiorem, vel minorem.

Sunt Petitiones, vt dictum eſt, propoſitiones, quę conſtructiones intellectuales exponunt ita faciles, vt nullo artificio, neque ratiocinio indigeant; & propterea aſſumuntur inter prima principia indemonſtrabilia. Itaque cùm à puncto ad punctum recta linea ducenda eſt, debet ſolummodo concipi punctum A fluere breuiſſimo itinere vſque ad punctum B; eumque prędictus fluxus ęquabilis, non inflexus. & in hac operatione non hęſitat intellectus, neque difficultatem habet; nec etiam obijci poteſt, quod hęc ſit fictio chimęrica. nam re vera in ſpatio mundano



dantur huiuſmodi dimenſiones; & ſic ducere rectam à puncto ad punctum idem eſt, ac ſi quis conſideret lineam rectam, iam exiſtentem in mundo; ſeu illam dimenſionem, quę inter duo illa puncta reperitur. Pari ratione poſſumus lineam quamlibet rectam finitam A B producere in directum, quantum libuerit vſque ad C; ſcilicet intelligendo extremum eius punctum vlterius produci ęquabili fluxu, & breuiſſimo itinere.

Similiter poſita qualibet linea recta finita A B, vel A C, poteſt extremum eius punctum A fixum conſiderari; & tota linea A B, vel A C, quę eſt interuallum, intelligi poteſt reuoluta in plano, quouſque reducatur in locum, vnde moueri cœperat. manifeſtum eſt ſuperficiem B D, vel C E, deſcriptam ex reuolutione, iam dictę lineę, circulum eſſe. Et quia quęlibet linea, cuiuſcumque ſit magnitudinis, eodem modo intelligi poteſt circunducta; hinc eſt, quod quolibet centro, & interuallo circulus deſcribi poteſt. Tandem magnitudine quacumque data ſumi poteſt maior, & minor, quia intellectualiter, & non mechanicè fieri debet; propterea etiam facillimum eſt, & aſſumi poteſt, vt principium.



AXIOMATA, SEV PRONVNCIATA.

I.

QVAE eidem ęqualia, inter ſe ſunt ęqualia. Et quod vno ęqualium maius eſt, aut minus, maius quoque, aut minus eſt altero ęqualium; & contra.

II.

ET ſi ęqualibus ęqualia adiecta ſint, tota quoq; ſunt ęqualia.

III.

ET ſi ab ęqualibus ęqualia ablata ſint, quæ relinquuntur ſunt ęqualia.

IV.

AEQVALIA addita, vel ablata ab inęqualibus, inęqualia faciunt.

V.

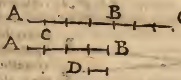
DVPLA, tripla, &c. vel dimidia eiuſdem, vel ęqualium, ſunt pariter ęqualia.

VI.

VI.

SI eadem magnitudo metiatur duas magnitudines, & earum compoſitum, atque differentiam menſurabit.

Vt, ſi magnitudo D menſurat duas A B, & B C, neceſſe eſt, vt aggregatum, atque differentiam A C menſuret. Nam a vtraque A B, & B C, diſtribuitur in partes, quarum ſingulę ęquales ſunt ipſi D. a Def. 13.



VII.

TOTVM ſua parte maius eſt.

VIII.

TOTVM ęquale eſt omnibus ſuis partibus, ſimul ſumptis.

IX.

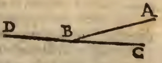
QVAE ſibi mutuò congruunt, ſunt ęqualia.

Debet intellectualiter fieri hęc applicatio; ita vt tota magnitudo pręcisè totam magnitudinem contingat, abſque eo, quod aliquid intactum relinquatur; ſcilicet quando intermedię partes cum intermedijs conueniunt; & extremę pręcisè cum extremis; & tunc eorum congruentia intellectui conſtare dicetur. Conuerſum verò, ſcilicet quod ea, quę ęqualia ſunt ſibi inuicem congruant, non in omnibus verum eſt, ſed in ijs, quę ſpecie ſimilia ſunt, vt lineę rectę inter ſe, & circunferentię ęqualium circulorum, vt Proclus animaduertit. lib. 3.

X.

DVAE rectę concurrentes, & ſe mutuò ſecantes, non habent aliquam partem communem.

Vt ſi fuerint duę rectę lineę A B, & C B, concurrentes in puncto B, & ibidem ſe ſe ſecantes, eſt impoſſibile, vt ambę lineę rectę, productę vlterius, conſtituant vnicam rectam lineam B D; ita vt A B D ſit vnica recta linea; & pariter C B D ſit vna recta, hoc enim repugnat.



XI.

XI.

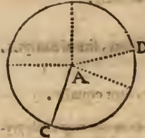
DVAE rectæ lineę, poſſunt quidem conſtituere angulum, ſed non claudere ſpatium, ſeu figuram efficere.

Vt duę rectę A B, & A C, concurrentes in puncto A, poſſunt quidem conſtituere angulum B A C; ſed nunquam poſſunt claudere ſpatium ſuperficiale; eo quod tota linea A B diſtat, & ſeparatur à tota linea A C, excepto puncto contactus A (licet in infinitum producantur), aliàs deſtrueretur conceptus rectitudinis linearum; deberetque altera ipſarum incuruari, aut inflecti, quod eſt contra hypotheſin.



XII.

LINEAE omnes, à centro ad circunferentiam circuli ductæ, ſunt ęquales inter ſe.



b Def. 8. *Manifeſtum eſt hoc, quia* b *radij omnes A C, A D, &c. menſurantur ab eadem linea recta A C.*

XIII.

SI eadem recta linea intra duas figuras tota collocata fuerit, habebunt illę figurę partem aliquam communem, & ſe ſe ſecabunt.

Sunt axiomata, vt dictum eſt, propoſitiones ſpeculatiuę, ſeu theoremata, quę ob ſui maximam euidentiam non indigent demonſtratione; ſed ſtatim, cognitis terminis, neceſſe eſt, vt intellectus illis aſſentiatur; & propterea aſſumuntur inter principia indemonſtrabilia. Pronunciatorum alia quidem communia ſunt omnibus ſcientijs mathematicis; alia ſunt peculiaria Geometrię. Illa enim, quę ſunt ſeptem priora inſeruiunt tam in motu, quàm in tempore, in numeris, & in magnitudinibus, & vbicunque de quantitate agitur; poſteriora verò vſum tantùm habent in ſcientijs Geometricis, vbi de magnitudinibus tractatur.

Cùm aliquę definitiones immutatę ſint in hac elementorum reſtitutione; aliquę verò relictę, atque alię in alia loca translatę, vt oſtendam non ſine ratione id me feciſſe, antequam ad expoſitionem propoſitionum deueniam, accuratius videndum eſt, quid nam ſint mathematicę definitiones;

&

& qua methodo veniantur; & quomodo differant à poſtulatis, & pronunciatis. Nam hoc ab aliquibus praue, & confuſè expoſitum fuit.

Clauius putat definitiones eſſe artis vocabula, neque opus eſſe, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc, aut illo definiatur modo; ſed ſatis eſſe, vt nunquam res definita aſſeratur alicui conuenire, niſi prius definitionem traditam eidem conuenire demonſtretur. Proe. lib. I. Eucl & in def. 5. lib 5.

Commandinus verò cum Proc o cenſet definitiones mathematicas eſſe hypotheſes. Sed Ariſtoteles poſitiones eas vocat; loquiturque de eis ſatis confuſè. Vult enim definitiones eſſe poſitiones, & principia immediata indemonſtrabilia, de quibus precognoſcitur quid ſint, & quia exiſtunt in natura; ſed neceſſe non eſſe docendum eas habere. Rurſus dignitatem à ſuppoſitione, & petitione differre; quia hęc duo non ſunt nota per ſe, ſed exteriore indigent ratione; & licere inſtare contra eas. Diuidit poſtea definitionem quid nominis à definitione quid rei; & hanc ait aliquando eſſe principium demonſtrationis, aliquando eſſe eius concluſionem. l.b. 1. Poſt lib. 1. & 2.

Sed huiuſmodi ambiguitates, his pręmiſſis, facilè tollentur.

Primò definitiones adhibentur in demonſtratione, vt pręmiſſę. Quare neceſſe eſt, vt ſint euidenter cognitę, aliàs cognitio ſcientifica, ſeu euidentiſſima ex eis acquiri non poſſet.

Secundò definitiones, quę debent eſſe ſcientię principia, ſunt anticipationes; ſeu pręexiſtentes in animo cognitiones, vel effigies, ſiue ideę, à quibus in animo clarè, & diſtinctè circunſcribitur, quare, & quomodo tale quid eſt vnaquęque res, & diuerſificatur à qualibet alia; vt circunſcriptio illius figurę planę, quę à tribus rectis lineis continetur; eſt pręcognitio, ſeu idea, ad quam reſpicientes, perſpicuè eius naturam percipimus, & diſtinguimus à qualibet alia.

Tertiò circunſcribetur in animo id, quod vnaquęque res eſt per ſuam propriam efformationem, aut per eius eſſentialem affectionem, vel proprietatem, omni, ſoli, & ſemper conuenientem. Vt omnes trianguli à tribus rectis lineis continentur, & ſoli trianguli, non autem reliquę figurę; & ſemper. Non enim aliquando triangulus caret tribus lateribus.

Quartò nomina ſunt ſigna, ad placitum impoſita, ad ſignificandam pręcognitionem, in animo exiſtentem; ideſt efformationem, aut eſſentialem paſſionem alicuius ſubiecti. Vt nomen circuli eſt ſignum, impoſitum ad indicandam efformationem, factam à recta linea, reuoluta, &c. Vel eſt ſignum, indicans paſſionem eſſentialem dictę figurę, quę eſt ęqualitas omnium rectarum linearum, à centro ad circunferentiam extenſarum.

Quintò ratio ſtructurę formalis alicuius ſubiecti quanti multiplex eſſe poteſt. Sicut etiam quęlibet res non vnicam, ſed plures eſſentiales proprietates conuertibiles habere poteſt. Vt ſtructura circuli, ne dum ex reuolutione rectę lineę in plano circa punctum fixum; ſed ex reuolutione

anguli

anguli recti circa diametrum; & ex ſectione coni, & cylindri, & alijs pluribus modis effici poteſt. Pari ratione triangulum, pręter paſſionem dictam, quod à tribus lateribus continetur, habet alias non minus eſſentiales; quod nimirum tres interni anguli ſint ęquales duobus rectis: quod externus ſit ęqualis duobus angulis internis, & oppoſitis: & innumerabiles alias, à quibus eius natura declaratur, & à qualibet alia diſtinguitur.

Sextò inter rationes ſtructurę formalis, vel inter paſſiones eſſentiales, quę alicui ſubiecto quanto tribuuntur, aliquę poſſunt eſſe omnino impoſſibiles, & falſę; alię autem poſſunt eſſe poſſibiles, & verę, ſed nobis ignotę, aut dubię; alię verò poſſunt eſſe verę, & cognitę, & inter eas omnium maximè facilis, & manifeſta, quę non ex alijs, ſed ex ea reliquæ deduci poſſunt: Vocetur ſtructura, vel paſſio prima, & notiſſima talis ſubiecti; & hæ ſolummodo principium ſcientiæ conſtituere poſſunt, reliquæ verò non.

His præmiſſis, ſi nomen ſit iam impoſitum alicui ſubiecto quanto, & illius ſubiecti ſumatur eſſentialis proprietas prima, & notiſſima, poterit copulari nomen proprietat. eiuſdem ſubiecti. Et hoc erit Axioma. Vt voces Totum, & Pars, iam impoſitę, & vſu receptæ ſunt; & euidentiſſima proprietas eſt omnium totorum, vt excedant ſuas partes. Ergo euidentiſſimum eſt pronunciatum vniuerſale: Omne totum maius eſt ſua parte.

At ſi res aliqua non habet nomen, ſed habeat notiſſimam, & primam proprietatem: poteſt quodcunque nomen copulari illi proprietati. Et hęc erit definitio; ita vt ſit conuertibilis propoſitio: Res habens talem euidentiſſimam paſſionem eſſentialem omni, ſoli, & ſemper conuenientem, eſt, aut vocatur tali nomine. Et è contra tale nomen ſignificet rem, habentem illam talem proprietatem primam. Vt figura illa plana, quę habet euidentiſſimam proprietatem, vt tres rectę lineę ipſam comprehendant quocunque nomine, vt trianguli, deſignari poteſt: & efficitur definitio: Patet ergo, quòd definitio non differt à pronunciato niſi in nomine, quod illi de nouo imponitur; huic verò iam impoſitum eſt.

Vnde colligitur, quod quęlibet definitio eſſe poſſet Axioma, ſi nomen iam eſſet receptum. Et è contra quodlibet axioma eſſet definitio, ſi nomen non eſſet receptum. Vt ſi nomen trianguli eſſet iam impoſitum, & vſu receptum, dici poſſet: Omne triangulum à tribus rectis lineis continetur. Et iſtud eſſet axioma, non definitio. E contra ſi nomen ęqualitatis non eſſet adhuc impoſitum, dici poſſet: Quę ſibi mutuò congruunt vocentur ęqualia, & hęc eſſet definitio, non pronunciatum.

Pari modo definitio non differt à petitione, niſi in nomine, quod illi de nouo imponitur; huic verò iam impoſitum eſt. Vt ſi nomen circuli iam eſſet receptum, cùm ſit nota conſtructio predictæ figuræ ex reuolutione rectę lineę in plano circa punctum eius fixum, ex coniunctione huius de-

ſcri-

ſcriptionis, & nominis reſultat Petitio. Et ſi huic deſcriptioni nomen circuli de nouo imponatur, conſurget Definitio.

Ex his deducitur, quod quotieſcunq; perquiri debent definitiones, quæ ſint principia demonſtrationis, ideſt quę producant certam, & euidentem cognitionem ſcientificam, licet laborandum non ſit in electione nominis, nam ad libitum quodcunque nomen illi attribui poteſt: tamen non temerè, ſed maxima cautione eligi debet ratio ſtructurę, aut eſſentialis paſſio prima, & notiſſima alicuius ſubiecti. Nam ſi conſtructio, & paſſio nominata ſit impoſſibilis, tunc non efficietur definitio ſcientifica, vt ſi quis diceret: Duæ rectæ lineę inter ſe ęquales, & ſimul inter ſe inęquales, vocentur irrationales. Aut diceret: Duę rectę lineę ſpatium comprehendentes, vocentur figurales, eſſent definitiones non entium, & impoſſibiles; & propterea potius ignorantia, quàm ſcientia ex eis dedu- ceretur.

Deinde ſi conſtructio, aut paſſio nominata, ſit quidem poſſibilis, & vera, ſed nobis ignota, aut dubia; tunc bona definitio non erit: Nam concluſiones ab ignoto, & dubio principio ortæ, incertę quoque, & dubię erunt; & ideo ſuſpicionem, aut opinionem, non autem ſcientiam certam afferent. Vt cùm dicitur in vulgata definitione parallelarum: Duę rectę lineę in eodem plano ex vtraque parte non concurrentes, vocentur parallę. Ignoratur an dari poſſint duę rectę lineę, habentes hanc conditionem. Similiter ignoratur, an reperiri poſſit in natura figura quadrilatera, in qua omnes anguli ſint recti, & quatuor latera ſint inter ſe ęqualia, quę vocatur quadratum. Pari modo incertum eſt an reperiri poſſint figurę planæ ęquiangulæ, habentes circa angulos ęquales latera proportionalia, quę ſimiles vocantur; ambiguum quoque eſt, an reperiantur duæ lineę, quę nunquam poſſint habere aliquam communem menſuram; & ſic aliæ quamplurimæ. Hę omnes paſſiones licet veræ ſint: tamen non ſunt per ſe euidentes, niſi poſtquam oſtenſum fuerit ipſas veras eſſe; & propterea huiuſmodi definitiones non debent præponi, ſed ex ſuis locis, poſtquam demonſtratę fuerint, deduci debent.

Tandem licet conſtructio, aut paſſio definitionis ſit manifeſta, debet eſſe omnium euidentiſſima, vt non ea ex alijs; ſed reliquę omnes ab ea deduci poſſint. Vt ſi quis diceret: voco triangulum æquilaterum figuram planam triangularem, in qua quilibet angulus tertia pars eſt duorum rectorum: traderet principium non maximè notum & primum. nam magis notum eſt, quòd dicta figura trilatera comprehendi poſſit à tribus rectis lineis ęqualibus, & ex hac illa deduci poteſt; non autem hec ab illa.

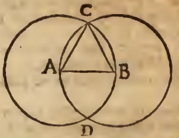
Ex hac theoria quilibet per ſe poteſt facilè reſoluere difficultates aliorum; & inſuper naturam principiorum demonſtrationis, & ſcientiæ perſpectam habere.

C PRO-

Eucl Prop. 1. lib. I.

PROPOS. I. PROBLEMA I.

Super data linea recta terminata Triangulum, habens tria latera inter ſe ęqualia, conſtituere. Vocetur tale triangulum Aequilaterum.



IN omni problemate quinque partes, vt plurimum, reperiuntur, quando perfectum eſt; ſunt autem illę, Propoſitio, Expoſitio, Conſtructio, Demonſtratio, & Concluſio. Propoſitio dicit datum, ſeu conceſſum, id eſt ſubiectum; & rurſus declarat id, quod faciendum eſt. Secunda pars, quæ eſt Expoſitio declarat in vnico exemplo particulari, ſeu in aliqua figura ſenſibili id, quod in propoſitione dictum erat; nec propterea in tali figura ſenſibili alteratur vniuerſalitas propoſitionis, quia figura particularis apponitur facilitatis gratia, ne intellectus nimiùm laboret; ſed inſpiciendo imaginem illam facilius vniuerſaliter diſcurrere poſſit. Tertia pars, quæ eſt Conſtructio, ſemper eſt neceſſaria in problematibus; nam efficit id, quod in propoſitione imperatur; ſeu potius contemplatur intellectualem operationem, per quam quęſita conſtructio formalis ſcientificè percipi poſſit. Quarta pars, quę eſt Demonſtratio, colligit ex primis principijs, demonſtratiuè argumentando, conſtructionem imperatam legitimè factam fuiſſe. Tandem Concluſio eſt quidam epilogus totius propoſitionis, monendo factum eſſe id, quod in propoſitione imperabatur. Hæc omnia ſemel tantùm monuiſſe ſuperfluum non erit in hac prima propoſitione; quæ licet in reliquis propoſitionibus non apponantur, ſemper ſubintelligi debent.

EXPOSITIO.

Sit igitur data linea recta A B, ſuper ipſam conſtruendum eſt triangulum, quod habeat tria larera inter ſe æqualia. Iam hęc linea data A B, licet ſit vnius menſurę, nihilominus eam intel-

intellectus debet concipere, vt repreſentatiuam cuiuſcunque menſurę, ex infinitis, quę propeni poſſunt.

CONSTRVCTIO.

Iuxta tertium poſtulatum, facto centro A, interuallo verò rectę A B, deſcribatur circulus C B D; Rurſus centro B interuallo eiuſdem rectę B A, *a* alius circulus C A D deſcribatur. Et quoniam eadem recta linea A B intra ambos circulos C B D, & C A D collocatur. Ergo ex XIII. axiomate hi duo circuli ſe ſe mutuò ſecant: proptereaque circunferentię dictorum circulorum ſe ſe mutuò ſecabunt in aliquo puncto; cùm ſint ipſe circunferentię lineę indiuiſibiles. Ponatur ergo punctum ſectionis eſſe C; iam à puncto A ad C *b* recta ducatur; pariterque à puncto B ad C alia recta extendatur. Hic iam perfecta eſt conſtructio; facta enim eſt figura trilatera A B C, quàm eſſe ęquilateram pronuncio.

a Poſt. 1.

b Poſt. 1.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectę lineæ A B, & A C ducuntur à centro A ad circunferentiam circuli B C D. *c* Ergo recta A C ęqualis eſt rectę A B. Rurſus quia rectę B C, & A B ducuntur à centro B ad circunferentiam circuli C A D: *d* erit recta B C ęqualis eidem rectæ B A. Tam ergo A C, quàm C B ęquales ſunt eidem rectę A B. *e* Quare A C, & C B ęquales ſunt inter ſe. Et tres lineę rectę A B, B C, & C A, claudentes triangulum A B C, ęquales ſunt inter ſe.

c Axio. 11.

d Axio. 11.

e Axio. 1.

CONCLVSIO.

Ergo ſuper data recta linea A B triangulum, à tribus lateribus ęqualibus comprehenſum, conſtruximus. quod faciendum imperabatur in propoſitione. Vocetur talis figura triangulum Aequilaterum.

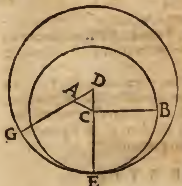
SCHOLIVM.

Animaduertendum etiam eſt proceſſum demonſtratiuum ad euitandam prolixitatem non exponi per ſyllogiſmos in forma; ſed nihilominus in hiſce demonſtrationibus ſemper proceditur per ſyllogiſmos primę figurę, in quibus vt plurimum ommittitur minor propoſitio breuitatis cauſa.

Eucl prop. 2.

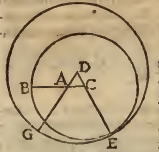
PROPOS. II. PROBL. II.

AD DATVM punctum datæ rectæ lineę ęqualem rectam lineam ducere.



Sit datum punctum A, & data recta linea B C. Duci debet à puncto A recta linea, quæ ſit ęqualis ipſi rectæ B C. Ducatur
a Pet. 1. à a puncto C ad A recta linea, ſi opus eſt; & ſuper b C A trian-
b Prop. 1. gulum ęquilaterum A D C de-
c Pet. 3. ſcribatur; & centro c C, interuallo C B circulus B E deſcribatur; & recta D C in directum
d Pet. 2. producatur ad partes C, quouſque circunferentiam circuli ſecet in puncto E. Et rurſus e cen-
e Pet. 3. tro D, interuallo D E, alius circulus E G deſcribatur, ſecans rectam lineam D A, productam in G. Dico rectam A G æqualem eſſe datę rectæ lineæ B C. Quoniam rectæ D E, & D
f axi. 11. G ducuntur à centro ad peripheriam circuli E G: f Ergo ſunt ęquales inter ſe; & ab his auferuntur partes ęquales A D, &
g axi 3. C D (cùm ſint latera trianguli ęquilateri). g Ergo reſiduum A G ęquale eſt reſiduo C E. Sed etiam C B ęqualis eſt eidem
h ax. 12. C E; h cùm ſint ductę à centro ad circunferentiam circuli B E. Ergo duę rectę B C, & A G ęquales ſunt vni tertię C E. k ideo-
k ax. 1. que ęquales inter ſe. Quare ducta eſt à puncto A recta A G æqualis datę B C. Quod erat faciendum.

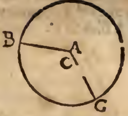
S C H O L I V M.



Punctum A in hoc problemate diuerſimodè collocari poteſt, aut enim reperitur in ipſamet linea B C, aut in eius extremo puncto, aut ſupra, aut infra, vel ad latera ipſius. Vnde conſtat problema tres caſus habere; ſed doctrinę gratia difficiliorem caſum expoſuimus, cuius conſtructio comprehendit primum, & tertium caſum.

Secun-

Secundus verò quando ſcilicet punctum datum A in C puncto extremo datę rectę lineę B C reperitur; tunc centro A, interuallo A B, m deſcripto circulo B G, & ducta A G: erit A G recta quęſita. m. Pet. 3.



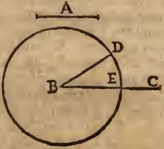
PROPOS. III. PROBL. III.

Eucl. prop. 3. 1.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, de maiore ęqualem minori rectam lineam detrahere.

Sit A linea recta minor, C B maior. Debet ex maiori C B abſcindi ſegmentum ęquale ipſi A. a Ducatur à puncto B recta linea B D, quę ſit ęqualis ipſi A, b & centro B, interuallo B D, deſcribatur circulus D E, ſecans rectam C B in E puncto. Dico B E eſſe ſegmentum detractum ęquale ipſi A. Quoniam B E ęqualis eſt ipſi B D, c quia ductę ſunt à centro ad peripheriam circuli; ſed ex conſtructione A ęqualis eſt eidem B D. Quare A, & B E, cùm ſint vni tertię ęquales: d erunt inter ſe pariter ęquales. Duabus igitur datis, &c. quod erat faciendum.

a Prop 2. b Pet. 3. c ax. 12. d ax. 1.



PROPOS. IV. THEOR. I.

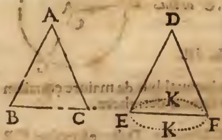
Eucl. prop. 4. 1.

SI in duobus triangulis, circa verticales angulos ęquales, duo latera vnius ęqualia fuerint duobus lateribus alterius trianguli, ſingula ſingulis: erunt baſes ęquales inter ſe; & triangula erunt ęqualia; & duo anguli reliqui ęquales erunt duobus reliquis angulis, ſinguli ſingulis, qui opponuntur ęqualibus lateribus. Vocentur autem huiuſmodi triangula ſimiliter ęqualia.

Sint duo triangula A B C, & D E F, quorum anguli verticales A, & D, ęquales ſint inter ſe, & latus A B ęquale ſit lateri D E, nec non latus A C ęquale ſit lateri D F. Dico baſim B C ęqualem eſſe baſi E F; & triangulum A B C ęquale triangulo D E F; & angulum B ęqualem eſſe angulo E, quibus opponun-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA ... EMANUELE

ponuntur ęqualia latera A C,& D F, & angulum C ęqualem eſſe angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera ęqualia A B, & D E.



Facta intellectuali ſuperpoſitione trianguli A B C ſuper triangulum D E F, ita vt punctum A ſuper punctum D, & recta A B ſuper D E cadat; neceſſario ſibi mutuò a cõgruunt duæ rectę A B, & D E: pariterque angulus A angulo D congruet, propter æqualitatem; ideoque A C ſuper D F cadet: & propter eorum æqualitatem ſibi mutuò b congruent. vnde punctum C ſuper punctum F incidet. His poſitis dico baſes B C, & E F ſibi mutuò congruere. Si enim hoc verum non eſt, cadant partes intermediæ ipſius B C ſupra, vel infra ipſam E F, vt in ſitu E K, F; & tunc duę rectę lineę E F, & E K F clauderent ſuperficiem; c quod eſt abſurdum. Non ergo baſis B C ſupra, vel infra baſim E F incidere poteſt, quando puncta extrema B, & C pręciſè ſupra puncta E, & F cadunt. Quapropter neceſſe eſt baſes B C, & E F ſibi mutuò congruere; & d ideo inter ſe ęquales erunt. Similiter triangula ipſa A B C, & D E F ſibi mutuò congruent; quandoquidem ſuperficies planę ſunt, quarum omnia extrema ſe tangunt, & partes intermediæ triangulorum ſe ſe tangant neceſſe eſt, aliàs e linea recta non congrueret omni ex parte vtrique ſuperficiei planę, quod eſt abſurdum. Ergo f triangula A B C, & D E F ęqualia pariter ſunt inter ſe. Poſtremo anguli B, & E, cùm ſibi mutuò congruant, ęquales erunt inter ſe, qui opponuntur ęqualibus lateribus A C, & D F: g pariterque anguli C, & F ſibi mutuò congruent, eruntque inter ſe ęquales; qui opponuntur lateribus ęqualibus A B, & D E. Quapropter ſi in duobus triangulis, &c. quæ erant demonſtranda. Vocentur autem breuitatis cauſa duo triangula, iam dictas conditiones habentia, ſimiliter ęqualia.

a Axiom. 9.
b Axiom 9.
c Axiom. 11.
d Axiom. 9.
e Defin. 5.
f Axiom. 9.
g Axiom. 9.

S C H O L I V M.

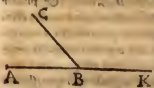
In hoc primo theoremate tot partes licet reperire, quot in problemati-

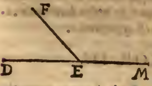
matibus ; ſed conſtructio non ſemper neceſſaria eſt, vt patet in hac propoſitione. Rurſus conſiderari debet, quod in hoc theoremate tam ſubiectum, quàm eius paſſio demonſtranda, non eſt ſimplex, ſed multiplex, & complexa ; eò quod plura ſupponuntur in dictis triangulis, & plures paſſiones de eiſdem demonſtrantur.

PROPOS. V. THEOR. II.

DVO anguli, qui duos æquales angulos, vel eundem angulum conſequuntur, ſunt inter ſe æquales.

Sint duo anguli A B C, & D E F inter ſe æquales; & productis rectis lineis A B, & D E ad partes angulorum B, & E vſque ad K, & M. Dico angulos C B K, & F E M, qui eoſdem conſequuntur, ęquales inter ſe eſſe.

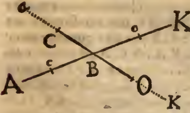




Quoniam angulus D E F ſupponitur ęqualis angulo A B C. Ergo facta intellectuali ſuperpoſitione rectæ D E ſuper A B, atque puncti E ſuper B, ipſi a anguli D E F, & A B C ſibi mutuò congruent ; ideoque recta E F cadet ſuper B C ; ſed recta E M cadit ſuper rectam B K ; quandoquidem rectę b D E, & A B, in directum productæ vſque ad M, & K, ſibi mutuò congruentes, ſegmentum commune habere nequeunt. Ergo anguli F E M, & C B K ſibi mutuò congruent, & d propterea ęquales inter ſe erunt.

a Axiom. 9. *b Axiom. 10.* *d Axiom. 9.*

Secundò vnius anguli A B C producantur rectæ lineę A B, & C B, ad partes anguli B, in K, & O. Dico angulos ambos C B K, & A B O, (qui conſequuntur) eſſe inter ſe ęquales. Intelligatur idem angulus A B C applicatus ſupra ſe ipſum, inuerſo modo ; ita vt recta A B cadat ſupra rectam C B, atque recta C B cadat ſupra rectam A B. Manifeſtum eſt rectam e B K cadere preciſè ſupra B O ; & recta O B cadet ſupra rectam K B. Quare f angulus A B O ęqualis erit angulo C B K, quod erat oſtẽdendũ.



e Axiom. 10. *f Axiom. 9.*

CO-

Eucl. prop. 15. I.

COROLLARIVM.

HINC colligitur duas rectas lineas ſe ſecantes, efficere angulos ad verticem ęquales inter ſe.

Nam in duabus rectis lineis A K, & C O, ſe ſecantibus in B, *g* oſtenſi ſunt duo anguli ad verticem A B O, & C B K æquales inter ſe; qui conſequebantur angulum A B C. Eadem ratione duo anguli ad verticem A B C, & K B O *h* ęquales erunt inter ſe; cùm conſequantur eundem angulum A B O.

g Prop. 5.
h Prop. 5.

SCHOLIVM.

Corollarium eſt aliud theorema, aut problema incidenter, & præter intentionem demonſtratum in progreſſu demonſtrationis, aut conſtructionis alterius propoſitionis. Vt in hac propoſitione quærebatur tantummodo an anguli, qui conſequuntur vnum, aut æquales angulos, eſſent inter ſe æquales. Sed quia ſemper anguli, qui ſunt ad verticem, conſequuntur vnum, eundemque angulum, notatu dignum eſt reperiſſe nos nouam cognitionem, non quæſitam. Quia non quęrebatur in propoſitione an anguli ad verticem eſſent æquales. Cùmque ſit vtilis hæc noua cognitio, breui annotatione in fine propoſitionis eſt apponenda.

Eucl. prop. 5. I.

PROPOS. VI. THEOR. III.

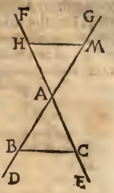
IN triangulo, duo latera inter ſe ęqualia habente, anguli, qui ad baſim ſunt, ęquales erunt inter ſe; & productis ęqualibus lateribus, anguli infra baſim poſiti ęquales quoque inter ſe erunt. Vocetur huiuſmodi triangulum Iſoſcelium.

Sit triangulum A B C, cuius latera ęqualia ſint B A, & C A. Dico angulos A B C, & A C B, qui ſupra baſim ſunt, ęquales eſſe inter ſe; & productis rectis A B, & A C infra baſim B C, vt in D, & E, eſſe angulos D B C, & E C B ęquales quoque inter ſe. Producantur *a* indefinitè latera B A, & C A ad partes verticis A, vt in G, & F; & tam ex A G, quám ex A F *b* ſecentur rectę A M, & A H, ſingulę ęquales ipſi A B, vel A C; & coniungatur *c* recta H M. Et quoniam duo triangula B A C, H A M circa angulos, B A C, & H A M *d* ęquales (cùm ſint ad verticem) habent latera ęqualia, ſingula ſingulis, ex conſtructione.

a Poſtul. 2.
b Prop. 3.
c Poſt. 1.
d Coroll. prop. 5.

ctione. Ergo *e* angulo M H A ęqualis eſt angulus C B A (cùm latera ſub eis ſubtenſa M A, & C A æqualia facta ſint). Eadem ratione *f* angulus A C B ęqualis erit eidem angulo M H A (cùm pariter ſubtenſa latera B A, & M A equalia poſita ſint). Quare duo anguli A B C, & A C B ſunt ęquales vni tertio angulo M H A; ideoque *g* duo anguli, ſupra baſim, A B C, & A C B ęquales inter ſe erunt. Quod erat primo loco oſtendendum.

e Prop. 4. *f Prop. 4.* *g Axiom. 1.*



Rurſus quoniam duo anguli A B C, & A C B ęquales oſtenſi ſunt. *h* Ergo duo reliqui, qui deinceps ſunt, anguli D B C, & E C B ęquales inter ſe erunt. Quapropter duo anguli infra baſim trianguli, latera ęqualia habentis, ſunt inter ſe ęquales. Vt erat probandum. Vocetur huiuſmodi triangulum Iſoſcelium.

h Prop. 5.

COROLLARIVM.

Patet triangulum ęquilaterum eſſe quoque ęquiangulum, ideſt tres eius angulos eſſe pariter ęquales inter ſe. Nam triangulum ęquilaterum eſt quoque iſoſcelium, ſi duo eius latera, ad libitum ſumpta, conſiderentur; & ſic quodlibet ex tribus lateribus trianguli ęquilateri erit baſis iſoſcelij. Vnde patet propoſitum.

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio, vt refert Proclus reperta fuit à Thalete Mileſio, eiuſque demonſtratio ab Euclide relata, ſatis eſt eligans, & ingenioſa, ſed valde moleſta tyronibus; qui ne ab illa intricata propoſitione adumbrati arceantur à Geometria, vtile fortaſse erit aliam faciliorem attuliſſe. lib 3.

PROPOS. VII. THEOR. IV.

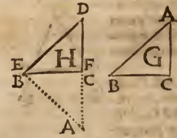
SI duo triangula tria latera tribus lateribus ęqualia habuerint, ſingula ſingulis, erunt ſimiliter ęqualia.

Sint duo triangula G, & H, atque latus A B ęquale ſit lateri D E,

ri D E, & A C ipſi D F; pariterque B C æquale lateri E F. Dico angulum A æqualem eſſe angulo D, & B ipſi E, nec non C ipſi F. Intelligatur triangulum G cum eius latere B C, collocatum ſupra latus E F, ita vt punctum B in E cadat; [a] C verò in F propter æqualitatem; & triangulum non ad eaſdem partes, ſed ad oppoſitas cadat: tunc reliqua latera contermina erunt æqualia. Coniungatur tandem [b] recta A D; quæ aut per punctum C tranſit, aut ſecat communem baſim B C, aut extra ipſam cadit.

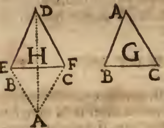
a Axio 9

b Poſt. 1.



In primo caſu, cùm duo latera A B, & B D in triangulo D A B ſint æqualia ex hypotheſi, erit [c] triangulum ipſum iſoſcelium; ideoque duo anguli A, & D ſupra baſim æquales erunt inter ſe, & ex quarta propoſitione, triangula ipſa G, & H erunt ſimiliter æqualia.

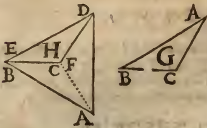
c Prop. 6.



In ſecundo verò caſu erit triangulum A D B pariter iſoſceles: vnde [d] duo anguli B A D, & B D A æquales erunt inter ſe: Pari ratione in triangulo iſoſcelio C D A duo anguli C A D & C D A æquales erunt inter ſe. Ergo ſi prioribus æqualibus hi poſteriores æquales addantur, efficientur [d] duo anguli B D C, & B A C inter ſe æquales. Denique in tertio caſu, ab angulis æqualibus B D A; & B A D auferendo æquales angulos C D A, & C A D relinquentur [e] duo anguli B D C, & B A C inter ſe æquales; deinde [f] reliqui anguli æquales erunt. Quapropter ſi duo triangula, &c. Quod erat oſtendendum.

d Prop. 6.

d Axio. 2.



e Axio. 3.

f Prop. 4.

SCHO-

SCHOLIVM.

Hęc propoſitio, quam Proclus Philonis familiaribus tribuit, facilior eſt illa, quæ ab Euclide adducitur. Non enim ad eius demonſtrationem neceſſaria eſt ſeptima propoſitio, quæ eſt negatiua, & valde difficilis. lib. 3.

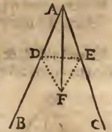
Notandum eſt hanc propoſitionem eſſe conuerſam quartę. Eſt enim conuerſio tranſpoſitio ſubiecti in prædicatum, & è contra; ita vt quod ſupponitur, vt notum in vna propoſitione, in altera ſit quæſitum; & id, quod ibi erat quęſitum, poſtea efficitur ſubiectum: attamen conuerſę propoſitiones diuiduntur; in alijs enim totum id, quod in ſubiecto continetur, efficitur prædicatum conuerſę propoſitionis, & è contra; & hæ vocantur conuerſiones ſecundum totum; aliæ verò propoſitiones conuertuntur ſecundum aliquam partem ſui ſubiecti, & prædicati; huius autem poſterioris generis eſt hęc ſeptima propoſitio. Nam retinet partem ſubiecti ipſius quartæ, & partem concluſionis; reliqua verò conuertuntur.

PROPOS. VIII. PROBL. IV. *Eucl. 9. I.*

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

Sit angulus rectilineus B A C. Debet hic angulus diuidi in duos angulos ęquales. Sumatur in A B quodlibet punctum D; & ex A C *a*, producta indefinitè, ſecetur *b* A E, ęqualis ipſi A D, & coniungatur *c* recta D E; & ſuper D E, ad partes oppoſitas, deſcribatur *d* triangulum ęquilaterum D F E. Tandem a puncto A ad F recta *e* coniungatur. Dico A F problema efficere. Quoniam in duobus triangulis D A F, & E A F latus A F eſt commune, & latera D A, & A E ſunt ęqualia, ex conſtructione, & baſes D F, & E F ſunt ęquales, cùm ſint latera trianguli ęquilateri. Ergo, ex præcedenti propoſitione, anguli D A F, & E A F ſunt inter ſe ęquales. Quare angulus B A C diuiſus eſt bifariam à recta A F. Quapropter datum angulum bifariam ſecuimus; quod erat faciendum.

a Poſt. 2.
b *Prop. 3.*
c Poſt. 1.
d *Prop. 1.*
e Poſt. 1.



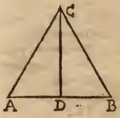
Eucl. 10. I.

PROPOS. IX. PROBL. V.

Datam rectam lineam bifariam ſecare.

a Prop. 1. b Prop. 8. c Prop. 4.

Sit recta linea finita A B diuidenda bifariam. a Deſcribatur ſuper ipſam triangulum æquilaterum A C B, cuius angulus verticalis C b bifariam ſecetur à recta C D, diuidente baſim A B in puncto D. Dico punctum D eſſe quęſitum. Quoniam in triangulis A C D, & B C D circa angulos verticales A C D & B C D ęquales ex conſtructione, latus C D eſt commune, & latera A C, & B C ſunt æqualia; cùm ſint latera æquilateri trianguli. Ergo c baſis A D ęqualis eſt baſi B D. Datam igitur rectam A B bifariam ſecuimus in D. Quod erat faciendum.



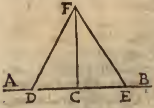
Eucl. 11. I.

PROPOS. X. PROBL. VI.

Data recta linea, à puncto in ea dato rectam lineam eleuare efficientem angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe. Vocetur vterque ęqualium angulorum Rectus; & quę inſiſtit recta linea Perpendicularis vocetur eius, cui inſiſtit.

a Prop. 3. b Prop. 1. c Poſt. 1. d Prop. 7.

Sit recta A B, & punctum in ea C, à quo debet educi linea, efficiens cum recta A B angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe. Sumatur quodlibet pũctum D; atque ex altera parte ſecetur, a ex C B, producta, linea C E æqualis ipſi C D; & ſuper D E b triangulum ęquilaterum D F E deſcribatur. Denique à puncto C ad F c recta ducatur. Dico F C Problema efficere.

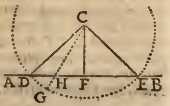


Quoniam duo triangula D C F, & E C F habent latus C F commune, & latera D C, & E C æqualia ex conſtructione; nec non baſes F D, & F E ęquales, cùm ſint latera trianguli æquilateri. Ergo d anguli F C D, & F C E æquales ſunt inter ſe; vt propoſitum fuerat. Vocentur ambo anguli A C F, & B C F Recti; & F C Perpendicularis dicatur ad rectam A B. PRO-

PROPOS. XI. PROBL. VII. *Eucl.12.I.*

Super datam rectam lineam infinitam à puncto dato, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam ducere.

Sit A B recta interminata, & punctum extra ipſam C. Ducenda eſt à puncto C perpendicularis ſuper A B. Sumatur in recta A B quodlibet punctum H, *a Poſt.1.* & iungatur *a* recta C H, & producatur *b* vltra rectam A B in G; & *b Poſt. 2.* centro *c* C, interuallo C G, circulus *c Poſt. 3.* D G E deſcribatur, cuius circumferentia neceſſariò ſecabit rectam A B: Nam punctum G radij C G vltra rectam A B poſitum



fuit. Secet igitur eam in punctis D, & E; poſtea *d* ſecetur D E bifariam in F, & ducantur rectæ C F, C D, & C E. Dico C F *d Prop. 9.* eſſe perpendicularem quæſitam.

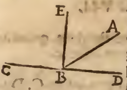
Quoniam in triangulis D F C, & E F C latus C F eſt commune, & D F æquale eſt ipſi F E, ex conſtructione; pariterque baſes C D, & C E ęquales ſunt, cùm *e* à centro ad circunfe- *e Axio.12.* rentiam circuli ſint ductæ. Ergo *f* anguli D F C, & E F C ęquales ſunt inter ſe, ideoque *g* recti. Vnde C F perpendicularis *f Prop 7.* eſt ad A B. Duximus ergo à puncto C perpendicularem ſuper *g Prop.10.* A B. Quod erat, &c.

PROPOS. XII. THEOR. V. *Eucl.13.I.*

Cùm recta linea, ſuper rectam conſiſtens lineam, angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis ęquales efficiet. At angulorum inæqualium, qui maior eſt recto, vocetur Obtuſus: Qui verò recto minor eſt, Acutus.

Recta linea A B inſiſtat rectę C D, faciatque angulos, qui ſunt deinceps, A B D, & A B C. Oſtendendum eſt, vel ambos eſſe rectos, vel ſimul ſumptos, duobus rectis æquales. Si enim A B perpendicularis eſt ad C D, *a* erunt anguli deinceps duo *a Prop. 10.* recti, ſin minùs erit alter acutus, alter obtuſus. Ergo educatur *b* ex puncto B linea E B perpendicularis ad C D, vt ſint duo anguli deinceps E B C, & E B D recti. Quoniam rectus *b Prop.10.* angulus

c *Axio.* 8. angulus E B D c æqualis eſt duobus angulis ſimul ſumptis, D B A, & A B E. Ergò addito communi angulo recto E B C: d erunt duo recti D B E, & E B C ſimul ſumpti, ęquales tribus angulis D B A, A B E, & E B C ſimul ſumptis. Rurſus quia angulus C B A e æqualis eſt duobus angulis C B E, & E B A, ſimul ſumptis. Ergo addito communi angulo A B D; f erunt duo anguli, C B A obtuſus, & A B D acutus, ſimul ſumpti, æquales tribus angulis ſimul D B A, A B E, & E B C; ſed eiſdem tribus angulis, oſtenſi fuerunt ęquales duo recti C B E. & E B D; g ſuntq; inter ſe ęqualia, quę eidem æqualia ſunt. Duo ergò anguli C B A, & A B D, ſimul ſumpti, duobus rectis æquales erunt. Quapropter cùm recta linea, &c. Quod erat, &c.



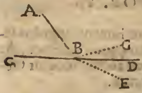
d *Axio.* 2. e *Axio.* 8. f *Axio.* 2. g *Axio.* 1.

Eucl. 14. I.

PROPOS. XIII. THEOR. VI.

Si ad aliquod punctum rectæ lineæ duę alię rectæ, non ad eaſdem partes ductæ, eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis ęquales fecerint: indirectum erunt inter ſe duę poſteriores rectę lineę.

Ad punctum B rectę lineę A B concurrant duę alię C B, & D B ex aduerſis partibus, quæ faciant cum prima A B duos angulos A B D, & A B C duobus rectis æquales. Dico ipſas C B, & B D eſſe in directum conſtitutas; id eſt efficere vnicam lineam rectam. Si enim C B D non eſt vnica linea recta, producatur a C B in directum ad partes B, quæ cadet, aut ſupra B D, aut infra ipſam. Cadat ſupra, ſi fieri poteſt, vt eſt C B G; tunc ex præcedenti, erunt duo anguli C B A, & A B G duobus rectis æquales; ſed ex hypotheſi duo anguli C B A, & A B D ſimul, ſunt æquales duobus rectis. Quare duo anguli C B A, & A B G ſimul, æquales ſunt duobus angulis, ſimul ſumptis, C B A, & A B D; & ablato communi angulo C B A: erit b angulus A B D æqualis angulo A B G, pars, & totum; c quod eſt abſurdum. Non ergo recta C B, producta, cadit ſupra B D; ſed neque infra cadet, vt in E. Nam eadem ratione proceden-



a *Poſ.* 2. b *Axio* 3. c *Axio.* 7.

do

do, eſſent anguli A B D, & A B E inter ſe æquales, pars. & totum; quod rurſus eſt abſurdum. Quare C B producta in directum tranſibit præciſè per B D. ideoque C B D vnica recta linea erit. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Proceſſus huius propoſitionis diuerſus eſt à præcedentibus. Nam prius ex principijs veris directè diſcurrendo peruenimus ad concluſionem veram, hic verò aſſumpta concluſione falſa deuenimus ad principium falſum, & poſtea rurſus ex deſtructione prædicti principij falſi, retrocedendo, falſitatem aſſumptę concluſionis redarguimus. Itaque ſciendum eſt ex antiquis præceptoribus artis demonſtratiuę, omnes demonſtrationes procedere, vel à principijs ad concluſiones, & hę vocantur compoſitiuę; vel è contra à concluſione ad principia, & hæ vocantur reſolutiuę, ſeu analyticę. Analyſis verò duplex eſt, aut enim ponit principia, aut deſtruit; quæ principia ponit propriè vocatur reſolutio, cui opponitur compoſitio; quandoquidem fieri poteſt regreſſus ordinatè procedendo ab iiſdem principijs ad concluſiones; quę verò principia deſtruit proprio vocabulo appellatur deductio ad impoſſibile, quia eius facultas eſt deſtruere aliquod primum principium euidens. & hoc eſt manifeſtum; quia in ſyllogiſmo demonſtratiuo, quando aſſumitur vna propoſitio falſa, licet altera ſit vera, neceſſariò concluſio debet eſſe falſa. Cumque vera concluſio non niſi ex veris propoſitionibus deduci poſſit, hinc eſt quod in prędicto ſyllogiſmo in aliquod falſum incidere debemus. Vt in hac propoſitione aſſumpſimus lineam C B E eſſe vnicam lineam rectam; atque ex premiſſa, & ex hypotheſi vera deduximus angulum A B D ęqualem fuiſſe angulo A B E; tumque iſte ſit pars illius; erit pars ęqualis ſuo toti; ſed hęc concluſio deſtruit principium, quod [a] totum ſit maius ſua parte. Ergo ſi impoſſibile eſt, vt totum ęquale ſit ſuę parti; pariter aliquod falſum, & impoſſibile in premiſſis aſſumptum eſt; ſed inter aſſumpta datum, ſeu hypotheſis propoſitionis vera eſt; (de ſubiecto enim non dubitatur an ſit), verum etiam eſt, quod [b] recta ſupra rectam incidens faciat duos angulos ęquales duobus rectis. Erit ergo falſa illa pars, in qua dicebatur, quod linea C B E eſſet vnica linea recta; ſed quotieſcunque non eſt linea recta, illa quę tranſit infra lineam B D, neque ſupra ipſam: reſtat, vt in ipſammet lineam B D recta linea cadat. Patet ergo veritas huius proceſſus demonſtratiui vſitatiſſimi apud Euclidem, Archimedem, Apollonium, Ariſtotelem, & alios.

[a] *Axio. 7.*

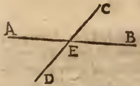
[b] *Prop. 12.*

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc patet duas lineas, ſe mutuò ſecantes, efficere quatuor angulos, qui, ſimul ſumpti, æquales ſunt quatuor angulis rectis, ſimul ſumptis. Nam ex vna parte rectæ A B verſus C c duo anguli A E C, B E C duobus rectis ſunt ęquales; pariterque ex altera parte eiuſdem rectæ A B, verſus D, duo anguli A E D, B E D duobus rectis ſunt æquales. Ergo quatuor anguli A E C, C E B, B E D, & D E A, ſimul ſumpti, æquales ſunt quatuor angulis rectis.

c Prop. 12.



COROLLARIVM II.

Et ſi ad idem punctum conueniant quotcunque rectę lineę, efficientes circa ipſum punctum tres, vel quatuor, ſeu plures, quàm quatuor, angulos: erunt illi omnes, ſimul ſumpti, quatuor rectis ęquales.

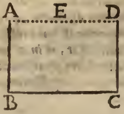
Pro ſequentibus propoſitionibus pręmitti debet ſequens pronunciatum, quod inter euidentiſſima principia repoſuerunt Arabes, Clauius, a *Guldinus,* b *& alij.*

a in Prop. 28 lib. 1.
b centrobar. lib. 4.

AXIOMA XIV.

Si recta linea, in ſuo extremo ſemper perpendiculariter conſtituta ſuper aliam rectam lineam, moueatur in tranſuerſum in eodem plano: alterum punctum extremum tranſlatæ rectæ lineę in eius fluxu rectam lineam deſcribet.

Si enim recta linea A B, perpendiculariter erecta ſuper rectam lineam B C, intelligatur tranſlata, in eodem plano, verſus C, hac lege, vt punctum B extremum ipſius A B ſemper contingat rectam lineam B C; pariterque, vt A B dum transfertur ſemper conſtituat cum B C angulos rectos. Manifeſtum eſt lineam A E D, deſcriptam à pũcto A fluente, eſſe rectam; eo quod fluxus puncti A per A E D non eſt vacillans, non flexuoſus, ſed ęquabilis, & vniformis; veluti non flexuoſus, ſed ſimplex, ęquabilis, & vniformis eſt fluxus breuiſſimus puncti



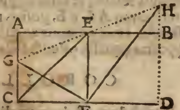
puncti B, conſtituentis rectam lineam B C. Nam recta linea A B (quæ eſt menſura diſtantiarum omnium punctorum lineæ A E D à recta B C) dum mouetur non vacillat, cùm ſemper perpendiculariter, idest æqualiter inclinata perſeueret, ſuper rectam B C. Quare omnia puncta, in linea A E D contenta, eadem ordinata diſpoſitione, & eadem æquabilitate, abſque vlla depreſſione, aut eleuatione diriguntur; quemadmodum directè ſe conſequuntur puncta rectæ lineæ B C in fluxu breuiſſimo, qui rectitudinem eius conſtituit. Et re vera cogitari nequit aliam lineam præter rectam habere poſſe conditiones, ſupra expoſitas, & omnia eius puncta æqualiter diſtantia à recta linea B C: & propterea linea A E D recta erit.

PROPOS. XIV. THEOR. VII.

Si ad duas rectas lineas in vno plano iacentes eadem recta perpendicularis fuerit, quælibet alia recta perpendicularis ad vnam earum æqualis erit illi, & erit quoque perpendicularis ad reliquam. Vocentur illæ duæ rectæ inter ſe Parallelæ. & recta linea ad eas perpendicularis, vocetur diſtantia parallelarum.

Sit recta linea E F perpendicularis ad vtramque rectam A B, & C D, exiſtentes in eodem plano; & ducta à puncto A *a* quælibet *a* recta A C perpendicularis ad C D, ſecans eam in C. *a Prop. 11.*

Dico primo A C æqualem eſſe ipſi E F. Si enim hoc verum non eſt, ſecetur *b* recta G C æqualis E F; & ſecetur *c* F D æqualis C F, & intelligatur G C, transferri vſque ad D, ſemper perpendiculariter conſtituta in pũcto C ſuper rectam C D; neceſſariò *d* punctum G in eius fluxu rectam G E H deſcribet, quæ per punctum E tranſibit; quandoquidem G C, & E F æquales ponuntur. Et tandem iungantur *e* rectæ lineæ G F, & H F. Quoniam duo triangula G C F, & H D F circa angulos rectos C, & D latera æqualia habent G C ipſi H D; & C F ipſi D F. *f* Ergo baſes G F, & H F æquales ſunt; pariterque anguli G F C. H F D inter ſe ſunt æquales; ſuntque anguli C F E, D F E recti. Igitur *g* reſidui anguli *b Prop. 3.* *c Prop. 3.* *d Axio. 14.* *e Poſt. 1.* *f Prop. 4.* *g Axio. 3.*



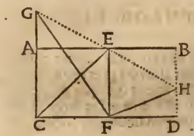
E guli

guli G F E, & H F E æquales ſunt; & circa eos latera G F, H F ęqualia oſtenſa ſunt, & E F eſt commune. Ergo *h* anguli G E F, & H E F ęquales ſunt inter ſe; ideoque *i* recti. Erat autem angulus A E F, ex hypotheſi rectus. Igitur anguli G E F, & A E F ęquales inter ſe ſunt; pars, & totum. quod eſt impoſſibile. Nulla ergo alia recta præter ipſam A C eſſe poteſt æqualis ipſi E F.

h Prop 4.

i Prop. 10.

Dico ſecundò angulum C A E rectum eſſe. Quoniam recta C F perpendicularis eſt ad duas rectas A C, & E F; & alia recta A E perpendicularis eſt ad vnam ipſarum E F. Ergo, vt prius erit recta A E ęqualis ipſi C F, quæ eſt perpendicularis ad vtranque. Ducatur poſtea recta E C. Quia in triangulis A E C, & F C E latus A C ipſi F E eſt ęquale; atque A E ipſi F C ęquale; & baſis C E communis. Ergo *k* recto angulo E F C ęqualis eſt angulus C A E. Quare angulus C A E rectus erit. vt propoſitum fuerat. Vocentur rectę lineæ A B, & C D Parallelę. & E F perpendicularis ad vtranque: vocetur Diſtantia parallelarum.



k Prop 7.

COROLLARIVM I.

In quadrilatero, in quo tres anguli recti ſunt, erit reliquus angulus rectus; & latera oppoſita inter ſe ęqualia. In quadrilatero enim A C F E, poſitis tribus angulis C, F, & E rectis: oſtenſus *l* fuit reliquus angulus A rectus quoque: & latera oppoſita ęqualia oſtenſa fuerunt.

l in Prop. præceden.

COROLLARIVM II.

Manifeſtum eſt duas parallelas A B, & C D non concurrere, licet producantur in infinitum ad vtraſque partes. propterea quod vbique inter ipſas intercipi poteſt aliqua perpendicularis, vt eſt A C, vel B D, quæ ſemper ęqualis eſſe debet ipſi E F, ſcilicet diſtantię parallelarum.

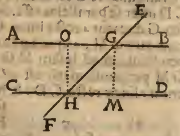
PRO-

PROPOS. XV. THEOR. VIII.

Eucl. 29. I.

Recta linea, ſecans duas parallelas, efficiet alternos angulos ęquales; externum ęqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes; atque internos, & ad eaſdem partes duobus rectis ęquales efficiet.

Sint rectę lineę A B, & C D inter ſe parallelę; ſecenturque à recta linea E F in punctis G, & H. Dico primò alternos angulos A G F, & D H E ęquales eſſe inter ſe. Ducatur *a* à puncto G recta G M perpendicularis ad rectam C D, ſecans eam in M, atque à puncto H ducatur H O perpendicularis ad A B, ſecans eam in puncto O. Et quoniam duę rectę A B, & C D ſunt parallelæ; & G M perpendicularis eſt ad vnam ipſarum C D: erit *b* quoque eadem G M perpẽdicularis ad reliquam A B; eſtque H O perpendicularis ad A B. Ergo *c* in quadrilatero G M H O, quod tres angulos rectos habet: erunt oppoſita latera O G, & H M æqualia; pariterque inter ſe æqualia erunt latera O H, & G M. Quare in triangulis O H G, M G H duo latera G O, & H O æqualia ſunt duobus lateribus H M, & G M, ſingula ſingulis; Eſtque baſis G H communis. Ergo *d* anguli alterni D H G, & A G H æquales ſunt inter ſe; pariterque eorum *e* complementa ad duos rectos, ſcilicet anguli B G H, & C H G æquales erunt inter ſe.



a Prop. 11. · *b Prop. 14.* · *c Corol. 1. Prop. 14.* · *d Prop. 7.* · *e Prop. 5.*

Dico ſecundò externum angulum E G B æqualem eſſe interno oppoſito, & ad eaſdem partes conſtituto, angulo G H D. Quoniam *f* propter parallelas A B, & C D ęquales ſunt inter ſe alterni anguli D H G, & A G H, eſtque *g* angulus E G B æqualis eidem angulo A G H ad verticem eius. Ergo *h* angulus E G B æqualis eſt angulo G H D.

f ex part. 1. huius. · *g Corol. prop 5.* · *h Axio. 1.*

Dico tertiò duos angulos A G H, & C H G internos, & ad eaſdem partes, eſſe æquales duobus rectis. Quoniam propter parallelas *i* ſunt duo anguli alterni A G H, & D H G æquales inter ſe, addito *k* communi angulo C H G: erunt duo anguli A G H, & C H G, ſimul ſumpti, æquales duobus angulis D H G, &

i part. 1. huius. · *k Axio. 1.*

Ibid. 11. G; & C H G; ſed *l* hi, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis. Ergo duo anguli A G H, & C H G duobus rectis ſunt æquales. Quæ omnia demonſtrari debebant.

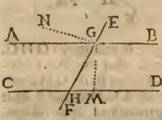
Eucl. 27. & 28. 1.

PROPOS. XVI. THEOR. IX.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens, alternos angulos ęquales inter ſe fecerit; aut externum angulum æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes; aut duos internos ad eaſdem partes fecerit æquales duobus rectis: parellelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

In duas rectas lineas A B, & C D incidens, vtcunque, recta linea E F, ſecans eas in punctis G, & H, efficiat primò alternos angulos A G H, & D H G æquales inter ſe. Dico A B, & C D inter ſe parallelas eſſe. Si enim hoc verum non eſt, à puncto G ducatur *a* recta linea G M perpendicularis ad C D, ſecans eam in M; atque à puncto G educatur *b* recta G N perpendicularis ad ipſam M G. Et quoniam eadem recta linea G M perpendicularis eſt ad duas rectas lineas C D, & N G: erunt *c* lineæ rectæ C D, & N G parallelæ inter ſe, quæ, cùm ſecentur, vtcunque, à recta linea E F in punctis G, & H: erunt *d* duo anguli alterni N G H, & D H G ęquales inter ſe; ſed angulus A G H ſuppoſitus fuit æqualis eidem angulo D H G. Ergo *e* anguli N G H, & A G H æquales ſunt inter ſe, pars, & totum. *f* quod eſt abſurdum. Nulla ergo alia recta linea N G præter ipſam A B eſſe poteſt parallela ipſi C D.

a Prop. 11. *b Prop. 10.* *c Prop. 14.* *d Prop. 15.* *e Axio. 1.* *f Axio. 7.*



Sit ſecundò externus angulus E G A ęqualis interno, oppoſito, & ad eaſdem partes conſtituto angulo G H C. Dico rectas A B, & C D pariter parallelas eſſe. Quoniam angulus C H G ſupponitur æqualis angulo A G E, eſtque *g* angulus B G H æqualis eidem angulo A G E ad verticem. Ergo *h* duo anguli C H G, & B G H alterni, inter ſe æquales erunt; & ideò ex prima parte huius, rectę lineæ A B, & C D parallele erunt.

g Corol, prop. 3. *h ax. 1.*

Sint tertiò duo anguli interni ad eaſdem partes A G H, & C H G ęquales duobus rectis. Dico pariter rectas A B, & C D parallelas eſſe. Quoniam duo anguli A G H, & C H G ſupponun-

ponuntur equales duobus rectis; & ſunt *i* duo anguli D H G, & C H G deinceps, equales duobus rectis. Ergo duo anguli A G H, & C H G, ſimul ſumpti, equales ſunt duobus angulis D H G, & H H G, & ablato *k* communiter angulo C H G: erunt duo anguli A G H & D H G alterni, equales inter ſe; & ideò, ex prima parte, recte A B, & H D parallele erunt. Que omnia oſtendenda fuerant.

i Prop. 13.

k Axio. 3.

COROLLARIVM.

Eucl prop. 31. I.

Conſtat, qua ratione à dato puncto duci poſſit recta linea, que parallela ſit alteri date. Si enim à puncto dato *l* ducatur perpendicularis ad datam rectam lineam; & *m* ab eodem puncto altera perpendicularis eleuetur ſuper alteram perpendicularem eductam: erit poſtrema perpendicularis parallela date recte linee. Nam in conſtructione prime partis huius propoſitionis à puncto G ducta eſt recta G M perpendicularis ad rectam C D; atque altera G N perpendicularis ad ipſam M G, oſtenſa fuit parallela ipſi C D.

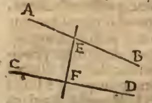
l Prop. 11.

m prop 10.

SCHOLIVM.

Cùm in demonſtrandis paſſionibus parallelarum methodum, à maioribus receptam, reliquerim, opere pretium fuerit rationes hic paucis afferre, quare noua via procedendum eſſe duxerim. Exiſtimarunt Ptolomeus, Poſſidonius, Geminus, Proclus, & alij antiquiores, referente Proclo, Euclidem optimè quidem, & ſcientificè proceſſiſſe in ſuis elementis; ſed aliquo pacto vacillaſſe in demonſtrandis paſſionibus parallelarum. Communis ſententia eſt defectum predictarum demonſtrationum pendere ab imperfectione principiorum aſſumptorum: eſtque primùm parallelarum definitio, que talis eſt: Duæ rectæ lineæ in eodem plano infinitè extenſæ, & non concurrentes ex vtraque parte vocentur parallelæ. *Et patet hanc paſſionem eſſe valdè remotam, & incomprehenſibilem. nam extenſio illa infinita ad vtramque partem abſque concurſu concipi non poteſt; neque conueniens eſt, vt à paſſione remota difficili, & non euidenter cognita, deducantur in propoſ. 27. 28. & 29. alie paſſiones magis manifeſte. magis enim comprehenſibile eſt poſſe duos angulos alternos inter ſe equales eſſe, quam duas rectas lineas, in infinitum productas, ad vtraſque partes non concurrere. In illa enim intellectus facilè acquieſcit, in hac verò confunditur, & allucinatur. Quare potius deberet aſſumi paſſio illa equalitatis angu-*

angulorum alternorum, vt principium in demonſtratione, quàm iſtas. Hanc ob cauſam Poſſidonius aliam definitionem parallelarum excogita-
lib.2.c.11. *uit, vt refert Proclus, dixit enim* duas rectas eſſe inter ſe parallelas, cùm ęquali interuallo ſemper inter ſe diſtant. *Quę paſſio non videtur prima, & euidentiſſima omnium, quę huic ſubiecto competunt. Facilius enim quis percipiet angulos alternos ęquales eſſe poſſe, quàm infinitas perpendiculares ab vna recta linea ad aliam duci poſſe, quę omnes inter ſe ęquales ſint. Alterum principium, ab Euclide aſſumptum, eſt petitio quinta apud Proclum, Campanum, & Commandinum, & axioma XIII. apud Clauium, vbi dicitur:* Si in duas rectas lineas, in eodem plano exiſtentes, tertia recta incidens duos angulos internos, & ad eaſdem partes minores duobus rectis fecerit: illæ rectæ concurrent, ad partes, vbi anguli duobus rectis ſunt minores. *Vt ſi recta E F, ſecans duas rectas A B, & C D fecerit duos angulos*



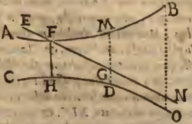
B E F, & D F E, ſimul ſumptos, minores duobus rectis; neceſſariò A B, & C D productę tandem concurrent in aliquo puncto ad partes B, & D. Antiqui (referente Proclo) negant hanc V. petitionem indemonſtrabi-
lib.4 c.2.3. *liter euidentem eſſe, quia eius conuerſum demonſtratur in 17. propoſ. Euclid. & Proclus ipſe, atque Geminus, Poſſidonius, & Ptolomęus eam penitus è principiorum numero reyciunt, ne dùm quia hoc non eſt cognitum lumine naturę; ſed etiam quia annuere duas lineas coincidentię certum ſignum non eſt. nam alię lineę annuunt, & non coincidunt, vt Apollonius, & Nicomedes docent. reperiri enim poſſunt quędam lineę, quarum ſpatium, & ſi magis ac magis ſemper ſtringatur, & coanguſtetur (vt contingit ipſis E B, & F D verſus partes B, & D) nunquam tamen illę in vnum punctum conueniunt, licet infinitè extendantur.*

Patefacta principiorum inſufficientia Antiquos, cupientes corrigere, iam dictas, demonſtrationes noua principia aſſumpſiſſe, ex quibus parallelarum paſſiones demonſtraſſe veriſimile eſt; quæ cùm non extent, coniectari poteſt eas forſan firmiores non fuiſſe us, quę à Proclo aſſeruntur; aliàs non omnino eas neglexiſſet. Poſſidonius verò, & Geminus, qui nouam definitionem parallelarum excogitarunt, neſcimus pariter, quo alio principio aſſumpto Euclidis propoſitiones correxerint, vel innouarint; ſed eadem probabilitate perſuaſi, & conſiderata imperfectione definitionis parallelarum, ab ipſis adductę, iudicare licebit non fuiſſe eorum demonſtrationes Euclidianis firmiores. Poſtea Ptolomęus in lib. cuius titulus: Rectę lineę, productę ad partes, vbi duo anguli minores ſunt duobus rectis coincidunt; retenta definitione Euclidis, & relictis demon-

ſtratio-

ſtrationibus propoſitionum einſdem, tantummodo eius petitionem V. è principiorum numero reiecit; & vt Theorema duplici via demonſtrauit. Ptolomęi progreſſus, à Proclo relatus, tanto viro dignus non videtur; & meritò eum carpit Proclus; ait enim captioſam, & peruerſam eſſe vtramque Ptolomæi demonſtrationem Petitionis V. Lib.4.c.23.

Tandem Proclus affert nouam demonſtrationem einſdem Petit. V. prẹaſſumpſit autem pronunciatum, antiquitùs receptum ab Ariſtotele, & ab alijs, & eſt tale: Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ, angulum facientes, infinitè producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedit. *Procli demonſtratio reijcitur à Clauio, & ab alijs eo nomine, quòd aſſumptum pronunciatum Peripateticum incertum eſt non minùs, quàm Euclidis petitio V. At ego admiſſo pronunciato Peripatetico adhuc imperfectam Procli demonſtrationem eſſe cenſeo. Sint enim duę rectę lineę A B, & C D, quę perpendiculares ſint ad eandem rectam F H: erunt illę parallelę inter ſe; & recta E G ſecet vnam ex parallelis A B in F: erunt duo anguli interni ad eaſdem partes D H F, & G F H minores duobus rectis. Modò Proclus putat, quòd recta E G, ſecans vnam A B, neceſſariò ſecare debet reliquam ex parallelis C D. Ait enim:* Duæ rectæ lineæ F B, F G, quæ ab vno puncto F infinitùm producuntur omni magnitudine maiorem habent diſtantiam. Quapropter hæc quoque, quæ tanta eſt, quantum eſt interuallum, quod inter parallelas adiacet. Cùm igitur maiorem diſtantiam ab inuicem diſtiterint harum parallelarū diſtantia, ipſa F G ipſam C D ſecabit. Lib.1,cel.



Patet ergo, ex adducto textu, in Procli demonſtratione aſſumi debere ſuppoſitionem, ſeu pronunciatum, ſine quo non licet quicquam concludere; quòd nimirum interuallum parallelarum A B, & C D vnicum eſt, ſeu omnes perpendiculares, quę ab omnibus punctis rectę A B ducuntur ad reliquam ex parallelis C D ęquales ſunt inter ſe. quod ſanè incertum eſt; cùm nec ex definitione rectarum, non concurrentium, nec ex propoſ. 27. & 28. iam demonſtratis, deduci poſſit. Quinimmò dicere quis poſſet, quòd huiuſmodi interualla ſemper magis ac magis augentur ad vtraſque partes puncti F, ita vt perpendicularis M D maior ſit, quàm F H; & B O adhuc ſit maior, quàm M D: pariterque affirmari poſſet, quòd licet M G, diſtantia duarum rectarum F B, & F G, continentium angulum B F G, maior ſit, quàm interuallum parallelarum in puncto F, ſcilicet quàm F H: nihilominùs M G minor eſt, quàm perpendicularis M D;

quę

quę determinat interuallum earundem parallelarum in puncto M. Neque oppoſitum affirmari poteſt abſque demonſtratione: quandoquidem probabiles, & coniecturales rationes reſpuit Geometria. Et rurſus licet B N, diſtantia earundem rectarum, angulum B F N continentium, maior ſit, quàm parallelarum interuallum M D; nihilominùs B N minor cenſebitur, quàm B O; quæ menſura eſt interualli parallelarum in puncto B; & ſic vlterius. Quare licet recta F G ſecet vnam ex parallelis A B, non propterea ſecabit reliquam C D. & ideo licet duo anguli G F H, & D H F minores ſint duobus rectis, non conuenient neceſſariò rectæ F G, & C D ad partes G D. Quapropter Procli demonſtratio inſufficiens erit.

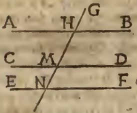
In prop 28. lib 1. *Huic defectui Clauius, vt occurreret, ſedulò dedit operam, vt iam dictam Euclidis V. petitionem firmiùs, ac ſolidè demonſtraret. Et ſanè negandum non eſt feliciter ſuum finem aſſecutum fuiſſe, premiſſo eodem principio, ſatis manifeſto, quod in XIV. Axiom. retulimus cum paucis alijs. Hoc autem Arabicum quendam fetiſſe idem Clauius refert; ſed duplici cauſa Arabicam, & Clauianam correctionem non retineo: prima eſt, quia vtuntur definitione parallelarum Euclidis, quę habet paſſionem ignotam, quoad eius poſſibilitatem; vel ſaltem non eſt prima, & notiſſima omnium, quæ ſubiecto definito competunt: altera eſt, quia aſſumpto eodem pronunciato XIV. & alijs valde prolixè, & laborioſè poſt multas propoſitiones petitio quinta demonſtratur; ex qua poſtea paſſiones parallelarum deducuntur. propter has omnes rationes conatus ſum, ſi non ſolidiùs, ſaltem faciliùs, & breuiùs paſſiones earundem parallelarum oſtendere, quàm hactenus factum eſt.*

Eucl. 30. I.

PROPOS. XVII. THEOR. X.

Quæ eidem rectę lineę parallelę ſunt, inter ſe quoque parallelę erunt.

Sint eidem A B, tam C D, quàm recta E F parallelę. Dico C D, & E F & inter ſe parallelas eſſe.



Secentur omnes à recta G N in punctis H, M, N. Quoniam C D, & A B parallelę ponuntur. Ergo a alterni anguli A H M, & D M H æquales ſunt inter ſe. Rurſus quoniam E F, & A B ſunt parallelæ. Ergo b alterni anguli A H N, & F N H æquales ſunt inter ſe. Ergo c duo anguli H M D, & M N F ęquales ſunt inter ſe, cùm ſint æquales vni tertio

a prop. 15.
b prop. 15.
c Axio. 1.

tertio A H M. ſed in duabus rectis C D, & E F, cùm externus angulus H M D æqualis oſtenſus ſit angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes M N F. Ergo *d* duæ rectæ C D, & E F inter ſe quoque parallelę erunt. Quapropter, &c. *d Prop. 16.*

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, quòd, ſi duæ rectę, conuenientes in vnico puncto, ſint parallelę vni eidem rectę lineę, conſtituent illę vnicam rectam lineam, nec ſe ſecabunt.

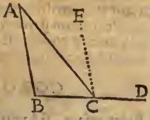
Nam cùm *e* inter ſe quoque ſint parallelæ, & ſe ſe tangant, vnicam rectam lineam conſtituere debent. *e Prop. 17*

PROPOS. XVIII. THEOR. XI. *Eucl. 32. I.*

Cuiuſcunque trianguli, vno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et tres interni anguli eius æquales ſunt duobus rectis.

Cuiuslibet trianguli A B C, cuius latus B C productum ſit ad D. Dico primò externum angulum D C A æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis A, & B, ſimul ſumptis. Ducatur *a* ex C recta C E parallela ipſi A B. Quoniam A C ſecat ambas parallelas A B, & C E. Ergo *b* angulus E C A æqualis eſt alterno angulo A. Pari ratione B D, ſecans vtraſque parallelas C E, & A B, faciet *c* externum angulum D C E æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes angulo B. Quare duo anguli D C E, & E C A ſimul; ideſt *d* angulus externus D C A, ęqualis erit duobus angulis B, & A, ſimul ſumptis. *a Coroll. prop. 16. b prop. 15. c prop. 15. d Axio. 8.*

Dico ſecundò angulos A, B, & A C B internos eiuſdem trianguli, ſimul ſumptos, duobus rectis eſſe æquales. Quoniam D C A, externus, oſtenſus eſt æqualis duobus internis, & oppoſitis A, & B. Ergo addito *e* communi angulo A C B, erunt duo anguli D C A, & A C B ſimul, æquales tribus angulis A, B, & A C B. ſimul ſumptis; ſed *f* duo anguli D C A, & A C B æquales ſunt duobus rectis. Ergo tres *g* anguli A, B, & A C B ſimul, æquales ſunt duobus rectis. Quod erat, &c. *e Axio. 2. f prop. 12. g Ax. 1.*



Eucl. prop. 16.17. I.

COROLLARIVM I.

Hinc patet externum angulum quolibet interno, & oppoſito maiorem eſſe; Et duos internos angulos, cuiuslibet trianguli, minores eſſe duobus rectis. Quandoquidem externus oſtenſus eſt ęqualis duobus internis, & oppoſitis, ſi ſimul ſumptis: atq; tres, ſimul ſumpti, quantitatem duorum rectorum complent.

COROLLARIVM II.

Patet etiam tres angulos, cuiuslibet trianguli, ęquales eſſe tribus angulis, ſimul ſumptis, alterius trianguli.

COROLLARIVM III.

Patet triangulum non poſſe plures angulos rectos, aut obtuſos habere, quàm vnum. Vnde quotieſcunque in triangulo vnus angulus rectus fuerit, vel obtuſus, neceſſariò reliqui duo acuti erunt; quia reliqui duo, ſimul ſumpti, cùm ſint complementum duorum rectorum, erunt ęquales, aut vni recto, aut acuto; ideoque vterque erit aut pars recti, aut pars acuti; & propterea erunt acuti.

COROLLARIVM IV.

Patet etiam in triangulo iſoſcele rectangulo angulos ad baſim eſſe ſemirectos.

COROLLARIVM V.

Patet etiam quemlibet angulum trianguli equilateri eſſe tertiam partem duorum rectorum; & angulum eius externum eſſe tertiam partem quatuor rectorum: quia ſextuplum anguli interni ęquale eſt quatuor rectis; & duplum interni anguli, ideſt externus, tertia pars eſt quatuor rectorum.

COROLLARIVM VI.

Patet etiam, ſi à vertice trianguli iſoſcelis ad baſim perpendicularis ducatur, verticis angulum ſecari bifariam; eo

quod

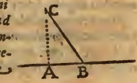
quod duo triangula efficiuntur, quę duos angulos rectos habent prope perpendicularem, & h duos alios ęquales ad baſim iſoſcelis. Ergo i qui ad verticem ſunt, ęquales inter ſe erunt. h prop 6. i Corol. 2. prop. 18.

COROLLARIVM VII.

Manifeſtum eſt etiam, quòd ſi à vertice trianguli ęquilateri ad baſim perpendicularis ducatur: ſectus erit angulus verticis bifariam; & quęlibet medietas eius tertia pars erit vnius recti, propterea quod eius duplum, ſcilicet k angulus trianguli ęquilateri, eſt tertia pars duorum rectorum. k Cor 5. prop. 18.

S C H O L I V M I.

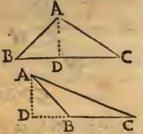
Facilè colligitur ex hac propoſitione, quòd ſi à puncto ſublimi C recta C B, cadens ſuper aliam rectam ſubiacentem A B, conſtituat angulos inęquales, perpendicularis ab eodem ſublimi puncto ſuper ſubiacentem lineam ducta, cadet ad partes anguli acuti C B A. nam cùm debeat conſtitui triangulum C B A rectangulum in A, l reliquus internus C B A neceſſariò acutus eſſe debet. l Corol. 5. prop. 18.



COROLLARIVM VIII.

Hinc patet, ſi ad baſim trianguli duo anguli acuti fuerint: perpendicularem, à vertice, cadere intra triangulum.

Et à vertice ad baſim trianguli ambligonij perpendicularis, ab angulo acuto cadens, extra triangulum ad partes anguli obtuſi pertinget.

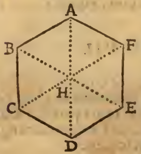


S C H O L I V M II. Procli lib. 4.

Omnes anguli interni, cuiuslibet figurę rectilineę, ſimul ſumpti, ſunt ęquales tot angulis rectis, bis ſumptis, quot ſunt eius latera, demptis quatuor rectis. Patet hoc, nam intra quamlibet figuram rectilineam

 A B D F

A B D F ſumi poteſt aliquod punctum H, à quo ad angulos figuræ coniungi rectæ lineæ poſſunt H A, H B, H C, &c. vnde figura vniuerſa diſtribuetur in tot triangula, quot ſunt eius latera; propterea quod latus cuiuslibet figuræ erit baſis vnius trianguli, vt A B baſis eſt trianguli A B H, & ſic reliquæ omnes; & vertices omnes prædictorum triangulorum in eodem puncto H, intra figuram aſſumpto, conueniunt. Ergo l cùm tres anguli cuiuslibet trianguli ſint æquales duobus rectis, debent toties ſumi duo recti, quot ſunt triangula, ideſt quot ſunt eorum baſes, ſeu quot ſunt latera Polygoni. Ex hiſce omnibus angulis rectis tolli debent omnes vertices triangulorum, eo quod hi fiunt in medio figuræ, ſcilicet in H; ſed m omnes anguli, qui fiunt circa vnicum punctum H, æquales ſunt quatuor rectis. Ergo ex illa ſumma angulorum rectorum, demptis quatuor, reliqui erunt æquales omnibus angulis figuræ rectilineæ.

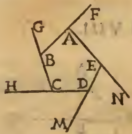


l prop. 18.

m Coroll. 2 prop. 13.

Patet etiam, quòd, ſi latera cuiuslibet Polygoni extra figuram ex vna parte tantùm producantur, conſurgent anguli omnes externi F A E, G B A, H C B, &c. in quolibet Polygono, ſimul ſumpti, æquales quatuor rectis. Quoniam n quilibet externus F A E cùm ſuo interno E A B ſummam duorum rectorum complet. Ergo quot ſunt anguli, ſiue quot ſunt latera in Polygono, toties ſumi debent duo anguli recti, vt ſint æquales omnibus internis, & externis Polygoni; ſed (vt dictum eſt) omnes interni ſunt æquales tot binis rectis, quot ſunt eius latera, demptis quatuor rectis. Ergo quatuor recti ſunt æquales omnibus externis angulis, ſimul ſumptis.

n prop. 13.



COROLLARIVM IX.

Hinc manifeſtum eſt, ſi fuerint duæ figuræ, equè multos angulos habentes: eſſe omnes angulos vnius figuræ, ſimul ſumptos, æquales omnibus angulis alterius, ſimul ſumptis.

COROLLARIVM X.

Et ſi in eiſdem figuris omnes anguli, vno excepto eorum, qui

qui in vna figura ſunt, ęquales fuerint omnibus angulis alterius figurę abſque vno, erunt illi duo anguli relicti æquales inter ſe. eo quod omnes anguli vnius figuræ, ſimul ſumpti, ęquales ſunt omnibus angulis alterius, ſimul ſumptis.

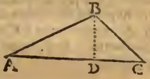
PROPOS. XIX. THEOR. XII.

Eucl. 18. I.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

Sit latus A C maius latere A B in triangulo A B C. Dico angulum B maiorem eſſe angulo C. Ex maiore latere A C ſecetur [a] A D equalis A B minori; iungaturque B D. [b] Ergo triangulum B A D iſoſcelium erit; ideoque anguli ſupra baſim A B D, & A D B inter ſe ęquales: Eſt autem angulus A B C maior angulo A B D, totum ſcilicet ſua parte. Ergo angulus A B C maior quoque erit angulo A D B. eſt [c] verò angulus A D B externus in triangulo B D C; & ideò maior angulo C interno, & oppoſito. Ergo multo magis angulus A B C maior erit angulo C. Quare maiori lateri A C opponitur angulus maior A B C. Quod erat oſtendendum.

a Prop 3.
b Prop. 6.



c Corol. 1. Prop. 18.

COROLLARIVM.

Hinc patet in triangulo, cuius tria latera inęqualia ſunt, (quod vocatur Scalenum) tres angulos eſſe inæquales; quandoquidem tria eius latera inęqualia ſunt. In iſoſcele verò, quando baſis minor eſt vtrolibet laterum ęqualium, tunc angulus verticalis minor eſt vtrolibet angulorum, qui ad baſim ſunt. ſi verò baſis maior eſt, pariter angulus verticalis maior erit.

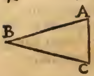
PROPOS. XX. THEOR. XIII.

Eucl. 6. & 19. I.

Angulis ęqualibus eiuſdem trianguli opponuntur latera ęqualia. Et maiori angulo maius latus opponitur.

Sit primò in triangulo A B C angulus A æqualis angulo C. Dico latus C B ęquale eſſe lateri A B. Si enim hoc verum non

eſt,



eſt, ſit B C maius, aut minus, quàm A B. Ergo, ex præcedenti, angulus A maior, aut minor erit, quàm C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo C B maius eſt, aut minus, quàm A B. Quare illi eſſe çquale neceſſe eſt. Quod erat primo loco oſtendendum.

Sit ſecundò angulus A maior, quàm B. Dico latus B C maius eſſe latere A C, Si enim hoc verum non eſt: erit B C, aut çquale, aut minus, quàm A C. Sit çquale, ſi fieri poteſt. Ergo a anguli B, & A çquales erunt inter ſe: poſitus autem fuit angulus A maior, quàm B. Ergo erunt æquales, & inequales. quod eſt abſurdum. Non ergo B C çquale eſt ipſi A C.

a Prop. 6

Sit tertiò minus, ſi fieri poteſt. Ergo ex pręcedenti minori lateri B C opponitur minor angulus A, quod rurſus eſt contra hypotheſin. ſupponebatur enim angulus A maior, quàm B. Non ergo latus B C minus eſt latere A C, ſed neque çquale oſtenſum fuit. Ergo B C maius erit, quàm A C. Quapropter, &c.

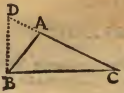
Eucl. 20. I.

PROPOS. XXI. THEOR. XIV.

Cuiuslibet trianguli duo latera tertio ſunt maiora; & differentia duorum laterum minor eſt reliquo; atque tria latera, ſimul ſumpta, maióra ſunt duplo vnius: ſed minora ſunt duplo duorum laterum.

Sit quodlibet triangulum A B C. Dico primò duo quælibet eius latera, vt B A, & A C, ſimul ſumpta, maiora eſſe tertio latere B C. Producto latere C A verſus A, ſecetur a D A çqualis ipſi B A, iungaturque recta B D. Quoniam in triangulo B A D duo eius latera B A, & D A çqualia ſunt inter ſe.

a prop. 3.
b Prop. 6.

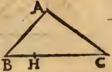


Ergo b anguli ad baſim D, & A B D çquales ſunt inter ſe; eſtque angulus C B D maior partiali angulo A B D. Igitur angulus C B D maior eſt angulo D; & propterea c in triangulo C B D erit latus C D, angulum maiorem ſubtendens, maius latere B C: ſed D C çqualis eſt duabus rectis lineis B A, & A C, ſimul ſumptis (eo quod çqualibus B A, & D A additur communis

c Prop. 20.

nis A C) Ergo duo latera B A, & A C, ſimul ſumpta, maiora ſunt tertio latere B C.

Secundò ex maiore latere B C ſecetur d C H æqualis A C; d Prop. 3. eritque B H differentia duorum laterum B C, & C A. Dico iam B H minorem eſſe, quàm B A. Quia duo latera B A, & C A maiora ſunt, quàm B C; ſi ab eis tollantur æquales H C, & C A: erit e B A, reſiduum maioris aggregati, maior, quàm B H. e Axio. 4.



Tertiò dico tria latera B A, A C, & C B, ſimul ſumpta, maiora eſſe, quàm duplum ipſius B C. Quoniam duo B A, & A C maiora ſunt, quàm B C, addita f communiter B C: erunt tria latera B A, A C, & C B maiora, quàm latus B C, bis ſumptum. f Axio. 4.

Quartò dico tria latera B C, B A, & C A, ſimul ſumpta, minora eſſe, quàm duplum ipſius B A, vnà cum duplo ipſius C A. Quia B C minus eſt, quàm B A, vnà cum C A; additis communiter duobus B A, & C A: erunt g tria latera B C, B A, & C A, ſimul ſumpta, minora, quàm B A, bis ſumptum, vnà cum C A, bis ſumpto. Quæ demonſtranda erant. g Axio. 4.

SCHOLIVM.

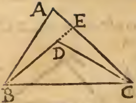
Ne dùm in lateribus cuiuslibet trianguli; ſed in quibuslibet tribus quantitatibus, quarum duæ quælibet tertia ſint maiores, idem verificatur. Erit enim quarumlibet earum differentia minor tertia; & tres, ſimul ſumptæ, maiores erunt duplo vnius; ſed minores duplo duarum reliquarum.

PROPOS. XXII. THEOR. XV. Eucl. 21. I.

Si ab extremitatibus vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra ipſum conueniant, hæ, ſimul ſumptæ, minores erunt duobus reliquis trianguli lateribus, ſimul ſumptis; maiorem verò angulum continebunt.

Sit triangulum A B C, & à punctis B, C concurrant intra triangulum duæ rectæ B D, & C D in D. Dico B D, C D ſimul, minores eſſe, quàm B A, C A ſimul ſumptæ; ſed angulum B D C maiorem eſſe angulo B A C. Producta B D, ſecet A C in E: erunt a B A, & A E, ſimul ſumptæ, maiores, a prop. 21.

quàm



b *Axio.4.* quàm B E; & addita communi E C: erunt *b* duæ B A, & A E C maiores duabus B E, & E C ſimul.

c *Prop. 21.* Rurſus *c* C E, & E D ſimul, maiores ſunt, quàm C D; & addita communi D B: erunt *d* duæ C E, & E D B ſimul, maiores duabus C D, & D B.

d *Axio. 4.* Quare A B, & A C ſimul ſumptæ, multo maiores ſunt, quàm B D, & D C ſimul.

e *Coroll. 1. prop. 18.* Poſtea *e* angulus B D C externus in triangulo E D C maior eſt interno, & oppoſito C E D: hic verò externus eſt in triangulo E A B; & ideo *f* maior interno, & oppoſito angulo A.

f *Coroll 1. prop. 18.* Quare angulus B D C multo maior erit, quàm angulus A. Quod erat oſtendendum.

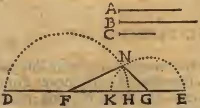
Eucl. 22. I.

PROPOS. XXIII. PROBL. VIII.

Datis tribus rectis lineis, triangulum conſtituere, cuius ſingula latera ſingulis datis rectis lineis ęqualia ſint. Oportet autem, vt vnaquęque datarum linearum minor ſit reliquarum aggregato.

Sint tres rectæ lineę A, B, & C, quarum duæ quælibet reliqua ſint maiores. Debet conſtitui triangulum, habens tria latera ęqualia tribus datis rectis lineis. Sumatur quælibet recta linea D E indefinita, & in ea ſecetur *a* D F æqualis ipſi A. &

a *prop. 3.*



ex reliqua ſecetur F G æqualis B; & tandem ſecetur G E æqualis C. Deinde *b* centro G, interuallo G E circulus E N K deſcribatur. Et centro F, interuallo F D alius circulus D N H deſcribatur. Et

b *Poſt. 3.*

quia ſingulæ rectę D F, F G, & G E æquales ſunt ſingulis A B, & C; atque vnaquaque harum minor eſt aggregato duarum reliquarum. Ergo duæ quælibet ipſarum, D F, F G, G E maiores ſunt tertia. Eſtque circuli D N H diameter D H dupla radij D F, & E K dupla ipſius G E. Igitur *c* D H, & E K ſimul, maiora ſunt, quàm D E (quæ eſt ſumma omnium triū);

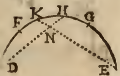
c *Scol. prop. 21.*

&

& ablata d cõmuniter D H, erit E K maior, quàm H E, quę eſt d Axio. 4.
reſiduũ ipſius D E. Ergo punctum H cadit vltra pũctum K ad
partes E. Poſtea e quia D H dupla ipſius D F minor eſt, quàm e Schol.
omnium trium ſumma D E. Ergo pũctum H figuræ D N H F Prop. 22.
cadit inter puncta E, & K diametri K E, ideſt intra figuram K
N E G; & propterea duæ peripheriæ D N H, & E N K ſe ſecãt
antequam ad pũcta H & K pertingant. ſe ſecent in puncto N,
& ducantur rectæ F N, & G N. Et quia f F N æqualis eſt ipſi D
F, cùm à centro ad peripheriam circuli D N H ducantur; eſt- f Axio. 12.
que recta A æqualis eidem D F. Igitur g F N æqualis eſt ipſi
A. Similiter G N, & G E ſunt radij eiuſdem circuli; & ideo h ę- g Axio. 1.
quales: eſtque recta C æqualis eidem G E. Ergo i N G æqua- h Axio. 12.
lis eſt ipſi C; atque recta F G facta eſt ęqualis ipſi B. Igitur
trianguli F N G tria latera ęqualia ſunt tribus datis rectis li- i Axio. 1.
neis A, B, & C. Quod erat propoſitum.

SCHOLIVM.

Conſtat, ſi tres lineę D F, F G, G E, deinceps poſitę, fuerint peripherię eiuſdem circuli, quę efficiant arcum D F E minorem integra circuli peripheria; & duę quęlibet ex illis maiores ſint tertia peripheria; ſitque D H, dupla ipſius D F, atque E K dupla ipſius E G. atque coniungantur rectę lineę D H, E K; neceſſariò hę duę rectę lineæ ſe ſecabunt intra circulum, antequam ad puncta H, & K pertingant. Nam punctum H lineę D F H, cadit, vt in propoſitione oſtenſum eſt, inter puncta K, & E alterius lineę K G E, ideſt intra figuram K G E N. Et quoniam k K G E dupla ipſius G E minor



eſt, quàm D K E. Ergo punctum D non cadit inter puncta H, & K. Rurſus quia D K E minor eſt peripheria integra circuli. Ergo punctum D non cadit inter E, & H: ideoque punctum D cadit extra figuram K G E K. Quare duę lineę D N H, & E N K ſe ſecabunt antequam ad puncta H, & K pertingant. & propterea intra circulum conueniunt. k Schol. Prop. 22.

Pręſens Problema dicitur determinatum, eo quod non poteſt fieri niſi contrahatur eius vniuerſalitas in illis verbis: oportet autem, &c. *Nam abſque tali determinatione Problema eſſet impoſſibile. Proprium eſt ergo determinationis deſtruere illam vniuerſalitatem ſuppoſitionis. Non enim licet ex tribus quibuslibet datis rectis lineis triangulum conſtituere, niſi habeant, iam dictam conditionem; propterea l quod in quolibet triangulo duo quęlibet eius latera reliquo debent eſſe maiora: nec ob-* l Prop. 21.

 ſtat,

ſtat, quòd abſque illa determinatione multoties triangulum fieri poſſit. Nam propoſitiones demonſtratiuę debent ſemper vniuerſaliter conſiderari; & ideo cùm in hypotheſi dicitur: Datis tribus rectis lineis: *ſenſus eſt qualeſcunque ſint prędictę lineę, ideſt variata infinitis modis menſura ipſarum, triangulum conſtitui debet.*

Eucl prop. 23. I.

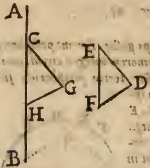
PROPOS. XXIV. PROBL. IX.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo æqualem angulum conſtituere.

Sit data recta linea A B, ad punctum eius C, debet conſtitui angulus ęqualis dato angulo E. Ducatur, vtcunque, recta D F, vt fiat triangulum D E F; poſtea *a* fiat triangulum C G H, cuius latera æqualia ſint tribus lateribus trianguli D E F, ſingula ſingulis, ita vt ad punctum C conueniant duo latera, C G quidem æquale ipſi D E, & C H ęquale ipſi E F (fieri enim hoc poterit, cùm duo quælibet latera trianguli E D F reliquo ſint maiora), iam in his duobus triangulis omnia latera vnius ęqualia ſunt omnibus lateribus alterius, ſingula ſingulis. Ergo *b* angulus C æqualis eſt angulo E (qui à lateribus G H, & D F æqualibus ſubtenduntur). Et hoc erat faciendum.

a Prop. 23.

b Prop. 7.



COROLLARIVM.

Patet eadem conſtructione fieri poſſe triangulum ſimiliter æquale cuilibet dato triangulo. Nam ſi datum fuiſſet triangulum D E F, conſtructum eſſet alterum triangulum C G H illi ęquale, æquilaterum, & æquiangulum.

Eucl. 26. I.

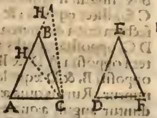
PROPOS. XXV. THEOR. XVI.

Si in duobus triangulis fuerint duo anguli vnius ęquales duobus angulis alterius, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quæ ſiue æqualibus angulis adiaceant, ſiue æqua-

æqualibus angulis oppoſita ſint; erunt triangula ſimiliter æqualia.

In triangulis A B C, & D E F ſint latera A C, & D F ęqualia inter ſe, & angulus B A C æqualis angulo D, atque angulus A B C æqualis angulo E, ſiue ſint anguli B A C, & D ęquales: pariterque anguli A C B, & F inter ſe æquales. Patet a in vtroque caſu tertium angulum vnius trianguli æqualem eſſe postremo angulo alterius trianguli. Dico latera A B, & D E eſſe ęqualia; pariterque latera C B, & F E inter ſe ęqualia eſſe. Si enim hoc verum non eſt, ſit A B maius, aut minus, quàm D E; & ſecetur b A H ęquale D E, iungaturque recta C H. Et quia circa ęquales angulos A, & D latera C A, & F D ęqualia ſunt; pariterque latera H A, & E D ſunt ęqualia. Igitur c in triangulis A C H, & D F E erunt anguli A C H, & F ęquales inter ſe. Erat autem angulus A C B ęqualis eidem angulo F. Ergo d duo anguli A C H, & A C B ęquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod e eſt impoſſibile. Quare recta linea B A non eſt maior, neque minor, quàm E D, ſed ęqualis erit. Eadem ratione latera C B, & E F ęqualia erunt. Quod erat probandum.

a Coroll. 2. prop. 18. *b Prop. 3.* *c Prop. 4.* *d Axio. 1.* *e Axio. 9.*

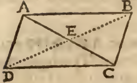


PROPOS. XXVI. THEOR. XVII.

Eucl. 34. I

Quadrilaterum, cuius oppoſita latera ſunt parallela, habet angulos oppoſitos, & latera oppoſita ęqualia inter ſe; atque diameter ipſum ſecat bifariam; ſed diametri viciſſim ſe ſe bifariam ſecant. Vocetur talis figura Parallelogrammum. Et perpendicularis, à ſummitate ad oppoſitam baſim ducta, vocetur Altitudo Parallelogrammi.

Sit quadrilaterum B D, cuius diameter A C, ſintque latera A B, & D C parallela inter ſe; paritérq; latera A D, B C ſint parallela. Dico primò latera A B, & D C inter ſe, nec non latera A D, & B C ęqualia eſſe; Secundò angulos B, & D inter ſe, nec non angulos B A D, B C D inter ſe ęquales eſſe; Tertiò triangula A B C, & A D C, ſecta à diametro, ęqualia eſſe; Quartò diametros A C, & B D ſe ſe mutuò bifariam



ſecare in E. Quoniam in quadrilatero A C latera oppoſita A B, & D C ſunt parallela, & ſecantur ab A C. Ergo *a* anguli alterni B A C, & D C A æquales inter ſe ſunt. Similiter quia *b* rectæ A D, B C ſunt parallelę, & ſecantur à recta A C. Ergo alterni anguli B C A, & D A C æquales ſunt inter ſe. Quare in triangulo B A C duo anguli ſupra baſim A C æquales ſunt duobus angulis trianguli D A C, ſuper eandem baſim adiacentibus, ſinguli ſingulis; & ideo *c* erunt triangula B A C, & D A C ſimiliter ęqualia; & propterea quadrilaterum ipſum B D, ſectum erit à diametro A C bifariam. Poſtea latera A B, & D C, oppoſita angulis æqualibus alternis inter ſe; nec non latera oppoſita A D, & B C ęqualia erunt. Deinde duo anguli oppoſiti B, & D æquales erunt, quia eidem baſi A C opponunrur. Rurſus quia æqualibus angulis D A C, & B C A adduntur anguli æquales B A C, & D C A. Ergo *d* toti anguli oppoſiti D A B, & B C D æquales inter ſe erunt. Tandem quia in triangulis A B E, & C D E duo anguli B A E, & D C E æquales oſtenſi ſunt, & anguli A E B, & C E D ad verticem ſunt *e* æquales; & duo latera A B, & C D, ſubtendentia angulos æquales, oſtenſa ſunt æqualia. Ergo *f* A E ipſi E C æqualis eſt; nec non B E ipſi E D æqualis eſt. Quare patet propoſitum. Vocetur figura A B C D parallelogramma. Et recta à ſupremo latere A B ad oppoſitam baſim D C perpendiculariter ducta; vocetur Altitudo parallelogrammi.

a Prop. 15.
b prop. 15.
c prop. 25.
d Axio. 2.
e Coroll. prop 5.
f prop. 25.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quòd, ſi fuerint duo parallelogramma, quę habeant vnum angulum vni angulo ęqualem, erunt reliqui anguli vnius parallelogrammi æquales reliquis angulis alterius parallelogrammi, ſinguli ſingulis. Nam *g* duo quilibet oppoſiti æquales ſunt inter ſe, & interni, *h* & ad eaſdem partes duobus rectis ſunt æquales.

g prop. 26.
h prop. 15.

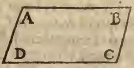
Eucl. 33. I.

PROPOS. XXVII. THEOR. XVIII.

Si in quadrilatero anguli oppoſiti inter ſe, aut latera oppoſita fuerint ęqualia, vel duo latera oppoſita tantùm ſint paralella,

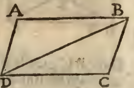
rallela, & æqualia, vel duo latera oppoſita parallela, & duo anguli oppoſiti æquales, ſiue duo latera oppoſita parallela, & triangula facta à diametro, ęqualia, ſiue duę diametri mutuò ſe ſecēt bifariam: erit ſemper Parallelogrāmum.

Sint primò in quadrilatero B D anguli B, & D inter ſe, pariterque A, & C æquales. Dico B D parallelogrammum eſſe. Quoniam A, & C æqualibus, ſi addantur anguli æquales D ipſi A & B ipſi C: erunt a anguli A, & D ſimul, ęquales duobus C, & B: ſed quatuor b anguli cuiuslibet quadrilateri æquales ſunt quatuor rectis. Ergo duo anguli A, & D ſimul, duobus rectis ſunt ę quales; & ſunt interni ad eaſdem partes. Ergo c A B, & D C parallelæ ſunt. Eadem ratione A D, & B C parallelæ erunt; ideoque ſpatium B D parallelumgrammum erit.



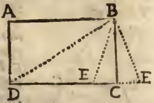
a *Axio.* 2.
b *Scol.* 2. *prop.* 18.
c *Prop.* 16.

Sint ſecundò duo latera oppoſita A B, & D C ęqualia inter ſe, pariterque D A, & B C ęqualia. Dico ſpatium eſſe parallelogrammum. Ducta diametro B D, erunt in triangulis A B D, & C B D ſingula latera ſingulis lateribus ęqualia, & B D latus commune. Ergo d erunt ſimiliter ęqualia, ideoq; anguli oppoſiti A, & C ęquales erūt, atq; A D B, C B D inter ſe, nec nō anguli A B D, C D B ęquales erūt inter ſe. Quare e duo anguli A D B, & CDB, ſimul ſumpti, atq; C B D, & A B D, ſimul ſumpti, ęquales erunt inter ſe. Igitur ex prima parte huius ſpatium ipſum erit parallelogrammum.



d *Prop.* 7.
e *Axio.* 2.

Tertiò ſint latera oppoſita A B, & C D parallela, & ęqualia tantummodo, idem ſequetur. Si enim hoc verum non eſt, ducta f B E parallela ipſi A D, fiat parallelogrammum A D E B. Cadet ergo recta B E citra, aut vltra punctum C. Ergo g latus D E æquale erit oppoſito A B, ſeu B C, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alibi, quàm in C puncto, cadit B E parallela ipſi A D. Quare ſpatium A C parallelogrammum eſt.



f *Coroll.* *prop.* 16.
g *prop.* 26.

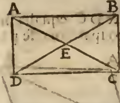
Quartò ſint A B, & D C parallelę, & anguli ADC, & A B C

ęqua-

b Coroll ęquales, idem ſequetur. Sin minùs, ducta b B E parallela ipſi
prop.16. D A non in C cadente, fiat parallelogrammum A F. Ergo
angulus i A B E ęqualis erit oppoſito angulo D, ſiue illi ę-
i prop 26. quali A B C, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo
B E parallela ipſi D A alibi, quàm in C cadit. Vnde patet
propoſitum.

Quintò ſint A B, & D C parallelę, & triangula A D B, &
k Corollar. C D B ęqualia, idem ſequetur. Sin minùs ducta k B E paral-
prop.16. lela ipſi D A, non in C cadente, fiat parallelogrammum E A.
Ergo l triangulum E B D ęquale erit triangulo B A D, ſiue
l prop.26. illi ęquali triangulo B D C, pars, & totum, quod eſt abſur-
dum. Non ergo B E parallela ipſi D A alibi, quàm in C cadit.
Quapropter, quadrilaterum A C eſt parallelogrammum.
Quod erat oſtendendum.

Sextò ſint diametri A C, B D ſectę bifariam in E, erit quo-
que A C parallelogrammum. Nam duo

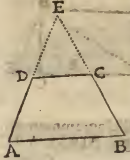


m Coroll. prop.5. triangula A E B, C E D circa ęquales an-
gulos ad verticem m E habent latera ę-
n prop. 4. qualia, A E ipſi E C, & B E ipſi E D. Er-
o prop.16. go n anguli A B E, & C D E alterni ęqua-
les inter ſe erunt; ideoque o A B, D C in-
p prop.26. ter ſe parallelę erunt. Eadem ratione A
D, & B C parallelę erunt; & propterea ſpatium p A B C D pa-
rallelogrammum erit. Quę erant oſtendenda.

SCHOLIVM.

Si in quadrilatero duo latera oppoſita ſint parallela, & duo reliqua latera oppoſita inter ſe ſint ęqualia, non erit neceſſariò parallelogrammum.

q Coroll. prop.16. *Sit triangulum iſoſceles E A B, & ducatur q D C parallela baſi A B. Et quoniam trianguli iſoſcelis r duo anguli E A B, E B A ęquales ſunt*
r prop.6. *ſupra baſim; eſtque ſ angulus externus E D C ę-*
ſ prop. 15. *qualis interno, & oppoſito E A B, propter parallelas A B, D C; eademque ratione angulus E C D*
t Axio.1. *ęqualis eſt angulo E B A: Ergo t duo anguli E D C, E C D ęquales inter ſe ſunt; & propterea u ſub-*
u prop 20. *tenſa latera D E, C E ęqualia erunt. Quare, x ſi*
x Axio.2. *ab ęqualibus lateribus E A, E B trianguli iſoſce-lis E A B tollantur ęqualia latera D E, C E, erunt reſidua D A, B C ęqualia; & propterea quadrilaterum A B C D, habens duo latera oppoſita A B, D C parallela; & duo reliqua latera A D, B C ęqua-*

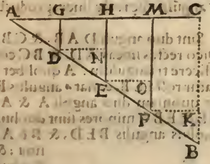


æqualia, non erit parallelogrammum; cum y latera A D, B C conue- y *Corol. 2. prop. 14.*
niant in E.

PROPOS. XXVIII. PROBL. X. *Eucl. 9. VI*

Datam rectam lineam in quotcunq; ęquales partes diuidere.

Sit data recta linea A C, ſecanda in datam multitudinem partium æqualium. Ducatur à puncto A recta A B, efficiens in A quemlibet angulum C A B, & in A B ſecetur quodlibet ſegmentum A D, & fiant a ſucceſſiuè partes D E, E F. F B æquales ipſi A D, quæ tot ſint, quot partes ęquales in A C, debent contineri; iungaturque recta B C, & à punctis D, E, F intra triangulum A B C ducantur b rectæ D G, E H, F M parallelæ baſi B C, quæ ſecent rectam A C in G, H, M. Dico rectam A C ſectam eſſe in partes æquales imperatas. à punctis D, E, F ducantur c rectæ D N, E O, F K parallelæ ipſi A C, ſecantes proximas parallelas in N O K. Et d quoniam, propter parallelas oppoſitas, ſpatium G D N H parallelogrammum eſt: erit e D N æqualis ipſi G H; cùmque in triangulis D N E, & A G D externus f angulus N D E æqualis ſit interno, & oppoſito angulo A, propter parallelas D N, A C, atque g internus angulus N E D æqualis ſit externo, & oppoſito angulo G D A, propter parallelas H E, G D; atque duo latera adiacentia D E, A D ęqualia ſint facta. Ergo h latera D N, & A G ęqualia ſunt inter ſe: erat autem G H æqualis eidem D N. Igitur i G H ęqualis eſt ipſi A G. Eadem ratione H M, & M C oſtendentur ęquales eidem A G. Quare A C ſecta erit in tot partes ęquales A G, G H, H M, M C, quot ſunt partes imperatæ, contentæ in recta A B. Et hoc erat faciendum.



a *Prop. 3.*
b *Coroll. prop. 16.*
c *Corol. prop. 16.*
d *Prop 26.*
e *Prop. 26.*
f *prop. 15.*
g *prop. 15.*
h *prop 25.*
i *axio. 1.*

COROLLARIVM.

Conſtat ex conſtructione huius propoſitionis, quod, ſi latus trianguli diſtributum fuerit in quotcunque partes ęquales,

les, atque à diuiſionibus ducantur rectæ lineæ parallelæ baſi, diuidetur ab eis reliquum latus in totidem partes æquales.

Nam trianguli A B C ſectum fuit latus A B in partes æquales A D, D E, E F, & F B, & oſtenſum fuit latus A C ſectum in totidem partes æquales à parallelis D G, E H, F M, & B C.

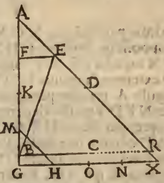
Eucl. poſt. V *vel axioma* XIII.

PROPOS. XXIX. THEOR. XIX.

Si duo anguli interni ad eaſdem partes eiuſdem lineæ rectæ, ſecantis duas alias rectas, fuerint minores duobus rectis angulis: illę rectę lineę, productæ, triangulum conſtituent.

Sint duo anguli D A B, & C B A minores duobus rectis. Dico rectas lineas A D, & B C concurrere ad partes D, C, & efficere triangulum. A quolibet puncto E, infra A, coniungatur recta E B; & fiat *a* angulus B E F ęqualis angulo E B C. Et quoniam duo anguli A, & A B C, ideſt tres anguli A A B E, & E B C minores ſunt duobus rectis. Ergo *c* minores ſunt duobus angulis B E D, & B E A, qui duobus rectis ęquales ſunt; & eſt *d* angulus D E B ęqualis duobus angulis A, & A B E internis, & oppoſitis in triangulo A B E. Ergo *e* reliquus angulus A E B maior erit angulo E B C; & propterea angulus B E F (qui ęqualis erat angulo E B C) erit minor angulo A E B; & ideo recta linea E F ſecabit rectam lineam A B, inter puncta A, & B. Deinde *f* ſecentur rectæ F K, K M, & M G, ſingulę ęquales ipſi A F, quouſque fiat A G maior,

a prop. 24. *c prop* 11. *d prop.* 18. *e Axio.*4. *f prop.* 3.



quàm A B. Poſtea ducatur *g* G X parallela ipſi F E, vel B C, & F E menſuret ipſam G X, productam, toties, quoties A F metitur ipſam A G, & coniungatur *h* recta A X, & à punctis F, K, M, ducantur, intra triangulum A G X, rectæ M H, K O, F N parallelę ipſi A X, ſecantes latus G X in punctis H, O, N. Patet *k* latus G X fore diuiſum in tot partes inter ſe ęquales G H, H O, O N, N X, quot ſunt partes ęquales ipſi A F, contentę in A G; ſed quoties A F menſurabat ipſam A G, toties F E metiebatur rectam G X. Igitur rectæ F E, & G H

g Corol. prop. 16. *h Poſt* 1. *i Coroll. prop.* 16. *k Coroll. prop* 28.

ęquè

ęquè metientur eandem rectam G X ; & propterea *l* G H æqualis erit ipſi F E ; erat autem M G ęqualis ipſi A F , atque angulus *m* M G H æqualis angulo A F E (eo quod G H , & F E ſunt parallelæ) . Ergo *n* angulus G M H ęqualis eſt angulo F A E. ſed, *o* propter parallelas A X, & M H, eſt angulus G A X æqualis eidem angulo G M H. Ergo *p* angulus F A E ęqualis eſt angulo G A X; congruunt autem duæ rectæ F A , & G A. Ergo *q* duæ rectæ E A & X A ſibi mutuò congruunt; ideoque recta A E, producta, conueniet cum recta G X in puncto X. Tandem cùm in triangulo G A X à puncto B ducatur recta B C, intra ipſum triangulum , parallela baſi G X . Igitur producta ſecabit reliquum latus A E X, vt in pũ cto R. Quod erat oſtendendum.

l ex axio. 1.
m prop. 15.
n prop. 4.
o prop. 15.
p Axio. 1.
q Axio. 9.

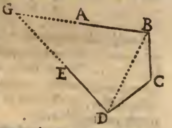
COROLLARIVM.

Patet , ſi recta linea ſecuerit vnam parallelarum , ſecare quoque alteram .

Nam oſtenſa eſt recta A D, ſecans vnam parallelarum F E, ſecare quoque reliquam B C.

SCHOLIVM.

Hinc colligitur , quòd , ſi quatuor rectę lineę ſe ſecuerint , ita vt conſtituant tres angulos internos ad eaſdem partes , qui ſimul ſumpti , minores ſint quatuor rectis , poſtremę rectę conuenient , & quadrangulum efficient .



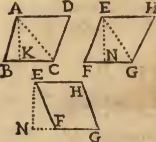
Rectę lineę A B , B C , C D , & D E efficiant tres angulos B, C , & D , internos , & ad eaſdem partes minores quatuor angulis rectis . Dico poſtremas rectas lineas B A & D E, productas , concurrere ad partes A & E vt in G, & efficere quadrilaterum . Coniungatur recta linea B D . Quoniam tres anguli A B C, C, & C D E, minores ſunt quatuor rectis angulis, ſuntque r tres anguli trianguli B C D ęquales duobus rectis. Igitur ſ duo reſidui anguli A B D, & E D B , ſimul ſumpti , minores erunt duobus rectis ; & propterea t rectę B A, & D E productę, conuenient vt in G .

r prop. 18.
ſ Axio. 4.
t prop. 29.

PROPOS. XXX. THEOR. XX.

Si in duobus parallelogrammis vnus angulus vni angulo æqualis fuerit, atque baſes inter ſe, pariterque altitudines æquales fuerint: etiam parallelogramma erunt æqualia inter ſe.

In duobus parallelogrammis B D, & F H ſint anguli B, & F æquales, & baſes B C, F G æquales, atque perpendiculares, ſeu altitudines A K, E N æquales. Dico parallelogramma B D, F H ęqualia eſſe. Ducantur diametri A C, E G. Quia in triangulis A B K, E F N ſunt anguli B & F ęquales, & duo anguli recti K & N, atque latera A K, E N ęqualia, quę oppoſita ſunt angu-



a prop. 25. lis ęqualibus. Ergo a B A, F E ęqualia ſunt. Et quoniam circa angulos ęquales B. F, latera A B, E F ſunt ęqualia, atque latera B C,

b prop 4. F G ſunt pariter ęqualia. Igitur b triangula A B C, E F G ę-

c prop. 26. qualia ſunt, & c eorum dupla parallelogramma B D, F H ęqualia quoque erunt. Quod, &c.

S C H O L I V M.

Facilè colligitur, quòd in duobus triangulis, aut parallelogrammis, ſi vnus angulus vni angulo ęqualis fuerit, aut ambo ſimul ęquales ſint duobus angulis rectis, & latera eleuata fuerint ęqualia: erunt perpendiculares à ſummitatibus triangulorum, vel parallelogrammorum, ad eorum baſes ductæ, ęquales inter ſe. Vocentur dictę perpendiculares Altitudines triangulorum.

In triangulis, & parallelogrammis A B C, & E F G ſint anguli B & F ęquales inter ſe, vel ambo ſimul ſint ęquales duobus rectis, & latera eleuata A B & E F ſint æqualia; & à ſummitatibus A, & E ducan-

d prop 11. *tur d perpendiculares A K, & E N, quę ſecent baſes B C, & F G in K, & N. Dico perpendiculares A K, E N ęquales eſſe. Et primò, ſi anguli*

e prop. 10. *B & F recti ſint, patet e ipſamet latera ęqualia A B, E F perpendicularia eſſe. At ſi anguli B & F ſint ęquales duobus rectis; cùm f etiam an-*

f prop 13. *guli deinceps, facti à recta E F ſuper N F G, ſint ęquales duobus rectis,*

g Axio. 3. *ablato g communi, remanent anguli B, & E F N ęquales inter ſe; &*

ideo

ideo h ambo acuti, aut ambo obtuſi: cadunt verò i perpendiculares ac partes acutorum angulorum. Igitur efficientur duo triangula A B K, E F N, quę habent angulos B & F ęquales; nec non angulos rectos K & N ęquales; atque latera A B, E F, angulis rectis oppoſita, etiam ęqualia inter ſe. Ergo k perpendiculares A K, & E N ęquales erunt. Vocentur triangula, vel parallelogramma A B C, & E F G æquè alta.

h prop. 12. i Schol. 1. prop. 18. k prop. 25.

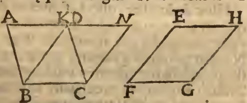
PROPOS. XXXI. THEOR. XXI.

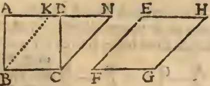
Eucl 35. 30. I.

Si duo parallelogramma non ęquiangula baſes ęquales, & altitudines ęquales habuerint, erunt ęqualia.

In parallelogrammis A C, E G, non ęquiangulis, ſint baſes B C, F G ęquales, & parallelogrammorum altitudines ſint etiam equales. Dico parallelogramma A C, & E G eſſe ęqualia. Fiat *a* angulus C B K ęqualis angulo F, & ducatur *b* C N parallela B K & producta A D ſecet *c* parallas B K, C N in K & N; factumque *d* erit parallelogrammum B C N K, cùm etiam A N ſit parallela B C. Quoniam in triangulis A B K, & D C N eſt *e* angulus C D N externus ęqualis interno, & oppoſito angulo B A K (propter parallelas A B, C D); pariterque *f* internus angulus C N D ęqualis eſt externo B K A, in parallelis C N, B K, & duo *g* latera B A, C D, ſubtendentia ęquales angulos, ſunt inter ſe æqualia; cùm ſint latera oppoſita parallelogrammi A C. Ergo *h* triangula A B K, & D C N æqualia ſunt inter ſe.

a prop. 24. b Coroll. prop. 16. c Coroll. prop 29. d prop. 26. e prop 15. f prop. 15. g prop. 26. h prop. 25.

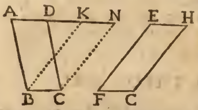




Et (in primo, & ſecundo caſu) addita *i* communiter figura B C D K, erit parallelogrammum A C ęquale parallelogrammo B N. At (in tertio caſu) *k* ablato communiter triãgulo D O K, erunt quadrilatera A B O D & N K O C ęqualia inter ſe; additoque *l* communi triangulo B O C, erit pariter parallelogrammum A B C D ęquale parallelogrammo B C N K. Iam quia parallelogramma B N, & A C ſunt inter eaſdem paral-

i Axio. 2. k Axio. 3. l Axio. 2.

m prop.16. lelas A N & B C, erunt m æquè alta; cùm omnes perpendiculares, ſeu diſtantiæ parallelarum A N & B C. çquales ſint. Poſita autem fuerunt parallelogramma F H & A C æquè alta. Igitur parallelogramma B N & F H çquè alta ſunt, & habent baſes B C F G çquales inter ſe, atque angulos K B C, & F çquales inter ſe. Ergo parallelogrammum n F H æquale



n prop. 30. eſt parallelogrammo B N: Sed oſtenſum fuit parallelogrammum A C çquale eidem parallelogrammo B N. Igitur o parallelogramma A C, & F H æqualia ſunt inter ſe.

o Axio.1.

COROLLARIVM.

Hinc deducitur, quòd, ſi fuerint duo parallelogramma æquè alta, quorum baſes inæquales ſint, parallelogramma erunt inçqualia; & maius erit illud, cuius baſis maior eſt. Nam in parallelogrammis çquè altis, poſita æqualitate baſium, parallelogramma p æqualia ſunt; ſed ſi vna æqualium baſium augeatur, neceſſariò parallelogrammum augetur. Ergo illud parallelogrammum maius erit, cuius baſis maior eſt.

p prop. 31.

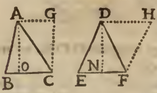
Eucl. 37. 38. 1.

PROPOS. XXXII. THEOR. XXII.

Triangula, quorum baſes çquales, & altitudines ſunt æquales, erunt æqualia inter ſe.

Triangula A B C, & D E F habeant baſes B C, E F æquales inter ſe, & perpendiculares, ſeu altitudines A O, D N à punctis A, D ad baſes B C & E F ductæ, ſint æquales. Dico triangula A B C, D E F eſſe inter ſe çqualia. Ducta a A G parallela ipſi B C, & C G facta parallela ipſi B A, fiat parallelogrammum A B C G. Pari ratione compleatur parallelogrammum E D H F. quoniam parallelogramma B G, & E H habent baſes B C, E F æquales, & altitudines æquales (cùm perpendiculares

a Coroll. prop.16.



res A O & D N ſint altitudines parallelogrammorum B G & E H). Ergo [b] parallelogramma B G & E H ęqualia ſunt inter ſe,& eorum ſemiſſes [c] pariter æquales erunt: Suntque [d] triangula A B C, & D E F dimidia parallelogrammorum B G, & E H. Igitur triangula A B C, & D E F æqualia ſunt inter ſe. Quod &c. b prop. 31. c Axio. 5. d prop. 26.

COROLLARIVM I.

Deducitur, quòd, ſi duo triangula fuerint æquè alta, & baſes inæquales ſint, erunt triangula ipſa inæqualia; maiuſque erit illud, cuius baſis maior eſt.

COROLLARIVM II. Eucl. 41. I.

Manifeſtum eſt, ſi parallelogrammum, & triangulum habuerint baſes ęquales, atque altitudines æquales, eſſe parallelogrammum duplum ipſius trianguli.

Habent enim parallelogrammum B G, & triangulum D E F baſes B C & E F æquales, atque altitudines etiam æquales; & oſtenſum fuit [e] triangulum A B C æquale triangulo D E F. Ergo parallelogrammum B G (quod [f] duplum eſt ipſius triãguli A B C) erit quoque duplum alterius trianguli D E F. e prop. 32. f prop. 26.

COROLLARIVM III.

Patet etiam, quòd, ſi fuerint duo triangula ęquè alta, & baſis vnius aliquoties metiatur baſim alterius, triangulum quoque toties reliquum triangulum metietur, quoties baſis baſim metitur.

Si enim in triangulis A B C, D E F, æquè altis, ipſa baſis E F metiatur aliquoties baſim B C, vt verbi gratia quater, atque à punctis diuiſionum M, R, & S ad verticem A coniungantur rectæ lineæ: diſtributum erit triangulum A B C in tot triãgula A B M, A M R, A R S, A S C, quot ſunt baſes ęquales B M, M R, R S, & S C. Suntque prædicta triangula ęquè alta, tum inter ſe, tum ipſi D E F (quandoquidem à puncto A perpendicularis ad baſim B C ducta, altitudo communis eſt & ęqualis altitudini



dini trianguli D E F & omnes baſes ęquales ſunt. Igitur

h prop. 32. triangula g omnia, in quę diſtribuitur triangulum A B C, ęqualia ſunt, tum inter ſe, cùm ipſi triangulo D E F. Et propterea toties triangulum D E F metietur ipſum triangulum A B C, quoties illius baſis E F, huius baſim B C metitur.

Eucl. 42. I.

PROPOS. XXXIII. PROBL. XI.

Dato triangulo, ęquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo.

Sit datum triangulum A B C, & angulus D. Deſcribendum eſt parallelogrammum æquale ipſi triangulo, habens angu-

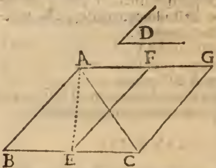
a prop. 9. lum ęqualem angulo D. Secta a B C bifariam in E, ducatur

b prop. 24. A E, & angulus C E F fiat b ęqualis angulo D, & C G duca-

c Coroll. prop. 16. tur c parallela ipſi E F, & A G ducatur parallela ipſi

d prop. 26. B C. Patet d ſpatiū C F parallelogrāmum eſſe: quod cùm habeat eandem baſim E C cum triangulo A C E; ſintque prędicta ſpatia inter eaſdem parallelas

e Coroll. 2. prop. 31. A G, & E C. Ergo e parallelogrammum E G duplum eſt trianguli A E C; f Sed



f prop. 32. triangulum A B E ęquale eſt triangulo A E C (cùm baſes B E, & E C ęquales, & eandem altitudinem habeant). Ergo duo triangula A B E, & E A C ſimul, ideſt triangulum A B C, duplum erit trianguli A E C. Erat autem ſpatium E G duplum

g Axio. 5. quoque eiuſdem trianguli A E C. Ergo g parallelogrammum E G ęquale eſt triangulo A B C. Quapropter dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

Eucl. 46 I.

PROPOS. XXXIV. PROBL. XII.

Super data recta linea quadrilaterum deſcribere, cuius omnia latera ęqualia ſint inter ſe, atque omnes eius anguli recti ſint. Vocetur talis figura Quadratum.

Sit data recta A B, ſupra quam figura imperata deſcribenda

da eſt. Eleuetur *a* C A perpendicularis ſuper A B; & *b* ſecetur *a Prop. 10.*
C A ęqualis ipſi A B; ducaturque *c* C D parallela ipſi A B, & *b prop. 3.*
B D parallela alteri A C, conueniens *d* cum D C in puncto D. *c Coroll. prop 16.*
Dico ſpatium parallelogrammum A D eſſe ęquilaterum, &
ęquiangulum. Quia A D parallelogrammum eſt. Ergo *e* latus C D ęquale eſt oppoſito lateri A B; ſed eidem A B ex con- *d Coroll. prop. 9.* *e prop 26.*
ſtructione eſt ęquale C A. Ergo *f* C D *f Axio. 1.*
ęquale eſt ipſi C A. Sed *g* rurſus eidem *g prop. 26.*
C A æquale eſt latus illi oppoſitum B
D. Ergo B D ęquale eſt ipſi C D; eſtque *h prop. 26.*
eidem C D ęquale latus *h* oppoſitum A
B. Ergo B D, & A B inter ſe ſunt ęqualia. Patet ergo omnia latera parallelogrammi A D ęqualia eſſe inter ſe. Quoniam *i* verò in parallelogrammo A D *i Prop. 15.*
duo interni anguli A, & C ęquales ſunt duobus rectis; eſtque A, ex conſtructione, rectus. Ergo C quoque rectus eſt. Cùmque *k* anguli *k prop. 26.*
B, & D ſuis oppoſitis ſint ęquales. Ergo erunt anguli B, & D recti quoque. proptereaque anguli omnes figurę A D recti erunt. Deſcripſimus ergo ſuper A B figuram A D, quam oſtendimus eſſe ęquilateram, & ęquiangulam. Vt quęrebatur. Vocetur illa Quadratum.



COROLLARIVM.

Ex poſtrema parte huius propoſitionis colligitur, cuiuslibet parallelogrammi, cuius vnus angulus rectus ſit, eſſe omnes alios angulos eius, rectos.

Finis Libri primi.

Liber

Eucl. lib. III.

LIBER

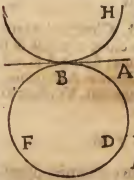
SECVNDVS.

Quoniam in hoc libro conſiderantur primæ, & elementares paſſiones circulorum, propterea prius aliquæ definitiones exponi debent.

DEFINITIONES.

I.

Recta linea circulum tangere dicitur, cùm in circulum incidens, eum non ſecat.



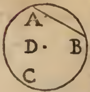
I I.

Circulus circulum tangere dicitur, cùm, Vnius peripheria, in alteram incidens, non ſecat circulum.

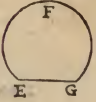
Poſito circulo B F D, ſi aliqua recta A B, incidens in circulum, & producta eum non ſecat, Tangens vocabitur; pariterque peripheria B H, ſi incidat in circulum B D, & eum non ſecet, Tangens appellabitur. At ſi producta circulum ſecat, vocabitur Secans.

I I I.

Recta linea dicitur applicari, ſeu coaptari circulo, cùm eius termini fuerint ad circuli peripheriam.



Vt recta linea A B coaptata erit, vel applicata circulo A B C, quando termini A, & B ipſius rectę lineę fuerint in ipſa peripheria circuli A B.

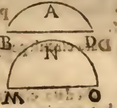


I V.

Segmentum circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

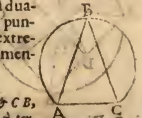
Vt

Vt ſi in circulo ducatur quæuis recta linea B D, vel E G, aut M O, ſecans circulum: erit tam ſpatium B A D, quàm M N O, vel E F G ſegmentum circuli. Hæc autem ſegmenta varia nomina ſortiuntur. Si enim centrum circuli fuerit intra eius ſuperficiem: dicetur ſegmentum maius, vt eſt E F G; ſi verò extra ipſum fuerit, vt in B A D: dicetur ſegmentum minus. Et tandem ſi centrum fuerit in ipſa recta linea ſecante, vt in M N O: tale ſegmentum appellabitur ſemicirculus.



V.

Angulus in ſegmento dicitur ille, qui à duabus rectis lineis, cõcurrentibus in vno puncto circunferentiæ, & terminatis in extremitatibus rectæ lineæ, quæ baſis eſt ſegmenti, continetur.



Vt in ſegmento A B C duæ rectæ lineæ A B, & C B, concurrentes in quolibet eius puncto B, eductæ à terminis A, C, efficiunt angulum A B C, conſtitutum in dicto ſegmento.

A X I O M A.

Duo circuli, quorum radij ſunt inter ſe æquales, erunt æquales inter ſe. Et contra circulorum æqualium radij æquales ſunt.

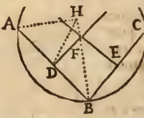
Manifeſtum eſt eos circulos æquales eſſe, quorum ſuperficies ſibi mutuò congruunt: Sed quoniam ſi duæ rectæ lineæ æquales reuoluantur in plano circa alterum eius punctum fixum, quouſque redeant ad locum, vnde moueri cœperant, neceſſe eſt, vt circuli geniti ſibi mutuò congruant, quandoquidem rectæ lineæ reuolutæ ſpatia æqualia determinant, eò quod ipſæ ſemper inter ſe ſunt æquales. Vnde liquet circulos, quorum diametri æquales ſunt inter ſe, eſſe quoque æquales, & è contra. Et, ſi radius vnius circuli, vel diameter maior fuerit radio, vel diametro alterius circuli, erit ille maior iſto circulo, & è contra maior circulus maiorem radium, vel diametrum habebit.

Eucl. 1 & 25. lib. III.

PROPOS. I. PROBL. I.

Data circuli peripheria, reperire centrum circuli, cuius illa eſt peripheria.

Sit data circunferentia A B C, ſiue integra, ſiue non. Debet reperiri centrum illius circuli, cuius A B C eſt peripheria. Sumantur in dicta circunferentia tria quælibet puncta, A, B, & C, & coniungantur rectæ A B, & B C. Poſtea a ambæ biſariam ſecentur in punctis D, & E, à quibus excitentur b perpendiculares, D F quidem ſupra A B, & E F ſuper B C. Et quia tres anguli, ſimul ſumpti, interni, & ad eaſdem partes, ſcilicet duo anguli recti F D B, F E B, vnà cum angulo D B E, minores ſunt quatuor rectis. Ergo c D F, E F conuenient vt in F. Dico iam punctum F concurſus perpendicularium eſſe centrum illius circuli, cuius A B C eſt peripheria. Si hoc verum non eſt, ſit centrum circuli A B C punctum H, aliud, quàm F, concurſus rectarum linearum D F, E F; ideoque punctum H cadet, ſi non extra ambas, ſaltem extra vnam perpendicularium D F. Coniungantur rectæ A H, B H, D H. Quoniam in duobus triangulis A H D, D H B ſunt latera A D, B D æqualia, & D H commune, atque baſes A H, B H æquales, cùm ſint radij circuli. Ergo d anguli A D H, B D H æquales ſunt; ideoque e recti: erat autem angulus A D F rectus. Igitur anguli A D F, & A D H æquales ſunt inter ſe; pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non Ergo punctum H, aliud, quàm F, eſſe poteſt centrum circuli A B C. & propterea ipſum punctum F centrum erit. Quod erat faciendum.



a prop. 9. lib. 1.
b prop. 10. lib. 1.
c Sch. prop. 29. lib. 1.
d prop. 7. lib. 1.
e prop. 10. lib. 1.

Euclid. 5. IV.

S C H O L I V M.

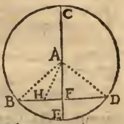
Hinc deducitur artificium, quomodo per tres angulos cuiuslibet trianguli, ſiue per tria quælibet puncta, non in directum poſita, circuli peripheria duci debeat. Si enim per A, B, C ducenda ſit circuli peripheria, ſecari f debent biſariam rectę A B, B C in D, & E, & eleuari g perpendiculares D F, & E F, cõcurrentes in F; intelliganturq; rectę A F, B F, & C F coniunctę. Et quoniam in triangulis A D F, B D F circa angulos rectos

f prop. 9. lib. 1.
g prop. 10. lib. 1.

Hos æquales in D ſunt latera A D, B D æqualia, atque D F commune. Ergo b *A F æqualis eſt F B. Eadem ratione C F æqualis erit eidem F B. Et propterea tres rectæ F A, F B, & F C æquales erunt. ideoque centro F, radio F A circulus deſcriptus tranſibit per puncta A, B, C.* b prop. 4. lib. 1.

PROPOS. II. THEOR. I. Eucl. 3. III.

Si applicatarum in circulo quædam recta linea per centrum extenſa, aliam, non per centrum ductam, bifariam ſecet: & ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque ſecabit.



Per centrum A, circuli D B C, recta C E applicata, diuidat rectam B D, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam C F perpendicularem eſſe ſupra B D. Ductis radijs B A, & A D, erunt in triangulis A F D, & A F B duo latera B F, & F D æqualia, ex hypotheſi, & F A commune, & baſes A B, & A D æquales, cùm ſint radij circuli. Ergo a anguli A F B, & A F D æquales erunt. ideoque b recti. Quod erat primum. a prop. 8. lib. 1. b prop. 10. lib. 1.

Secundò A F, per centrum ducta, ſit perpendicularis ad D B. Dico B D in F bifariam ſectam eſſe. Si enim hoc verum non eſt, ſecetur c B D bifariam in H, alibi, quàm in F; & iungantur rectæ lineæ A H, A B, A D. Et quia A H, per centrum extenſa, ſecat rectam B D bifariam in H. Ergo (ex prima parte) angulus A H B rectus eſt: erat autem angulus A F B rectus. Igitur in triangulo A H F externus angulus A H B æqualis eſt interno, & oppoſito angulo F; Quod d eſt abſurdum. Non ergo B D alibi, quàm in F, ſecari poteſt bifariam. Quare patet propoſitum. c prop. 9. lib. 1. d Coroll. 1. prop. 8. lib. 1.

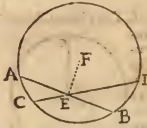
COROLLARIVM.

Ex demonſtratione huius propoſitionis conſtat, in quolibet triangulo iſoſcelio lineam, ſecantem baſim bifariam, eſſe ad eandem baſim perpendicularem. Et è contra, ſi ad baſim perpendicularis fuerit, eam bifariam ſecabit. Nam in triangulo iſoſcelio A B D recta A F, ſecans bifariam baſim B D, oſtenſa eſt perpendicularis ſupra B D: & è contra.

Eucl.4 III. PROPOS. III. THEOR. II.

Si applicatarum in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecent, non per centrum extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.

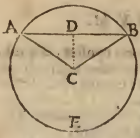
In circulo A B D duæ rectæ lineæ A B, & C D ſe mutuò ſecent in E, ſed non ambæ applicatæ per centrum F ſint ductæ. Dico non poſſe ſe ſe mutuò bifariam ſecare. Si enim vna earum per centrum tranſit, non ſecabitur bifariam ab altera, non tranſeunte per cẽtrum; eo quod ſolummodo in centro diameter bipartitur. Sed ſi neutra per centrum tranſit, ex centro F ducatur recta F E ad concurſum E. oſtendendum eſt rectas A B, & C D in puncto E ſe ſe non ſecari bifariam. Si enim hoc verum non eſt, ſint ambæ in puncto E ſectæ bifariam. Et quoniam F E, per



a prop 2. lib. 2. centrum ducta, ſecat bifariam A B. Ergo a ad angulos rectos eam ſecabit. Eadem ratione recta C D ab ipſa F E ſecabitur ad rectos angulos. Quare anguli F E B, & F E D recti erunt. ideoque æquales inter ſe; pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo ambæ rectæ A B, & C D in puncto E ſe ſe biſariam ſecant. Quapropter, &c.

Eucl. 2. III. PROPOS. IV. THEOR. III.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint, recta linea ipſa puncta coniungens, intra circulum cadet.



In circulo A B E recta linea A B cõiungat duo quælibet pũcta, in eius peripheria aſſumpta, A & B. Dico rectã A B intra circulũ cadere. Sũpto enim quolibet puncto intermedio D in recta AB; à centro C coniungantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam in triangulo iſoſcelio C A B duo latera C A, & C B æqualia ſunt. Ergo a anguli, ſupra baſim,

a prop. 6. lib. 1.

ſint, A. & B æquales inter ſe erunt. Eſt autem angulus C D A externus *b* maior interno B in triangulo C B D. Igitur idem angulus C D A maior erit angulo C A D; & propterea *c* latus A C oppoſitum maiori angulo, maius erit latere D C. Quare recta C D minor erit radio circuli C A; ideoque C D ad peripheriam circuli non perueniet. Vnde punctum D intra circulum exiſtet. Eadem ratione quodlibet aliud punctum ipſius rectæ A B intra circulum cadet, & propterea ipſamet recta linea A B, intra circulum extenſa erit. Quod erat oſtendendum.

b *Coroll. 1. prop. 18. lib. 1.*
c *prop. 20. lib. 1.*

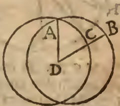
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt rectam lineam, circulum tangentem in vnico puncto ipſum tangere. Nam, ſi in duobus punctis eum tangeret, pars rectæ, inter duo ipſa puncta intercepta, intra circulum caderet: & ſic circulum ſecaret; quod eſt contra hypotheſin.

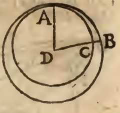
PROPOS. V. THEOR. IV.

Eucl. 5. & 6. III.

Si duo circuli ſe ſe mutuò ſecent, ſiue interius tangant, non erit eorum idem centrum.



Sint duo circuli A B & A C, qui ſe ſe ſecent, vel tangant in puncto A. Dico ipſos non habere idem centrum. Si enim fieri poteſt, ſit vtriuſque centrum D; à quo recta D A ad tactum, vel ſectionem ducatur, & altera D C B, ſecans vtranque peripheriam in punctis C, & B. Quoniam D eſt centrum circuli A B. Ergo *a* radius B D æqualis eſt radio D A. Rurſus quoniam D ponitur centrum circuli A C, erit radius C D æqualis eidem radio D A: ideoque duæ rectæ B D, & C D æquales erunt inter ſe; pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duo circuli A B, & A C commune centrum D habere poſſunt. Quod erat oſtendendum.



a *Axio. 12. lib. 1.*

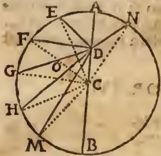
PRO-

Eucl. 7. & 8. III.

PROPOS. VI. THEOR. V.

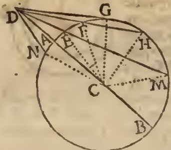
Rectarum, ad peripheriam cadentium à puncto, quod circuli centrum non eſt, maxima eſt illa, quæ per centrum tranſit; minima verò reſiduum, vel productio diametri; reliquarum verò quę maiorem angulum ad centrum ſubtendit maior erit ſubtendente angulum minorem; duę autem ſolùm rectæ lineæ ęquales ab eodem puncto ad vtraſque partes diametri cadent.

In circulo A G B, cuius centrum C, ſumatur quodlibet punctum D, aliud à centro (ſiue intra, vt in prima figura, ſiue extra circulum, vt in ſecunda, ſiue in eius peripheria, vt in tertia); & à puncto D ducãtur ad circuli peripheriam quotcunque lineæ rectę D B, D M, D H, D G, D F, D E, D A & D N, quarum D B per centrum tranſeat. Dico rectam D B maximam eſſe omnium. A centro C ad puncta M, H, G, &c. coniungantur radij C M, C H, C G, &c. Quoniam duo *a* radij C M, & C B ęquales ſunt, addita communi C D: erunt duæ rectę M C & C D ſimul, æquales rectæ B D; ſed *b* D M minor eſt, quàm duo latera C M & C D ſimul, in triangulo M C D. Ergo M D minor eſt, quàm B D. Eadem ratione minor erit D H, quàm B D, & ſic reliquę omnes D G, D F, &c. Quare recta B D, quę per cẽtrum ducitur, maxima eſt omnium, &c. Quod erat primum.



a Axio. 12. lib. 1.

b prop. 21. lib. 1.



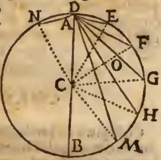
Secundò dico, quod D A (quę eſt reſiduum diametri in prima figura, & eius productio in ſecunda) eſt minima omnium rectarum, quę à puncto D duci poſſunt in circulo. Quoniam in triangulo D C E eſt D A, differẽtia duorum laterum D C, & E C; eo quod C E, & C A, radij circuli, ęquales inter ſe ſunt. Ergo *c* erit D A, differentia laterum, minor, quàm baſis D E. Eadem ratione erit

c prop 21. lib. 1.

erit D A minor qualibet alia D F, aut D G, aut D N, &c. Quare D A minima eſt omnium, quæ à puncto D in circulum duci poſſunt. Quod erat ſecundum.

Tertiò quęlibet recta D G ſubtendat angulum G C D, ad centrum, maiorem angulo F C D, ſubtenſo à recta F D. Dico D G maiorem eſſe, quàm D F; & ſiquidem D G ſecat radium F C intra circulum in puncto O, (vt in primo, & tertio caſu). Quoniam d in triangulo G O C duo latera G O, & O C maiora ſunt, quàm G C; pariterque in triangulo D O F duo latera D O, & O F ſimul ſumpta, maiora ſunt, quàm F D. Quare quatuor rectę lineę G O, O D, F O, & O C, ideſt duę G D, & F C, ſimul ſumptę, maiores erunt duabus F D & G C; & ab his aggregatis inequalibus auferantur equales radij G C, & F C; relinquetur e G D maior, quàm F D. Si verò D G non ſecat radium F C (vt in ſecundo caſu). Quoniam intra triangulum D G C concurrunt rectę lineę D F & C F, à terminis baſis D C ductę. Ergo f duę C G & G D, ſimul ſumptę, maiores ſunt, quàm duę C F & F D; & ab his inęqualibus aggregatis tollantur ęquales C G, C F, radij circuli: erit g reſidua G D maior reſidua F D.

d prop. 21. lib. 1.



e Axio. 4. lib. 1.

f prop. 21. lib. 1.

g Axio 4. lib. 1.

Quartò fiat h angulus ad centrum D C N ęqualis angulo D C E, & coniungatur D N. Quoniam in triangulis D C N, & D C E circa angulos ęquales ad centrum habent latera N C, & C E ęqualia (cùm ſint radij circuli), & C D latus cõmune. Ergo k baſes D N, & D E ęquales ſunt; ſed quęlibet alia, quę vltra punctum E, vt eſt D F, ducitur, maior oſtenſa eſt, quàm D E; eo quod maiorem angulum ad centrum D C F ſubtendit. Ergo maior quoque erit, quàm D N. Rurſus quęlibet alia ducta citra D E verſus punctum A minor oſtenſa eſt, quàm D E. ergo minor quoque erit, quàm D N. Vnde duę ſolummodo D N, & D E ęquales duci poſſunt ad vtraſque partes diametri. Quod erat oſtendendum.

h prop. 24. lib. 1.

k prop. 4. lib. 1.

COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt propinquiorem rectam lineam maximæ remotiore ſemper maiorem eſſe, ſi comparentur eæ, quæ in

cauam peripheriam cadunt. E contra propinquiorem minimę remotiore minorem eſſe, ſi comparentur illę, quę in conuexam peripheriam cadunt.

Eucl. 9. III.

COROLLARIVM II.

Si in circulo acceptum fuerit punctum, & ab eo ad peripheriam cadăt plures, quàm duæ rectæ lineę ęquales inter ſe: acceptum punctum centrum erit circuli. Quia à quolibet puncto, quod centrum non eſt, duę ſolummodo rectę lineę ęquales duci poſſunt, & non plures, vt conſtat ex poſtrema parte propoſitionis. Ergo punctum, à quo plures, quàm duę rectę, ęquales cadunt, non poterit eſſe non in centro collocatum. Quare centrum ſit neceſſe eſt.

Eucl. 24. I.

COROLLARIVM III.

Colligitur ex tertia parte huius propoſitionis, quòd, ſi fuerint duo triangula, habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumq; vtriq; angulus verò cōprehenſus maior angulo comprehenſo à dictis lateribus: erit baſis maior baſe. In triangulis enim D C M, & D C H latera M C, H C ęqualia erant, & latus D C commune, & angulus D C M maior angulo D C H, & oſtenſa fuit baſis D M maior baſe D H.

Eucl. 25. I.

SCHOLIVM.

Conuerſum huius corollarij facilè oſtendi poteſt: Suppoſitis lateribus vtrumque vtrique ęqualibus, ſi baſes inęquales ſint, erit angulus, à maiore baſe ſubtenſus, maior reliquo. Nam, ſi maior non eſt, erit ęqualis, aut minor illo; & ideo baſis ęqualis, aut minor illa erit, quod eſt contra hypotheſin: Erat enim maior. Quare patet propoſitum.

Eucl. 10. III.

PROPOS. VII. THEOR. VI.

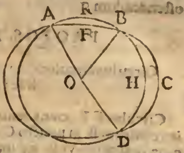
Circulus circulum in pluribus, quàm in duobus punctis, non ſecat.

Secent ſe ſe duo circuli A B H R, A B C F, ſi fieri poteſt, in tribus punctis A, B, & D; & reperto a centro O circuli A B H, ab eo ducantur radij O A, O B, & O D ad tria puncta ſectio-

a *prop. 1. huius.*

num

num circulorum, qui radij æquales erunt inter ſe. Et quoniam intra circulum alium A B C F ſumptum eſt punctum O, & ab eo cadunt in circuli peripheriam plures, quàm duæ rectę lineæ æquales O A. O B, & O D, Ergo [b] punctum O centrum eſt circuli A B C F; erat autē idem punctum O centrum alterius circuli A B H. Ergo duo circuli, ſe ſe ſecantes, habent idem centrum, quod [c] eſt abſurdum. Non ergo duo circuli ſe ſe ſecant in pluribus, quàm in duobus punctis. Quod erat oſtendendum.



b *Coroll. 1. prop. 6 huius.*

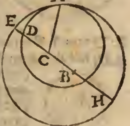
c *prop. 5. huius.*

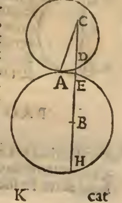
PROPOS. VIII. THEOR. VII.

Eucl. 11. & 12. III.

Recta per centra duorum circulorum ſe tangentium producta, per contactum tranſibit.

Sint duo circuli A E, cuius centrum B, & A D, cuius cētrum C ſe ſe interius, vel exterius tangentes in puncto A. Dico tria puncta B A, & C in vna recta linea eſſe. Si hoc verum non eſt, recta linea B C, centra coniungens (producta), ſecet peripheriam circuli A E in punctis H & E, & peripheriam circuli A D in puncto D. Et quoniam ſumptum eſt punctum C, quod non eſt centrum circuli A E H (intra ipſum in prima figura, & extra in ſecunda), atque à puncto C per centrum B ducta eſt recta linea C E B H: erit [a] C E, (quæ eſt reſiduum diametri H E) minima omnium rectarum, ex puncto C cadentium in peripheriam circuli A E H. Ergo C E minor eſt, quàm C A; eſtque [b] C A radius æqualis radio C D in circulo A D. Ergo C E minor erit, quàm C D, totum minus ſua parte, quod eſt abſurdum. Non ergo recta B C, centra coniungens (producta) ſe-





a *prop. 6. huius.*

b *Axio. 11. lib. 1.*

cat

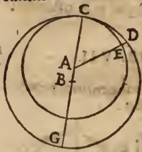
cat circulos alibi, quàm in eorum contactu A. Quod erat oſtendendum.

Eucl. 13. III.

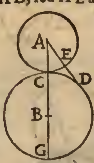
PROPOS. IX. THEOR. V.

Circulus circulum in vno tantùm puncto, ſiue intus, ſiue extra tangit.

Circulus C E, cuius centrum A, tangat circulum C D, cuius centrum B, in puncto C (interius quidem, vt in prima figura, exterius, vt in ſecunda). Dico in vnico puncto tantummodo circulos ſe tangere. Ducta per contactum C, & per centra B, & A recta linea B A C, quæ vnica recta erit, vt in proxima propoſitione oſtendimus, & producta in puncto G, & ducta, vtcunque, alia recta A E D, ſecante peripherias circulorum in punctis E, & D. Quoniam in circulo C D ſumptum eſt punctum A, quod non eſt eius centrum, atque ab eo ductę ſunt plures rectæ A C, & A D, eſtque A C complementum diametri C G:



a Prop. 6. huius. Ergo a A C minima eſt omnium, ideoque minor, quàm A D; ſed A E æqualis eſt ipſi A C, quia ſunt radij eiuſdem circuli C E. Ergo A E minor eſt, quàm A D: ideoque punctum D vltra punctum E conſtitutum eſt: & propterea punctum D peripherię C D extra circulū C E cadit; & ſic, quodlibet aliud punctum peripherię circuli C D extra circunferentiam C E cadere oſtendetur. Cùm ergo omnia puncta peripherię C D G cadant extra peripheriam circuli C E, excepto puncto C. Ergo dicti circuli in puncto C tantummodo ſe ſe tangunt. Quod erat oſtendendum.



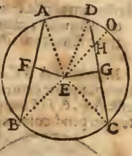
Eucl. 14. III.

PROPOS. X. THEOR. IX.

Perpendiculares, à centro ad ęquales rectas lineas, in circulo applicatas, ductę, erunt inter ſe æquales. Et ſi perpendiculares inter ſe fuerint ęquales, erunt quoque applicatę inter

ter ſe ęquales. Dictæ perpendiculares vocentur Diſtantiæ rectarum linearum, applicatarum à centro.

In circulo A B C, cuius centrum E, ſint applicatę duę rectę ęquales A B, & C D, ad quas ſint ex centro E perpendiculares E F, & E G. Dico E F, & E G ęquales eſſe. Coniungātur rectę E A, E B, E C, & E D. Quoniā in duobus triāgulis A B E, & D E C duo latera A E, B E æqualia ſunt duobus lateribus D E & C E, atque baſes A B, & D C ponuntur ęquales: Ergo [a] erunt anguli A, & D ęquales inter ſe; cùmque in triangulis A F E, D G E ſint duo anguli recti F, & G æquales; nec non anguli A, & D oſtenſi ęquales; atque latera A E, & D E ęqualia, ſubtendentia angulos rectos (cùm ſint radij eiuſdem circuli). Igitur [b] latera E F, & E G (quę ſunt perpendiculares ex centro ad applicatas ductę) ęqualia ſunt inter ſe.



[a] prop. 7. lib. 1.

[b] prop. 26. lib. 1.

Sint ſecundò perpendiculares E F, & E G ęquales. Dico applicatas A B, & C D ęquales eſſe. Si enim hoc verum non eſt, quęlibet earū, vt C D, ſit maior reliqua, & perpendiculares E F, E G ex cētro ſecant [c] eas bifariam in G, & F. Ergo etiā G D, ſemiſſis maioris C D, erit maior, quā F A, medietas minoris. Secetur [d] iam ex maiori G D recta linea G H ęqualis ipſi F A, iungaturque E H, quę (producta) ſecet circunferentiam in O. Et quia in triangulis A F E, & H G E circa angulos rectos F, & G ſunt duo latera A F & H G æqualia, pariterque E F, & E G fuerunt ęqualia. Ergo [e] baſis E H ęqualis erit baſi E A; eſtque E A circuli radius. Ergo E H ęqualis eſt radio E A, ſiue E O, pars ęqualis toto, quod eſt abſurdum. Non ergo C D maior erit, quàm A B. Eadem ratione non erit minor. Quare A B, & C D ęquales erunt, vt fuit propoſitum. Vocentur perpendiculares E F, & E G Diſtantiæ, rectarum A B, & C D a centro E.

[c] prop. 3. huius.

[d] prop. 3. lib. 1.

[e] prop 4. lib. 1.

COROLLARIVM.

Conſtat duo triangula iſoſcelia ęqualium laterum, & ęquè alta, habere baſes ęquales.

Oſtenſę enim fuerunt baſes A B, & C D ęquales in duobus

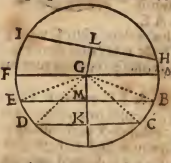
triangulis iſoſceliis A E B, & D E C, in quibus latera ſunt æqualia, & altitudines E F, E G ęquales.

Eucl. 15. III.

PROPOS. XI. THEOR. X.

Rectarum applicatarum in circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem centro propinquior remotiore ſemper maior eſt.

In circulo A B C, cuius centrum G, ſit diameter A F, & H I propinquior centro, quàm C D. Dico maximam omnium eſſe A F, & H I maiorem, quàm C D. Ducantur *a* diſtantiæ, ſeu perpendiculares ex centro, G K, & G L ſuper C D, & H I: erit G K diſtantia maior, quàm G L ex hypotheſi. Secetur *b* ergo G M ęqualis ipſi G L, & per M ducatur *c* B M E perpendicularis ad G M, & coniungantur rectæ G B, G C, G D, & G E. Quoniam diſtantię G M, & G L ęquales ſunt. Ergo rectę *d* B E, & H I ęquales inter ſe erunt. Et quia duę rectę B G, & G E, quæ ſimul, ęquales ſunt diametro A F, maiores *e* ſunt, quàm B E, erit diameter A F maior, quàm B E, ſeu, quàm H I. Eadem ratione A F maior erit quacunque alia C D. Poſtea quia duo latera B G, & G E trianguli B G E ęqualia ſunt duobus lateribus C G, & G D alterius trianguli D G C, eſtque angulus B G E maior ſua parte angulo C G D. Ergo *f* baſis B E maior eſt baſe C D, ideſt H I maior eſt, quàm C D. Quapropter, &c.



a prop. 11. lib. 1.

b prop. 3. lib. 1.

c prop. 10. lib. 1.

d prop. 10. huius.

e prop. 21. lib. 1.

f Coroll 3. prop. 6. huius.

Eucl. 1. IV.

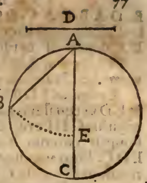
PROPOS. XII. PROBL. II.

In dato circulo rectam lineam applicare ęqualem datæ rectę lineæ; oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non eſſe maiorem.

In circulo A B C, cuius diameter A C, debet applicari linea recta, quę ęqualis ſit datæ rectę D; ſed oportet lineam D eſſe ęqualem, aut minorem diametro A C. &, ſi fuerit ęqualis, factum erit problema: Si verò D minor fuerit diametro A C, ſece-

ſecetur *a* A E æqualis ipſi D, & centro A, radio A E deſcribatur circulus E B, ſecans priorem in B, & iungatur recta A B. Dico lineam rectam A B problema efficere. Quoniam D æqualis facta eſt ipſi A E, & A B æqualis eſt eidem A E (cùm ſint radij circuli E B). Ergo recta A B, applicata in circulo A B C, æqualis eſt datæ rectæ D. Quod erat faciendum.

a prop. 3. lib. 1.

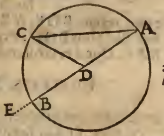


PROPOS. XIII. THEOR. XI.

Eucl. 20. III.

In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm eadem peripheria fuerit baſis angulorum.

In circulo A B C, cuius centrum D, conſtituantur ſuper baſim B C duo anguli B D C ad centrum, & B A C ad peripheriam. Dico angulum B D C duplum eſſe anguli B A C. Ducatur recta A D coniungens angulos ad centrum, & peripheriam, & producatur vſque ad E infra angulum ad centrum, & primò A D E cadat in eandem rectam lineam A B. Quoniam *a* angulus externus B D C duobus internis, & oppoſitis A, & C eſt æqualis in triangulo A D C; ſuntque *b* anguli A, & C inter ſe æquales, cùm latera D A, & D C ſint æqualia, nempe radij circuli. Ergo angulus B D C duplex eſt anguli B A C ad peripheriam.

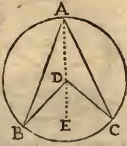


a prop. 18. lib. 1.

b prop. 6. lib. 1.

Secundò cadat recta A D E intra angulum B D C. Et quoniam *c* in triangulo B A D externus angulus E D B æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis B, & D A B, qui æquales ſunt inter ſe, vt prius dictum eſt. Pari ratione in triangulo D A C externus angulus E D C æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis C, & D A C, qui pariter æquales ſunt inter ſe. Ergo totus angulus B D C æqualis eſt quatuor angulis

c prop. 18. lib. 1.



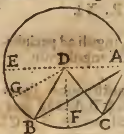
B,

B, D A B, D A C, & C: ſed duo anguli B, & C ſimul, æquales ſunt duobus reliquis, id eſt angulo B A C. Ergo angulus B D C duplus eſt anguli B A C. Quod erat ſecundum.

Tertiò cadat A D E extra angulum B D C, & ſecet peripheriam in E. Poſtea ſecetur d angulus B D C bifariam à recta D F, & angulus E D B bifariam à recta D G. Iam angulis B D G, & E D G æqualibus addantur æquales anguli B D F, & C D F, angulus G D F erit æqualis angulis E D G, & C D F, ſimul ſumptis: cùmque hi quatuor anguli ſint æquales toti angulo E D C. Ergo angulus G D F ſemiſſis eſt anguli E D C. Et quoniam e in triangulo C D A externus angulus E D C æqualis eſt

d prop. 8. lib. 1.

e prop. 18. lib. 1.

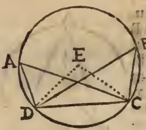


anglis D A C, & D C A inter ſe æqualibus, erit ſemiſſis illius, id eſt angulus G D F, æqualis angulo D A C. Rurſus quia in triangulo A D B externus angulus E D B æqualis eſt angulis D A B, & D B A æqualibus, erit ſemiſſis illius; id eſt angulus G D B, æqualis angulo D A B. Si ergo ab æqualibus angulis G D F, & D A C tollantur æquales anguli G D B, & D A B, erunt reſidui B D F, & B A C æquales inter ſe: Eſtque B D F ſemiſſis ipſius B D C. Ergo angulus B D C duplus eſt anguli B A C. Quod erat oſtendendum.

Eucl 21. III.

PROPOS. XIV. THEOR. XII.

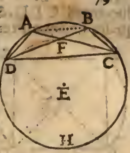
In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales. Et duo anguli æquales ſubtenſi ab eadem recta linea, ad eaſdem partes conſtituti, ſunt in eodem circuli ſegmento.



In circulo, cuius centrum E, exiſtant duo anguli A, & B in ſegmento D A B C. Dico eos eſſe æquales. Sit primò ſegmentum ſemicirculo maius; & à centro E coniungantur rectæ D E, & C E. Quoniam a angulus E ad centrum duplus eſt tam ipſius anguli A, quàm anguli B ad peripheriam; cùm omnes eandem peripheriam D C pro baſi habeant. Ergo anguli A, & B inter ſe ſunt æquales.

a prop. 13. huius.

Secundò

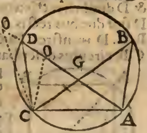


Secundò ſit ſegmentum D A B C, aut ſemicirculus, aut minor ſemicirculo; & coniungatur recta A B. Manifeſtum eſt ſegmentum A D H B maius eſſe ſemicirculo; & ideo (ex prima parte huius propoſitionis) duo anguli A D F, & B C F in maiori ſegmento exiſtentes, ęquales ſunt inter ſe: & ſunt b pariter duo anguli ad verticem B F C, & A F D æquales inter ſe. Ergo c in triangulis A D F, & B F C tertius angulus D A F æqualis erit reliquo angulo C B F.

b Coroll. prop. 5 lib. 1.

c Coroll. [illegible] prop 18. lib. 1.

Tertiò ſint duo anguli A B C, & A D C æquales inter ſe, ad eaſdem partes, ſubtenſi ab eadē recta A C; & circulus deſcribatur, d cuius peripheria tranſeat per puncta B, C, & A, cuius centrum ſit G. Oſtendendum modò eſt punctum D in eadem ſegmenti A B C peripheria reperiri. Si hoc verum non eſt, tranſeat, ſi fieri poteſt, per punctum O vltra, vel citra D. Manifeſtum eſt duos angulos A B C, & A O C in eodem ſegmento A B O C reperiri; e ideoque æquales eſſe inter ſe: erat autem ex hypotheſi angulus C D A æqualis eidem angulo B. Ergo duo anguli A D C, & A O C ęquales erunt inter ſe, externus interno, & oppoſito in triangulo C O D, quod f eſt abſurdum. Non ergo peripheria circuli A B C tranſit vltra, vel citra punctum D. Quare præciſè per D punctum tranſibit. Quòd erat oſtendendum.



d Schol. pro[illegible] poſ. 1. huius.

e ex prima parte huius.

f Coroll. 1. prop 8. lib. 1.

PROPOS. XV. THEOR. XIII.

Eucl. 22. III.

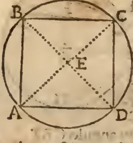
Quadrilaterorum in circulo deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt equales. Et, ſi in quadrilatero anguli oppoſiti duobus rectis ęquales fuerint, circulus per quatuor puncta quadrilateri tranſibit.

In circulo cuius centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterum quodlibet A B C D. Dico duos angulos oppoſitos A B C, & A D C duobus rectis ęquales eſſe. Ductis diametris quadrilateri A C, & B D: erunt a duo anguli A B D, & A C D in eodem ſegmento A B C D æquales inter ſe. Similiter erunt

a pre huius.

duo

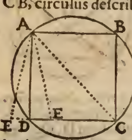
duo anguli C B D, & C A D in eodem ſegmento C B A D equales quoque inter ſe. Ergo duo anguli A B D, & C B D, ideſt totus angulus A B C equalis erit duobus angulis A C D, & C A D ſimul. Ergo addito communi angulo C D A, erunt in quadrilatero duo anguli oppoſiti A B C, & C D A ſimul, equales tribus angulis A C D, C A D, & C D A, ſimul ſumptis; ſed [b] hi tres vnius trianguli æquales ſunt duobus rectis. Ergo duo oppoſiti A B C, & C D A, duobus rectis æquales ſunt. Eodem modo oſtendentur duo anguli oppoſiti B A D, & B C D duobus rectis æquales. Patet ergo prima pars.



b prop. 18. lib. 1.

Secundò ſint in quadrilatero A B C D anguli oppoſiti B, & D duobus rectis æquales; pariterque anguli B A D, & B C D ſint duobus rectis æquales. Dico circulum per puncta A, B, C, D tranſire. Ducta diametro C A circa triangulum A C B, circulus deſcribatur; [c] quem dico neceſſariò tranſire per punctum D. Si enim hoc verum non eſt, tranſeat, ſi fieri poteſt, per punctum E vltra, vel citra D; & coniungatur recta A E. Quoniam quadrilaterum A B C E circulo inſcribitur: Ergo (ex prima parte huius) duo anguli E, & B, erunt duobus rectis æquales: erant autem ex hypotheſi anguli B, & D duobus rectis equales. Ergo hi duo illis duobus equales erũt; & ablato communi angulo B, erit angulus E æqualis angulo D, quod eſt falſum, & contra coroll. 1. propoſ. 18. lib. 1. Non ergo peripheria circuli tranſit per punctum E vltra, vel citra D. Quare per puncta A, B, C, D tranſibit. Quod erat, &c.

c Sch. prop. 1 huius.



PROPOS. XVI. THEOR. XIV.

Eucl. 26. III.

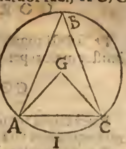
In circulis æqualibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti, inſiſtunt æqualibus peripherijs.

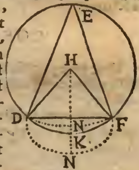
In circulis æqualibus, quorum centra G, & H, ſint primò anguli ad centrum G, & D H F equales. Dico peripherias A I C, & D K F, (quæ ſunt eorum baſes) æquales eſſe inter ſe.

Quo-

Quoniam circuli æquales ſunt; Ergo a quatuor radij A G, C G, D H, & F H ſunt æquales; ponuntur autem anguli G, & D H F æquales: Ergo baſes b A C, & D F; nec nō omnes anguli ſupra baſes triangulorum iſoſcelium A C G, & D F H æquales erunt. c Iam intelligatur circulus vnà cum triangulo A C G ſuperponi triangulo D H F, ita vt punctum G ſuper H, & recta A G ſuper H D cadat, & angulus G ſuper angulum H, cadent d neceſſariò duo puncta A, & C ſuper D, & F, propter æqualitatem tum laterum, tum angulorum in ipſis triangulis iſoſcelibus ęqualibus. His poſitis, neceſſe eſt peripheriam A I C cadere preciſè ſuper peripheriam D K F. Nam ſi caderet ſupra, vel infra, aut partim ſupra, partim infra ipſam, vt in D N F; tunc, ducta à centro H recta H K N, ſecante vtramque peripheriam in punctis K, & N; quia H K æqualis eſt radio H D; pariterque H N ęqualis eſt H D, quia e ſunt radij circulorum æqualium. Ergo H K, & H N ęquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo peripheria A I C cadit ſupra, vel infra peripheriam D K F. Quare ſibi congruant neceſſe eſt; ideoque æquales erunt inter ſe. quod erat primo loco oſtendendum.

a Axio. buius.
b prop.4. lib. 1.
c prop.6. lib. 1.
d Axio 9. lib. 1.
e ax. buius.





Sint ſecundò anguli ad peripheriam B, & E æquales. Dico eos inſiſtere ſuper ęquales peripherias A I C, & D K F. Ducantur radij A G, & G C, D H, & H F. Quoniam d angulus G ad centrum duplus eſt anguli B: pariterque angulus D H F æqualis eſt duplo anguli E; ſuntque duo anguli B æquales duobus angulis E. Ergo anguli G, & D H F æquales ſunt inter ſe, & ſunt ad centrum; Ergo peripheriæ A I C, & D K F æquales ſunt inter ſe (ex prima parte). Quapropter ſi anguli B, & E ęquales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

d prop. 13. buius.

COROLLARIVM I.

Patet etiam in eodem circulo angulos ęquales, ſiue ad centrū, ſiue ad peripheriā poſitos, inſiſtere peripherijs ęqualibus.

COROLLARIVM II.

Et, ſi dicti anguli ad peripheriam fuerint inæquales, maior inſiſtet maiori peripheriæ.

COROLLARIVM III.

Patet etiam angulos æquales ad centrum duorum circulorum ęqualium vnà cum peripherijs ſubtenſis comprehendere figuras ęquales. Vocentur illę Sectores.

Nam ex eo, quod anguli G, & H ad centrum poſiti ſunt æquales inter ſe, oſtenſæ fuerunt figuræ G A I C, & H D K F ſibi mutuò congruere, & ideo ęquales erunt. Quę vocentur Sectores.

COROLLARIVM IV.

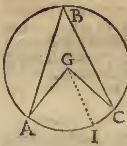
Hinc patet artificium, quo modo cuilibet datæ peripheriæ A C altera ei æqualis in eodem, ſiue ęquali circulo abſcindi debeat.

e prop. 24. lib. 1. Si enim angulo ad centrum A G C ęqualis efficiatur *e* angulus D H F, erit peripheria abſciſſa D F æqualis peripherię A C.

Eucl. 27. III.

PROPOS. XVII. THEOR. XV.

In circulis ęqualibus anguli, qui ęqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe ęquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti fuerint.

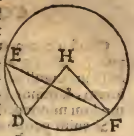


a prop. 24. lib. 1.
b prop. 16. huius.

In circulis ęqualibus, quorum centra G, & H, ſuper ęquales peripherias A C, & D F inſiſtant primò anguli H, & A G C. Dico eos eſſe ęquales. Si enim hoc verum non eſt. Sit angulus A G C maior, vel minor angulo D H F. Et fiat *a* angulus A G I ęqualis angulo H: erunt *b* igitur peripherię A I, & D F ęquales inter ſe; erat autem peripheria A C ęqualis eidem D F. Ergo peripherię A C, & A I ęquales

ſunt

ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo anguli A G C & H inæquales ſunt. Ergo patet, &c. Inſiſtant deinde anguli A B C, & E, ad periphérias conſtituti, baſibus A C, & D F æqualibus. Dico eos angulos eſſe ęquales. Quoniam propter æqualitatem peripheriarum A C, & D F anguli ad centra G, & H ęquales ſunt inter ſe (ex prima parte); hi verò dupli[c] ſunt angulorum ad peripherias B, & E. Ergo B, & E ęquales ſunt inter ſe. Quod erat, &c. [c prop. 13. huius.]



COROLLARIVM. I.

Similiter, ſi in eodem circulo peripheriæ æquales fuerint, erunt anguli inſiſtentes ęquales.

COROLLARIVM II.

Et ſi anguli ad centrum inęquales fuerint in eodem, vel æqualibus circulis erit peripheria maior, quę eſt baſis anguli maioris. Et ſi peripherię inæquales fuerint; erit angulus ille, qui maiori peripheriæ inſiſtit maior reliquo. Patet hoc ex demonſtratione primę partis huius propoſitionis. Nam ex eo, quod angulus A G C poſitus fuit maior angulo D H F concluſimus peripheriam A C ipſa A I, ſeu D F, fuiſſe maiorem.

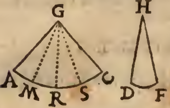
COROLLARIVM III.

Conſtat etiam, quòd duo anguli ęquales, ad circunferentiam eiuſdem circuli, exiſtunt in ſegmentis ęqualibus. Et contra, ſi in ſegmentis ęqualibus eiuſdem circuli exiſtant, erunt anguli ęquales inter ſe. Nam[d] anguli ęquales inſiſtunt peripherijs ęqualibus; & propterea reſiduę peripherię totius circuli, ęquales inter ſe erunt; & ideò ſegmenta ipſa circuli ęqualia erunt. E contra quando ſegmenta ſunt ęqualia in eodem circulo, & complementa totius peripherię eiuſdem circuli ęqualia erunt; & ideò[e] anguli, ad peripheriam ijs inſiſtentes, ęquales erunt; qui nimirum exiſtunt in ſegmentis ęqualibus. [d prop. 16. huius.] [e prop. 17. huius.]

COROLLARIVM IV.

Conſtat etiam, quòd, ſi in eodem, vel æqualibus circulis, vna peripheria aliquoties reliquam metiatur, atque ipſis inſiſtant anguli ad centrum, vel ſectores; minor angulus maiorem, & minor ſector maiorem ęquè metietur, quemadmodum minor peripheria maiorem metitur.

Si enim peripheria D F aliquoties metiatur ipſam A C, verbi gratia quater, atque a punctis diuiſionum M, R, S ad centrū coniungantur rectæ lineæ, erunt omnes *f* anguli A G M, M G R, R G S, S G C, vel *g* ſectores æquales tum inter ſe, cùm ipſi angulo, vel ſectori D H F; quandoquidem inſiſtunt peripherijs æqualibus. Et propterea angulus D H F toties metietur angulum A G C, vel ſector ſectorem, quoties peripheria D F metitur peripheriam A C.



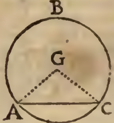
f prop. 17. huius.
g Coroll 8 prop. 6. huius.

PROPOS. XVIII. THEOR. XVI.

Eucl. 28. & 29. III.

In circulis æqualibus ęquales rectæ lineæ ęquales peripherias auferunt, maiorem quidem maior, minorem verò minor. Et ęquales peripherias ęquales rectę lineę ſubtendunt.

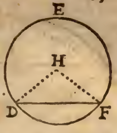
In circulis ęqualibus, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales A C, & D F. Dico maiorem peripheriam A B C æqualem eſſe maiori D E F, & minorem A C ęqualem minori D F. Ductis enim radijs A G, G C, D H, & F H, erunt duo latera circa angulum G æqualia duobus lateribus circa angulum H, ſingula ſingulis, cùm ſint radij ęqualium circulorum; ſuntque baſes A C, & D F poſitæ æquales. Igitur *a* anguli G, & H æquales erunt, & peripheriæ *b* A C & D F, quibus inſiſtunt, ęquales quoque. Vnde reſiduę circunferentię A B C & D E F, ablatę ex circulis ęqualibus, ęquales quoque erunt inter ſe. Quod erat primum.



a prop. 7. lib. 1.
b prop. 16. huius.

Sint ſecundò peripheriæ A B C, & D E F æquales, ſiue peripheriæ-

ripheriç A C, & D F æquales. Dico rectas A C, & D F çquales eſſe. Facta eadem conſtructione; quoniam peripheriæ A C, & D F çquales ſunt: Ergo c anguli inſiſtentes G, & H çquales erunt; ſuntque latera circa angulos G, & H çqualia (cùm ſint radij circulorum equalium). Ergo d baſes A C, & D F çquales erunt. Quod erat ſecundum. Quapropter, &c.



c prop. 17. huius.

d prop. 4. lib. 1.

COROLLARIVM

Patet etiam, quòd ſi rectç çquales ductç fuerint in eodem circulo çquales peripherias auferent, & è contra.

SCHOLIVM.

Et, ſi rectç lineç fuerint inçquales, maior auferet maiorem peripheriam, & è contra; ſi cç ſumantur peripheriæ, quç ſemicirculo maiores non ſunt.

Sit rectà A C maior, quàm D F. Dico peripheriarū ſemicirculo minorum A C maiorem eſſe peripheria D F. Quoniam latera circa angulos G, & H çqualia ſunt, nempe radij eiuſdem, vel çqualium circulorum, & baſis A C maior eſt baſe D F. Ergo e angulus G maior eſt angulo H, f & peripheria A C maior peripheria D F, &c.

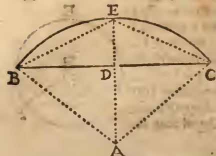
e Schol propoſ. 6. huius.

f cor 2. propoſ. 17. huius.

PROPOS. XIX. THEOR. XVII.

Si à circuli centro ad terminos ipſius ſegmenti lineæ rectç ducantur, & linea recta, à centro ducta, ſecuerit bifariam, aut tantummodo angulum ad centrum, aut rectam peripheriam, & angulum ſubtendentem, vel ſolummodo angulos, quos facit ad ſubtenſam, vel certè ſolum peripheriam ſegmenti: erunt pariter reliqua omnia bifariam ſecta.

Sit circuli ſegmentum B E C, cuius centrum A; Ducantur rectç A B, A C; Et primò recta A D E ex centro ſecet angulum B A C bifariam. Dico tam rectam B C, quàm angulos, ſupra B C factos à recta A D, quàm peripheriam B C, ſecari quoque bifariam. Quoniam in triangulis A B D, A C D cir-



ca çquales angulos verticales ad A radij A B, A C çquales ſunt, & A D communis; Ergo *a* baſes B D, C D æquales ſunt, & anguli B D A, C D A pariter æquales ſunt. Poſtea quoniam anguli ad centrum B A E, C A E inſiſtunt peripherijs B E, & C E. Ergo *b* hç çquales sũt inter ſe.

a prop. 4. lib. 1.

b Coroll. 2. prop. 16. huius.

Secundò ſecet recta A E ſubtenſam B C bifariam in D. Dico reliqua omnia vera eſſe. Quoniam in triangulis B A D, C A D latera B A, C A çqualia ſunt, & A D latus commune, & baſes B D, C D poſitç ſunt çquales: Ergo *c* anguli B A D, C A D çquales erunt; ſed quando angulus ad centrum A ſecatur bifariam, (ex prima parte huius) etiam anguli ad D ſunt æquales, & peripheriç B E, E C çquales ſunt. Ergo quando B C ſecatur bifariam, reliqua omnia vera ſunt.

c prop. 7. lib. 1.

Tertiò faciat A D ſuper B C angulos çquales B D A, C D A. Dico reliqua omnia vera eſſe. Quoniam recta A D (ex centro ducta) ſecat aliam B C ad angulos çquales, ſeu rectos. Ergo *d* B C ſecatur bifariam in D; Sed (ex ſecunda parte huius) quando B C ſecatur bifariam, reliqua pariter bifariam ſecantur. Ergo ſi anguli ad D diuiduntur bifariam, erunt quoque reliqua ſecta bifariam

d prop. 2. huius.

Quartò ſecet A E peripheriam B C bifariam in E. Dico reliqua omnia vera eſſe. Quoniam peripheriç B E, C E çquales ponuntur: Ergo *e* anguli ad centrum, illis inſiſtentes, ſunt çquales; & (ex prima parte huius) recta B C bifariam ſecatur, & anguli B D A, C D A çquales ſunt. Quare, &c.

e Coroll. 1. prop. 17. huius.

Eucl. 30. III

COROLLARIVM.

Hinc patet, qua arte quçlibet circuli peripheria ſecari poſſit bifariam. Nam *f* ſi recta ex centro ſecet angulum ad centrum bifariam, aut rectam *g* B C, aut *h* angulos ad D; ſemper peripheriç *k* B E, C E çquales erunt.

f prop. 8. lib. 1

g prop. 9. lib. 1.

h prop. 11. lib. 1.

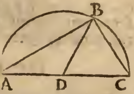
k prop. 19. huius

PROPOS. XX. THEOR. XVIII.

Eucl. 31. III

In ſemicirculo angulus rectus eſt; qui autem in maiori ſegmento

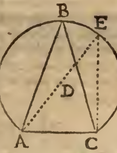
mento acutus, qui verò in minori ſegmento obtuſus eſt. Et circa angulum rectum circuli ſegmentum eſt ſemicirculus, & circa acutum angulum maius ſegmentum eſt. & circa obtuſum eſt ſegmentum minus.



In circulo A B C, cuius centrum D, ſit primò ſemicirculus A B C, & in eo angulus A B C. Dico eũ eſſe rectum. coniungatur B D. Quoniã in triangulo A D B duo latera A D, & B D ęqualia ſunt, cùm ſint radij circuli: Ergo a anguli DAB, & DBA ęquales ſunt inter ſe. Eadẽ ratione in triangulo B D C duo anguli D C B, & D B C ęquales erunt. Ergo duo anguli B A D, & B C D, ſimul, ęquales ſunt duobus angulis A B D & C B D, ideſt integro angulo A B C; ſuntque b tres anguli trianguli A B C ęquales duobus rectis. Ergo angulus A B C ſemiſſis erit duorum rectorum. ideoque rectus erit.

a prop. 6. lib. 1.

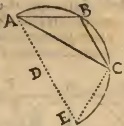
b prop. 18. lib. 1.



Secundò ſit (in altera figura) in ſegmento maiore A B C angulus B. Dico eum eſſe acutum. Ducta diametro A D E, & coniuncta C E, erit in ſemicirculo angulus A C E rectus (ex prima parte): Ergo c A E C acutus erit; eſtque d angulus B ęqualis angulo E, cùm ſint in eodem ſegmento. Ergo angulus A B C acutus erit.

c Coroll. 3. prop. 18. lib 1.

d prop. 14. huius.



In tertia figura, ſit in minori ſegmento C A B angulus B. Dico eum eſſe obtuſum. ducta diametro A D E, & iuncta C E, erit angulus A C E rectus (ex prima parte); & e A E C acutus, f ſuntque duo anguli oppoſiti E & B in quadrilatero A B C E, circulo inſcripto, ęquales duobus rectis. Ergo g angulus B obtuſus erit.

e Coroll. 3. prop 18. lib 1.

f prop. 15. huius.

g prop. 12. lib 1.

Quartò ſit angulus A B C rectus, conſtitutus in ſegmento C A B. Dico eum eſſe ſemicirculum. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit ſegmentum maius, aut minus; ideoque angulus A B C erit obtuſus, vel acutus (ex ſecunda, & tertia parte huius) quod eſt contra hypotheſin. Non ergo ſegmentum eſt maius, vel minus. vnde ſemicirculus erit.

Quin-

Quintò ſit angulus B acutus. Dico ſegmentum A B C minus eſſe. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit, aut ſemicirculus, aut ſegmentum minus, ideoque angulus B erit aut rectus, aut obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo &c.

Sextò ſit angulus B obtuſus. Dico ſegmentum A B C minus eſſe. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit ſemicirculus, aut ſegmentum maius. ideoque angulus B erit rectus, vel acutus, quod repugnat hypotheſi. Quapropter, &c.

COROLLARIVM.

Colligitur ex demonſtratione primæ partis huius propoſitionis, angulum trianguli, qui reliquis duobus angulis ęqualis eſt, rectum eſſe.

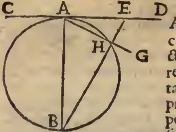
SCHOLIVM.

In hac propoſitione reperitur Poriſma adulterinum, quod quidem ſuperadditum eſſe propoſitioni Euclidis, conſtabit ex ſcholio ſequentis propoſitionis. Habet enim quod Angulus maioris ſegmenti recto quidem maior eſt; minoris autem ſegmēti angulus minor eſt recto. *Et quoniam, vt dicetur, angulus minimè effici poteſt à linea recta, & aliqua curua; propterea hæc poſtrema verba reijci omnino debent ab hac propoſitione: niſi quis velit menſuram anguli ſegmenti aliter conſiderare.*

Eucl. 16. III.

PROPOS. XXI. THEOR. XIX.

Recta linea, quę ab extremitate diametri cuiuslibet circuli ad angulos rectos ducitur, extra circulum cadet, & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet.



In circulo A B H, cuius diameter A B, ab eius extremo puncto A ducatur *a* C A D perpendicularis ad rectam lineam A B. Dico C A D cadere extra circulum; atque in locum à tangente D A, & peripheria comprehenſum, rectam lineam duci non poſſe. Ducatur à puncto quolibet E, ſumpto in recta linea A D ad alterum

a prop. 10. lib. 1.

rum

rum extremum diametri B, recta linea E B, ſecans peripheriam in H. Et quoniam [b] rectarum B A, B H in circulo ductarum, maxima eſt diameter B A. Ergo recta linea B A maior eſt, quàm B H. Et quia in triangulo B A E rectus eſt angulus B A E. Ergo [c] reliquus angulus A E B eſt acutus; & ideo minor recto. Quare [d] latus B E, ſubtendens maiorem angulum, maius erit latere B A; erat autem B A maior, quàm B H. Igitur B E maior erit, quàm B H; eſtque punctum H in circuli peripheria. Ergo punctum E extra circulũ cadit; & ſic quodlibet aliud pręter punctum A. Igitur tota recta linea A D extra circulum cadit.

b prop. 11. huius.
c Coroll. 3. prop. 18. lib 1.
d prop. 20. lib. 1.

Poſtea à puncto A contactus ducatur quęlibet recta linea A G infra tangentem; & fiat [e] angulus A B H ęqualis angulo D A G. Quia duo anguli A B H, & D A G ſunt equales, addito communi angulo B A H; duobus angulis B A G, & G A D, qui rectum angulum B A D conſtituunt, ęquales erunt duo anguli H B A & B A H ſimul ſumpti. Quare hi duo ęquales ſunt vni recto angulo; & ideo [f] conueniunt rectæ lineę B H, A H, & [g] efficiunt reliquum angulum A H B rectum, [h] qui in ſemicirculo erit; & ideo recta G A circulum ſecat in punctis H, & A. & propterea recta linea H A intra circulum cadit. eadem ratione quęlibet alia recta linea, infra tangentem ad punctum A ducta, neceſſariò circulum ſecabit. Quare duci non poteſt recta linea in locum à tangente, & peripheria comprehenſum. Quod erat, &c.

e prop. 24. lib. 1.
f prop 29. lib. 1.
g Coroll. prop. 20. huius.
h prop. 20. huius.

COROLLARIVM I.

Patet rectam lineam ab extremitate diametri, perpendiculariter ductam ad circuli diametrum, circulum ipſum tangere; quia oſtenſum eſt cadere extra circulum, & propterea eum non ſecabit.

COROLLARIVM II.

Patet etiam, qua arte per quodlibet punctum, in circunferentia circuli datum, tangens recta linea duci debeat. Si enim ex puncto A dato ducatur diameter A B, & ſuper hanc agatur [i] perpendiculariter A E, erit ducta A E circulum tangens.

i prop. 10. lib. 1.

SCHOLIVM.

Pręter ea, quę expoſita ſunt in hac propoſitione, adduntur in poſteriori eius parte duo Poriſmata, quę re vera à Proclo, aut Theone, aut ab alio ſuperaddita fuerunt, vt Franciſcus Vieta cenſet; hęc autem cùm à Mathematicis magni nominis reijciantur, & contra ab alijs mordicùs retinenda eſſe contendatur; operę pretium erit dicta Poriſmata exponere, & alia, quę ab eis deducuntur; & poſtea rationes propter quas negligi debeant, adducere.

Habet ergo vulgata propoſitio Euclidis hęc verba. Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor. *Quoniam oſtenſum eſt quamlibet rectam lineam A H, infra tangentem A E ductam, cadere neceſſariò intra circulum, erit angulus acutus rectilineus H A B minor angulo ex diametro B A, & peripheria A H comprehenſo; ideoque angulus ſemicirculi H A B maior erit quolibet angulo acuto rectilineo. Et è contra angulus à tangente E A, & peripheria A H comprehenſus, minor erit quolibet angulo acuto rectilineo.*

Ab his poriſmatibus deducunt Proclus Cardanus, & alij theoremata aliqua, quorum primum eſt.

I.

Angulus contingentiæ poteſt continuè, & infinitè augeri; angulus verò rectilineus minui: & tamen augmentum illius, quantumcumque ſit, minus ſemper erit decremento huius.

II.

Reperiri non poteſt angulus rectilineus æqualis mixto angulo dato.

III.

Angulus comprehenſus à duabus peripherijs circulorum æqualium poteſt eſſe æqualis alicui angulo rectilineo.

IV.

Tranſitur à minori ad maius, ſcilicet ab angulo acuto rectilineo ad angulum rectum; vel contra per omnia media; & non tranſitur per æquale, ſcilicet per angulum æqualem angulo ſemicirculi.

Hęc

Hęc ſententia prius à Peletario in dubium reuocata eſt; ſed rationibus haud firmis, vt optime Clauius animaduertit. Poſtmodum Franciſcus Vieta, inſignis Geometra, aſſentitur quidem ſententię Peletarij, ſed firmioribus rationibus eam confirmat; quę videri poſſunt lib. VIII. variorum Vietę cap. XIII. at eędem à Ioanne Camillo Glorioſo, in ſecunda decade ſuarum exercitationum, examinatę ſunt: Poſtea Galileus pręceptor noſter in epiſtola, ad Glorioſum miſſa, ſolidè redarguit omnes Glorioſi contradictiones, quę omnia videri poſſunt in decade tertia eiuſdem Glorioſi. in 16. prop. lib. 3. Eucl.

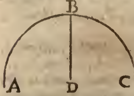
Ego verò poſtquam rationes, pro vtraque parte adductas, diligentiùs perpendi, in hanc ſententiam deueni: Conſectarium illud, quod non ſine ratione à Proclo ſuperadditum fuiſſe Vieta cenſet, demonſtratum non eſſe; quod niſi aliter conſtaret, certè ex dubitationibus pręclariſſimorum virorum Vietę, & Galilei elicitur. Nam Geometricę demõſtrationes eo nomine celebrantur, quod dubitandi locum omnino tollant, & aſſenſum auditoris violenter extorqueant. Qua enim ratione dubitari poſſet, an diuerticulum contingentię eſſet angulus minor quouis acuto rectilineo, ſi hoc ab Euclide ſeu à Proclo demonſtratum fuiſſet? Et ſi res attentiùs conſideretur, ita ſe habere comperiemus. Nam in ſumma Euclides nihil aliud demonſtrauit, niſi quod in locum inter circuli peripheriam, & tangentem interceptum (vtitur nomine loci, non anguli) recta linea duci non poteſt; & hoc quidem verum eſt. At poſtmodum, quod diuerticulum contingentię ſit angulus minor quolibet acuto angulo rectilineo, nunquam verè; & euidenter deduci poteſt; niſi prius oſtendatur ſpatium prędictum à tangente, & circuli peripheria contentum eſſe angulum; quod quidem nec Euclides oſtendit, neque forſan oſtendi poteſt; cumq; in demonſtrationibus nihil, quod ſit dubium, aut quod ab aduerſario negari poſſit, aſſumi debeat; eo quod pręmiſſę demonſtrationum debent eſſe notiſſimę; ideo dictum poriſma non erit demonſtratum.

Et ne quis putet ſupplementum hoc ab aliquo Expoſitorum ſuperadditum fuiſſe, inſpiciat XVI. Propoſ. lib. III. Euclidi, ab eis demonſtratam, videbit gratis aſſumi diuerticulum prędictum, angulum eſſe. Clauius tantummodo, in diſputatione aduerſus Peletarium, auctoritate Procli, & rationibus, oſtendere conatur definitionem anguli plani accomodari poſſe etiam diuerticulo contingentię; ſed irrito conatu, vt oſtendam.

Exprimitur anguli plani natura in eius definitione cum his paſſionibus: quòd ſit duarum linearum, in plano ſe mutuò tãgentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio. *Iam in recepta ſententia, ſi hęc definitio generica eſt, & competit ne dùm angulis rectilineis, ſed etiam curuilineis, & mixtis. Senſus eius talis eſt: ſi duę lineæ ſiue rectę, ſiue curuę, ſiue vna recta, & altera curua, ſe tan-*

gant in vno puncto, & non ſint in directum poſitę, conſtituent certam quandam inclinationem, quę angulus vocatur.

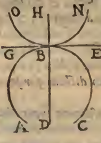
Et ſiquidem duę lineę curuę angulum planum conſtituere poſſunt. Igitur quotieſcunq; ſe ſe tangunt in vno puncto nō, ſunt in directū, & ad inuicem inclinantur, atque ſpatium amplectuntur, angulum conſtituent: ſed duę circumferentię eiuſdem circuli A B, B C ſe ſe tangunt in puncto B, & in-



lib 1 c.11. comm.10.

ſuper non ſunt in directum poſitę, ex Procli ſententia. ait enim, prorſus fieri non poteſt, vt in directo orbiculares iaceant; immo ſuperuacaneam indicat particulam illam, in directum iacere: ſiquidem alterius ad alteram inclinatio angulum efficit. Denique eędem lineę A B, & C B ad inuicem inclinantur, & inflectuntur (aliàs in directum iacerent), comprehenduntque ſpatium, quod menſurari, ac diuidi poteſt: eſtque talis inclinatio maior inclinatione vnius anguli recti, ſed minor inclinatione duorum rectorum. Ergo circuli peripheria in quolibet eius puncto B angulum A B C conſtituit, quod abſurdum eſſe ipſimet aduerſarÿ cenſent.

At ſi circunferentia A B C, tota in directum conſtituta credatur, vt Clauius def. 8. lib. 1. contendit, ducatur tangens E B; hęc quidem cadit ſuper lineam A B C, non quidem intra concauitatem, ſed ad partes conuexitatis eius; efficit verò recta linea, ſuper aliam lineam eleuata, duos



angulos, qui ſunt deinceps ad eaſdem partes, ad quas eleuatur. Ergo recta linea B E cum peripheria conuexa efficit duos angulos C B E, & A B E extra circulum; & nullo modo recta B E inclinata erit cum concaua peripheria A B, eo quod illa eleuatur ad partes conuexitatis. His poſitis duę repugnantię ſequuntur: prima eſt, quòd inclinatio conuexæ peripherię A B cum tangente B E conſtituit angulum ęqualem angulo recto E B H, & recto H B G, & mixto G B A, ſimul ſumptis; ſed hi tres maiores ſunt duobus rectis. Ergo angulus contentus à conuexa A B, & tangente B E maior eſt duobus rectis, quod eſt inauditum in Geometria: Secunda eſt, quòd recta E B efficit angulum A B E ad partes concauitatis, qui maior eſt quolibet obtuſo rectilineo; eo quod anguli, qui fieri poſſunt ſuper tangentem G E ad partes D ęquales ſunt duobus rectis. Quare duo anguli A B G, & A B E ęquales ſunt duobus rectis; eſtque contingentiæ angulus A B G minor quolibet acuto rectilineo. Ergo angulus A B E maior erit quolibet obtuſo angulo rectilineo. Sed ſi curua C B non concedatur inclinata ad curuam A B, multo minus recta linea E B, extra ipſam poſita, inclinata erit ad curuam A B; &

pro-

propterea A B E angulus non erit (cùm angulus in inclinatione conſiſtat); & prius oſtenſus fuit angulus quolibet obtuſo maior, quod impoſſibile eſt. Non igitur curuilinei, aut mixti veri ſunt anguli. Et re vera mirum eſt Inuentorem horum mirabilium angulorum, poſtquam adnotauit angulum contingentię minorem eſſe quolibet acuto rectilineo, & angulum ſemicirculi maximum omnium acutorum rectilineorum, tertium, & quartum miraculum tacuiſſe; nimirum angulum à tangente E B, & oppoſita peripheria conuexa B A contentum, duobus rectis maiorem eſſe; atque angulum à tangente E B, & concaua peripheria A B comprehenſum, maiorem eſſe quolibet obtuſo angulo rectilineo. At ego ex hac diſſimulatione conÿcio percepiſſe auctorem ipſum curuam circuli peripheriam A B cum tangente B E in directum continuatam eſſe; quod rationi, & naturę valdè conſentaneum eſt. Ducta enim circuli peripheria N B O ęquali peripheriæ circuli A B C, & tangente eam in B. manifeſtum eſt angulum contingentię N B E ęqualem eſſe angulo A B G; & additis communiter duobus angulis A B D, & D B E, erunt tres anguli N B E, E B D, & D B A, ideſt duo anguli N B D, & D B A, ſimul ſumpti, ęquales tribus angulis G B A, A B D, D B E, ideſt duobus angulis rectis G B D, D B E, ſimul ſumptis. Quare ad punctum B rectę lineæ D B conueniunt duę lineę A B, N B, non ad eaſdem partes ductæ, quę cum illa efficiunt duos angulos, deinceps æquales duobus rectis; & propterea, ſi fieri poteſt, vt duę lineę curuę continuentur directè abſque fractione, & inclinatione, k neceſſariò lineę A B, & B N in directum erunt continuatę; cùmque duę curuæ A B, & B C ſeſe in directum continuari conceſſæ ſint, cur eadem linea curua A B cum intermedia recta tangente B E non dicetur in directum conſtituta, dum in puncto B illę lineę non franguntur, neque inflectuntur? Nonne concipi poteſt punctum fluere itinere curuo, & poſtea dirigere ſuum curſum abſque vlla fractione, aut ſectione? Nonne lege naturę pila B in peripheria rotę, vel fundę A B reuoluta, impetum acquirit circularem A B, & idemmet circularis impetus poſtea continuatur, & dirigitur per rectam tangentem B E? Certum eſt ergo curuam peripheriam B A in directum continuari non minus cum tangente B E, quàm cum peripherÿs B N, aut B C; & propterea ſicuti non eſt inclinata peripheria A B cum peripheria N B, vel cum C B, ita neque inclinata erit peripheria A B cum tangente B E: ideoque peripheria C B, & tangens E B, neque ad inuicem inclinatę erunt; eo quod ſuper aliquam lineam A B E quęlibet linea eleuata duos angulos deinceps efficere debet, aut nullum. Cùmque linea curua C B cum curua A B, neque inclinationem, neque angulum efficiat, nulla ratione ſpatium contingentiæ C B E, quod ei deinceps eſt, inclinatio, aut angulus erit. Quod erat probandum.

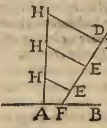
k prop. 13. lib. 1.

Poſtremò animaduertendum eſt Inclinationem ſolummodo eſſentiam anguli

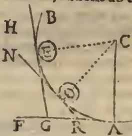
anguli conſtituere. Et quia datus angulus certa quędam quantitas eſt, debet hęc determinari per certam, & determinatam inclinationem, ita vt quęlibet inclinatio, maior illa, efficiat angulum maiorem, & quęlibet minor inclinatio minorem angulum conſtituat. Cùm ergo quęratur an diuerticulum contingentię ſit angulus, conſiderandum eſt an in diuerticulo contingentię aliqua certa, & determinata inclinatio reperiatur; pro qua indagine hęc pręmittuntur.

Primò, ſi duę rectæ lineę non fuerint inter ſe parallelę, vna earum in omnibus eius punctis ad alteram habebit vnam, & eandem inclinationem, quę ęqualis eſt angulo contento à perpendicularibus, ſuper eaſdem rectas lineas cadentibus.

Sint duę rectę lineæ A B, & D E, non parallelę inter ſe, ideoque productæ concurrent alicubi, vt in F, & efficient angulum D F B. Et ſi à
l prop. 10. lib. 1. *quolibet puncto E rectę D F* l *eleuetur perpendicularis E H, atque à quolibet puncto A rectę F A eleuetur perpendicularis A H. Quia duo anguli recti A, & E, vnà cum angulo A F E, interni, & ad eaſdem partes, minores ſunt quatuor rectis. Ergo* m *perpendiculares A H, & E H*
m Schol. prop. 29. l. 1 *conuenient, vt in H. Oſtendendum modò eſt quemlibet angulum A H E ę-*
n Schol. 2. *qualem eſſe angulo D F B inclinationis rectæ lineę D E, in quolibet eius*
prop. 18. l. 1 *puncto E, cum recta A B. Quoniam* n *quatuor anguli quadrilateri F A H E ęquales ſunt quatuor rectis; & duo anguli A, & E recti ſunt. Ergo duo anguli A F E, A H E ę-*
o prop. 13. lib. 1. *quales ſunt duobus rectis. Sed* o *duo anguli deinceps D F B, & D F A ęquales quoque ſunt duobus rectis. Ergo illi illis æquales ſunt, & ablato communi angulo A F E, erit quilibet angulus A H E æqualis D F B. Quare vna, & eadem eſt inclinatio rectæ lineę D E in omnibus eius punctis cum recta A B; & hæc æqualis eſt angulo, à perpendicularibus contento. Quod erat oſtendendum.*



Secūdò inclinatio circularis peripherię, in aliquo determinato eius puncto cū recta, circulū tangente: ęqualis eſt angulo à radijs ductis ab eodē puncto, & à contactu comprehenſo.



Sit circulus A E B, cuius centrum C, erectus ad planum horizontis, in quo intelligatur ducta recta, contingens circulum A F in puncto infimo A: ſitque pariter in plano inclinato recta E G, circulum contingens in puncto E; atque à punctis A, & E ducantur radij A C, E C. Dico angulum A C E æqualem eſſe inclinationi peripheriæ circularis

B E

B E in ipſo puncto E cum tangente A F. Intelligatur pila E, in puncto circumferentiæ E collocata. manifeſtum eſt (ex elementis mechanicis) pilam E impetum, atque momentum exercere pro menſura inclinationis illius lineę, per quam deſcendere conatur: ſed ſiue pila E ſuſtineatur à circuli peripheria in puncto E, ſiue ſuſtineatur à plano inclinato H G eundem impetum, ac momentum habet. propterea inclinatio peripheriæ circularis in puncto E eadem omnino eſt cum inclinatione rectę tangentis H G; & propterea inclinatio circularis peripherię in puncto E cum ipſa tangente, ſeu horizontali A F, eſt illa, quę determinatur ab angulo H G F. Sed ex pręcedenti angulus H G F æqualis eſt angulo A C E, à radijs perpendicularibus contento. Igitur inclinatio peripheriæ circularis B E in eius puncto E cum tangente A F ęqualis eſt angulo à radijs, ductis à puncto E, & à contactu A, contento. Simili ratione oſtendetur, quod inclinatio eiuſdem peripherię circularis B A in quolibet alio eius puncto O æqualis eſt angulo O C A. Quare patet propoſitum.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt circuli peripheriam cum tangente efficere non vnicam, ſed infinitas inclinationes; ſcilicet tot inclinationes, quot ſunt puncta peripherię; *eo quod radius A C cum radijs ductis à ſingulis punctis peripheriæ B E A: angulos ſemper inæquales efficiet; quibus ęquales ſunt inclinationes eiuſdem peripherię in ſingulis eius punctis cum tangente A F.*

Deducitur ergo maxima diuerſitas inter verum angulum rectilineum, & diuerticulum contingentiæ. Nam in illo vna linea in ſingulis eius punctis eandem inclinationem cum reliqua recta efficit; at in contactus diuerticulo circuli peripheria tot inclinationes cum tangente efficit, quot ſunt peripheriæ puncta.

Modò quia ad anguli conſtitutionem vnica, certa, & determinata inclinatio requiritur. Ergo diuerticulum contingentiæ, habens infinitas inclinationes, angulus non erit: niſi ex infinitis poſtrema inclinatio acutiſſima ſtatuatur pro eius menſura; at poſtrema inclinatio reperiri nequit, niſi in puncto contactus; quandoquidem qualibet alia habet poſt ſe infinitas inclinationes minores, & maiores, & punctum contactus cum recta linea, circulum tangente, angulum non efficit; cum angulus ſit inclinatio duarum linearum; non autem eſſe poteſt inclinatio lineæ, & vnius puncti. Nec concipi poteſt, qua ratione punctum contactus, in ipſamet tangente exiſtens, inclinationem efficiat; neque ſententia Apollonij refragatur, qui, vt ait Proclus, cenſet angulum eſſe primum ſub *lib. 1. c. 11.* puncto interuallum: pariterque angulum eſſe ſuperficiei in *comm 8.*

vno

vno puncto ſub linea refracta collectionem : & oportere eſſe aliquod internallum primum ſub continentium linearum inclinatione. *Eſt enim impoſſibile, vt punctum peripheriæ, quod immediatè ſequitur contactum efficiat angulum cum recta tangente; quandoquidem duo puncta, vel tria, vel alia quælibet multitudo finita punctorum contiguorum, longitudinem linearem minimè efficere poſſunt. Et inſuper ſingula illa puncta poſt contactum habent diuerſas, & inæquales inclinationes. Quare impoſſibile eſt, vt recta linea cum linea curua, vel duæ curuæ inclinationem vnicam certam, & determinatam conſtituant; propterea angulum planum non efficient. Quapropter demonſtratum non erit diuerticulum contingentiæ eſſe angulum, & minorem quolibet acuto rectilineo. Vt fuerat propoſitum.*

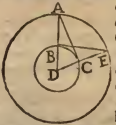
Eucl. 17. III.

PROPOS. XXII. PROBL. III.

A dato puncto, extra circulum poſito, rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat.

Ex puncto externo A ducenda eſt recta linea, tangens circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum in B; deinde centro D, interuallo D A, deſcribatur circulus A E, & *a* ex B educatur B E perpendicularis ad A D, ſecans circulum maiorem in E, & ducta recta D E, ſecante circulum minorem in C, connectatur recta A C. Dico A C tangere circulum B C. Quoniam duo latera E D, & B D trianguli B D E æqualia ſunt duobus lateribus D A, & D C trianguli C D A vtrunque vtrique, cùm ſint radij circulorum æqualium; & angulus D communis eſt. Ergo *b* anguli D B E & D C A ſunt inter ſe æquales eſtque D B E factus rectus. Quare D C A rectus quoque erit. *c* ideoque C A tanget circulum B C. Quare, &c.

a prop. 10. lib. 1.



b prop. 4. lib. 1.
c corol. 1. prop. 21. huius.

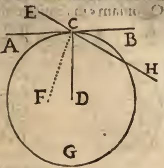
Eucl. 18 & 19. III.

PROPOS. XXIII. THEOR. XX.

Si circulum tangat aliqua linea recta, erit, quæ à centro ad contactum ducitur, perpendicularis ad tangentem. Et ſi ad punctum contactus perpendicularis excitetur, per centrum circuli tranſibit.

Recta

Recta A B tangat circulum C G, cuius centrum D, in puncto C, & iungatur recta C D. Dico primò rectam C D perpendicularem eſſe ad A B. Si hoc verum non eſt, ducatur a à puncto C ſuper C D perpendicularis E H. Manifeſtum b eſt rectam E H circulum tangere, & propterea c A B circulum ſecabit, quod eſt contra hypotheſin. Quare C D ad ipſam A B eſt perpendicularis. Quod erat primum.



a prop. 10. lib. 1.
b Coroll. 1. prop. 21. huius.
c prop. 21. huius.

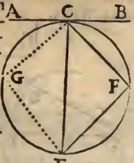
Sit ſecundò C D perpendicularis ad tangentē A B in puncto C contactus eius. Dico centrum circuli in C D reperiri. Si enim hoc verum non eſt, ſit F centrum circuli extra lineam C D, & iungatur F C. Patet, ex prima perte huius, F C perpendicularem fore ſuper A B. Quare duo anguli F C B, & D C B recti erunt; ideoque ęquales, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo certum F, extra lineam C D, reperiri poteſt. Quapropter, &c.

PROPOS. XXIV. THEOR. XXI.

Eucl. 32. III.

In circulo angulus, à tangente, & ſecante contentus, ęqualis, eſt angulo, in alterno ſegmento conſtituto. Et ſi angulus in alterno ſegmento poſitus ęqualis fuerit ei, qui à ſecante, & incidente in circuli peripheriam, continetur, incidens recta circulum tanget.

Circulum C G E tangat recta A B in puncto C, à quo recta C E primò per centrum ducatur. Dico angulum A C E ęqualem eſſe angulo F in alterno ſegmento; & angulum B C E ęqualem eſſe angulo C G E. Quoniam a vterque angulus A C E, & B C E rectus eſt b ſuntq; anguli F, & C G E in ſemicirculis quoque recti. Ergo angulus A C E ęqualis eſt angulo F; & angulus B C E ęqualis eſt angulo C G E.



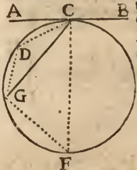
a prop. 23. huius.
b prop. 23. huius.

Tranſeat ſecundò recta C G non per centrum, & diameter C E ducatur, & iungatur G E. Oſten-

N den-

dendum eſt angulum A C G ęqualem eſſe angulo C E G, in alterno ſegmento, & angulum B C G ęqualem angulo D.

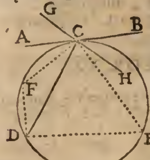
c prop. 20. huius. Quoniam *c* in ſemicirculo angulus C G E rectus eſt. Ergo *d* in



d prop. 18. lib. 1. triangulo C G E duo reliqui anguli G E C, & G C E vni recto ęquales erunt, ideſt ſunt ęquales angulo *e* recto A C E. Ergo ablato communi angulo G C E, erit angulus A C G ęqualis angulo C E G in alterno ſegmento. Poſtea *f* quoniã in quadrilatero C D G E duo anguli oppoſiti D, & E duobus rectis ęquales ſunt; paritérque *g* duo anguli A C G, & B C G duobus rectis ęquales: erant autem anguli A C G, & C E G inter ſe ęquales. Ergo reſidui anguli B C G, & D æquales inter ſe erunt.

e prop. 23. huius.
f prop. 15. huius.
g prop. 12. lib. 1.

Tertiò ab eodem puncto C peripherię C D E ducantur rectę, C D quidem ſecans circulum, & A B in eum incidens;

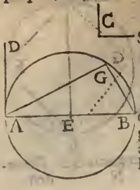


ſitque angulus A C D ęqualis angulo E, in alterno ſegmento. Dico A B circulum contingere. Quoniam, ſi hoc verum non eſt, ducatur *g* G H, tangens circulum in C. Ergo *b* angulus G C D ęqualis erit angulo E in alterno ſegmento: erat autem angulus A C D ęqualis eidem angulo E. Ergo anguli A C D, & G C D ęquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alia recta G H circulum tanget. Quare A B ſolummodo tangens erit. Quapropter, &c.

g Coroll. 2. prop. 21. huius
h ex prima parte huius.

PROPOS. XXV. PROBL. IV.

Eucl. 33. III.



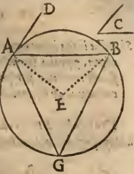
Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum ęqualem dato angulo.

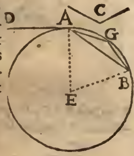
Super data recta A B, deſcribendum eſt ſegmentum circuli, quod capiat angulum ęqualem dato angulo C. *a* Fiat angulus D A B ęqualis angulo C; & ſi A B perpendicularis eſt ſuper A D, *b* ſecetur illa

a prop. 24. lib. 1.
b prop. 9. lib. 1.

illa biſariam in E: Si verò non eſt perpendicularis, [c] excitetur A E perpendicularis ſuper A D, erit angulus E A B acutus, eo quod eſt differentia anguli B A D à recto; & fiat [d] angulus A B E ęqualis angulo B A E acuto. Concurrent [e] ergo A E, & B E in pũcto E, & [f] erunt ęquales inter ſe. Ergo circulus, centro E, interuallo E A deſcriptus, tranſibit per B, & [g] ipſum tãget recta D A, cũ perpendicularis ſit ad radium A E. Ducantur à quolibet puncto G, ſegmenti A G B, duæ rectæ G A, & G B. Oſtendendum eſt angulum A G B, in dicto ſegmento conſtitutum, æqualem eſſe dato angulo C. Quoniam [h] angulo D A B à tangente, & ſecante comprehenſo æqualis eſt angulus G, in alterno ſegmento; ſed eidem angulo D A B æqualis erat angulus C. Ergo anguli G, & C ęquales inter ſe ſunt. Deſcripſimus ergo ſegmentum A G B, in quo angulus G æqualis eſt dato angulo C. quod erat, &c.

c *prop. 10. lib. 1.*
d *prop. 24. lib. 1.*
e *prop. 29. lib. 1.*
f *prop. 20. lib. 1.*
g *Coroll. 1. prop 21. huius.*
h *prop. 24. huius.*





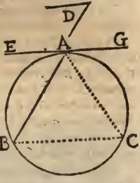
PROPOS. XXVI. PROBL. V.

Eucl. 34. III.

A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo.

Sit datus angulus D, & circulus A B C, à quo abſcindi debet ſegmentum, quod capiat angulum ęqualem angulo D. Ducatur [a] E G, tangens circulum in A; Fiat [b] poſtea angulus E A B ęqualis angulo D; & à quolibet puncto C, peripheriæ A C B, duæ rectæ C A, & C B ducantur. Oſtendendum eſt angulum C ęqualem eſſe angulo D. Quoniam [c] angulo E A B ęqualis eſt angulus C in alterno ſegmento: eſtque eidem angulo E A B ex conſtructione, ęqualis angulus D. Ergo angulus C ęqualis eſt

a *Coroll. 2. prop 21. huius.*
b *prop. 24. lib. 1.*
c *prop 24. huius.*



 angulo

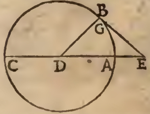
angulo D. Secuimus ergo ſegmentum A C B, in quo angulus C ęqualis eſt dato angulo D. Quod erat faciendum, &c.

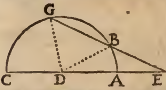
Ex Snellio.

S C H O L I V M.

Si recta linea inter conuexam circuli peripheriam, & diametrum intercepta, ęqualis fuerit radio circuli: erit angulus ad centrum, cuius baſis eſt concaua peripheria, triplus anguli ad centrum, cuius baſis eſt conuexa, ab eiſdem rectis intercepta.

In circulo A B C, cuius centrum D, & diameter A C, ducta ſupponatur quęlibet recta linea E B G, tangens, vel ſecans circulum in B, G: hac tamen lege, vt ſegmentum B E æquale ſit radio circuli A D. Dico angulum C D G triplum eſſe anguli A D B. coniungantur radij D B, & D G. Quoniam recta E B poſita eſt æqualis radio A D, ſeu D B. Ergo a *anguli E, & B D E æquales ſunt. Eadem ratione in ſecundo caſu anguli D B G, & D G B ęquales erunt, quia ſubtenduntur à radijs D G, D B in triangulo D B G. Et quia* b *externus angulus C D G æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis DGE, & E: eſtq; angulus D G E, ſeu D B G ei ęqualis, duobus angulis inter ſe ęqualibus E, B D E, pariter æqualis (in* c *primo caſu), quia rectus eſt angulus D B E, & (in* d *ſecundo) quia angulus G B D externus eſt in triangulo B E D. Quare angulus C D G æqualis eſt duplo anguli E vnà cum angulo B D E; &* e *eſt angulus B D E ęqualis angulo E. Ergo angulus C D G æqualis eſt triplo anguli B D E. Quod erat oſtendendum.*





a *prop. 6, lib. 1.*

b *prop. 18. lib. 1.*

c *ex prop. 21 huius.*

d *prop. 18. lib. 1.*

e *prop. 6. lib. 1.*

Conuerſum huius propoſitionis verum etiam eſt. Si enim angulus C D G triplus fuerit anguli B D A, & iungatur recta G B, ſecans diametrum C A in E. Dico rectam E B æqualem eſſe circuli radio A D. quia angulus externus f *C D G æqualis eſt angulis G, & E, atque angulus G ęqualis eſt duobus angulis B D E, & E. Ergo duplum anguli E, & angulus B D E, ſimul ſumpti, æquales ſunt triplo anguli B D E. Et propterea angulus E æqualis eſt angulo B D E; ideoque* g *recta E B ęqualis eſt radio circuli B D. quod erat oſtendendum.*

f *prop. 18. lib. 1.*

g *prop. 20. lib. 1.*

Hinc conſtat, quòd, ſi per aliquod problema Geometricum, duci poſſet à quolibet puncto G recta linea E B æqualis radio A D inter diametrum, & conuexam circuli peripheriam, poſſet quęlibet peripheria, & quilibet angulus triſariam diuidi.

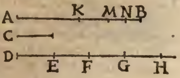
PRO-

PROPOS. XXVII. THEOR. XXII. *Eucl. 1. X.*

Si fuerint duę lineæ inęquales, & ex maiore auferatur eius ſemiſſis, & à reſiduo rurſus tollatur eius ſemiſſis, & hoc repetatur ſemper: relinquetur tandem aliqua linea, quę minor erit propoſita minore linea.

Sint duę lineę, A B maior, & C minor. Dico, ſi ex maiore, atque ex eius reſiduis ſemper medietates tollantur, relinqui tandem lineam minorem, quàm C. Multiplicetur C toties, quouſque efficiatur D H maior, quàm A B; & diſtribuatur D H in ſuas partes D E, E F, F G, & G H ęquales ipſi C. Poſtea ex [a] A B tollatur eius ſemiſſis A K, & à reliqua K B tollatur pariter eius ſemiſſis K M, & hoc ſemper repetatur, quouſque portiones A K, K M, M N, & N B, in ipſa A B ſectę, totidem ſint, quot ſunt partes alterius D H; quod fieri poſſe certum eſt, cùm continuum ſemper diuidi poſſit. Oſtendendum eſt poſtremam portionem N B minorem eſſe ipſa C. Quoniam ex minore A B tollitur eius dimidium A K, & ex maiori D H tollitur D E minus, quàm eius dimidium: erit reliqua K B minor, quàm reliqua E H. Et quia rurſus ex minore K B tollitur eius dimidium K M; at ex maiore E H tollitur E F non maior, quàm dimidium eius. Ergo reſidua M B minor erit, quàm reſidua F H. Tandem ex minore M B tollitur eius dimidium M N; at ex maiore F H tollitur F G non maior, quàm dimidium eius, & ſic ſemper. Ergo tandem poſtremum reſiduum N B minus erit, quàm G H, ſeu C, quod illi ęquale eſt. Quare patet propoſitum.

a prop. 9. lib. 1.



COROLLARIVM. I.

Patet, quòd, ſi ex maiore A B tollatur A K magis, quàm eius dimidium, & ex reſidua K B rurſus tollatur magis, quam eius dimidium, & hoc ſemper repetatur, tandem relinquetur aliqua linea, quę minor erit quacunque propoſita linea C.

CO-

COROLLARIVM II.

Conſtat, quôd, ſi ex maiore linea A B tollatur ſegmentum maius A K, & relinquatur minus K B, & ex hoc rurſus tollatur maius ſegmentum K M, & relinquatur minus, & hoc ſemper repetatur; tandem relinquetur aliqua linea, quę minor erit quacunque propoſita.

SCHOLIVM.

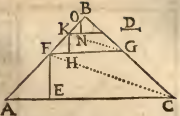
Hęc propoſitio, quæ de lineis paſſionem ſupradictam concludit, valet etiam, ſi loco linearum ſumantur quęlibet duæ magnitudines, dummodo ſint eiuſdem ſpeciei; ideſt ſi quęlibet earum multiplicata reliquam excedere poſſit.

PROPOS. XXVIII. PROBL. VI.

Latus trianguli iſoſcelij rectanguli ſecari poteſt in duo ſegmenta inęqualia, quorum minus ſegmentum ęquale ſit differentię lateris, & hypothenuſę eiuſdem trianguli; & rurſus ſegmentum minus eodem modo ſecari poteſt, vt eius minus ſegmentum ęquale ſit differentię precedentium ſegmentorum; & ſic ſemper, quouſque poſtremum ſegmentum minus ſit quacunque data recta linea.

Sit triangulum iſoſcelium A B C, rectangulum in B, & quęlibet recta linea D, cuiuſcunque paruitatis. Debet ſecari latus A B, vt proponitur. diuidatur [a] bifariam angulus A C B à recta linea C F, quę ſecet rectam A B in F; atque [b] à puncto F ducatur F E perpendicularis ad A C, ſecans eam in E; extendaturque [c] recta F G parallela ipſi A C, ſecans B C in G. Et quoniam propter [d] parallelas eſt angulus B G F ęqualis angulo C; atque angulus B F G æqualis angulo A, ſuntque [e] anguli A, & C ęquales ad baſim iſoſcelij A B C. Ergo etiam anguli B F G, & B G F ęquales ſunt, ideoque [f] latera B G, B F ęqualia ſunt, & triangulum B F G eſt iſoſceles. Poſtea quia in triangulis C E F, & C B F, angulus B C F, æqualis eſt angulo E C F, & duo anguli recti B, & E æquales ſunt, & latus C F eſt commune, oppoſitum angulis rectis B, & E; Ergo [g] C B æqualis eſt C E, atque B F ęqualis eſt E F. Cùm-

[a] prop. 8. lib. 1. [b] prop. 11. lib. 1. [c] Coroll. prop 16. l. 1 [d] prop. 15. lib. 1. [e] prop. 6. lib 1. [f] prop 20. lib. 1. [g] prop. 25. lib. 1.



Cùmque in triangulis F B G, & F E A ſint duo anguli B, & E recti, & anguli B G F, & A æquales, quibus opponuntur latera æqualia F B, & F E. Igitur *h* A F æqualis eſt F G, atque A E æqualis ipſi G B, ſeu ei æquali F B. Eſtque in triangulo A E F latus A F (ſubtendens rectum, & *i* ideo maximum angulum A E F) maius, quàm A E. Igitur A F maius eſt, quàm F B. Quare minus ſegmentum B F æquale eſt ipſi E A, differentiæ lateris B C, & hypothenuſæ A C eiuſdem trianguli A B C. *h prop. 25. lib. 1.* *i prop. 19. lib. 1.*

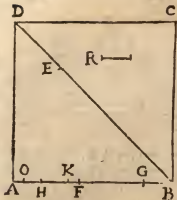
Secundò, *k* ducta recta G K, ſecante angulum G bifariam, & ducta *l* K H perpendiculari ad F G, ſecante eam in H, erit vt prius minus ſegmentum K B æquale F H, differentiæ ipſarum B G, & G F; eſtque B G æqualis B F, & F G æqualis A F. Ergo K B, minus ſegmentum totius F B, æquale eſt differentiæ præcedentium ſegmentorum A F, & F B. Et quoniam continuum ſemper diuiſibile eſt, poterit denuò ſecari K B in O, vt B O ſit minus ſegmentum, & ſit æquale differentiæ ipſarum F K, K B, & ſic ſemper. Cùmque ſint duæ rectæ lineæ A B, & D, & ex maiori A B auferatur maius ſegmentum, ideſt magis, quàm eius dimidium; & ex reſiduo F B auferatur F K magis, quam eius dimidium; atque ex K B tollatur K O magis, quàm eius dimidium; & ſic ſemper. Ergo *m* poſtremum ſegmentum O B minus erit quacunque data recta linea D. & omnia minora ſegmenta ablata, ſunt differentiæ præcedentium ſegmentorum. Factum eſt ergo Problema. *k prop. 8. lib. 1.* *l prop. 11. lib. 1.* *m Corol. 1. prop 27. huius.*

PROPOS. XXIX. THEOR. XXIII.

Eucl. 116. X.

Nulla recta linea, quæ metitur latus quadrati, menſurare poteſt diametrum eius. Vocentur latus, & diameter quadrati, rectæ lineæ Incommenſurabiles inter ſe.

Sit quadratum A B C D, cuius diameter D B, & recta linea R menſuret latus A B ipſius quadrati A C; ſitque R quælibet ex innumerabilibus rectis lineis, quæ metiri poſſunt ipſam A B. Dico rectam R nunquam menſurare diametrum B D. Si enim hoc verum non eſt, menſuret etiam recta R diametrum



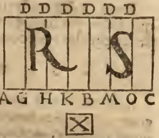
a prop. 34. lib. 1. metrum B D. Et quia a in quadrato A C angulus A rectus eſt, & duo latera D A, & A B ſunt çqualia, erit triangulum B A D iſoſcelium, b prop. 3. lib. 1. c prop. 28. huius. rectangulum. Quare facta b B E æquali ipſi A B ſecari c poteſt latus A B in F, vt ſit minus ſegmentum A F æquale D E, differentię duarum A B, & D B: pariterque, facta F G çquali A F, ſecari poteſt A F in H, vt ſit minus ſegmentum A H çquale G B, differentię ipſarum A F, & F B; & facta H K çquali A H, denuo ſecari poteſt A H in O, vt ſit ſegmentum A O çquale K F, differentiæ ipſarum A H, & H F, & hoc ſemper fieri poteſt, quouſque poſtremum ſegmentum, quod ſit A O minus ſit quacunque data recta R. Et quoniam ponitur recta R menſura ipſius A B, atque alterius D B; eſtque E B æqualis A B. Ergo recta R menſurat totam D B, & ablatam B E. Quare d recta R menſurabit quoque reſiduam differentiam D E: d Ax 6. l. 1. eſtque A F æqualis ipſi D E. Igitur R metitur ipſam A F; menſurabat autem prius totam A B. Ergo e eadem R menſurabit Reſiduam F B, atque ipſam A F; & ideo etiam earum e Ax. 6. l. 1 differentiam G B, ſeu A H (huic æqualem) menſurabit; ſed etiam A F metiebatur eadem R. Igitur menſurabit quoque reſiduam H F; atque menſurabat pariter ipſam A H. Quare R metitur earum differentiam K F; & ideo ei æqualem A O. Et propterea f recta R æqualis, aut minor erit, quàm A O f Def 13. lib. 1. (maior enim non poteſt menſurare minorem); quod eſt impoſſibile. Facta enim fuit recta A O minor, quàm R. Non ergo reperiri poteſt aliqua recta R, quantulacunque illa ſit, quæ metiatur diametrum B D, & latus A B, eiuſdem quadrati A C, quod, &c. vocentur rectæ lineæ A B, & D B inter ſe Incommenſurabiles.

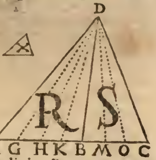
PROPOS. XXX. THEOR. XXIV.

Si fuerint duç rectç lineç incommenſurabiles; erunt ſpatia parallelogramma, vel triangula ſuper ipſas deſcripta, çquè alta inter ſe, incommenſurabilia.

Sint

Sint duę rectę lineę A B, & B C incommenſurabiles, quę ſint baſes, eiuſdem altitudinis parallelogrammorum R, & S, vel triangulorum. Dico parallelogramma, vel triangula R, & S inter ſe eſſe incommenſurabilia. Si enim hoc verum nō eſt, habeant ſpatia R, & S aliquam communem menſuram, ſi fieri poteſt, quę ponatur eſſe X; & quoties X metitur ſpatium R, in a tot partes inter ſe ęquales A G, G H, H K, K B diſtribuatur recta linea A B: & quoties X metitur ſpatium S, in tot partes ęquales B M, M O, O C diſtribuatur recta B C, & à punctis G, H, K, M, O b ducantur parallelę, efficientes parallelogramma in primo caſu, aut conuenientes in eodem puncto D, efficientes triangula, vt in ſecundo caſu: erunt c parallelogramma A G D, G H D, H K D, K B D inter ſe, aut triāgula d ęqualia; eo quod baſes eorum ſunt ęquales, & inter eaſdem parallelas exiſtunt. Et ſimiliter erunt parallelogramma C O D, O M D, M B D inter ſe, aut triangula ęqualia inter ſe. Et quoniam X toties menſurat ſpatium R, quoties K B menſurat baſim B A; & quoties K B menſurat baſim B A, toties ſpatium K B D menſurat ſpatium R (comparando ſemper parallelogramma inter ſe, aut triangula inter ſe). Ergo X, & ſpatium K B D ęquè metiuntur ſpatium R; ideoque ſpatia X, & K B D æqualia inter ſe ſunt, cùm ſint ęqualia cuilibet parti earum, in quæ reſoluitur ſpatium R. Eadem ratione ſpatium M B D ęquale erit ſpatio X. Quare duo ſpatia K B D, & M B D æqualia erunt inter ſe, cùm ſint æqualia ipſi X; & ſunt eiuſdem altitudinis. Ergo eorum baſes K B, & B M æquales ſunt inter ſe (nam ſi inæquales eſſent, pariter e parallelogramma, vel f triangula K B D, & M B D inęqualia eſſent, quod eſt contra hypotheſin); ſed K B metitur A B, & B M menſurat ipſam B C. Ergo duæ rectæ A B, & B C inter ſe commenſurabiles ſunt; cùm ab æqualibus K B, & B M, ſeu eadem K B menſurentur, quod eſt contra hypotheſin. Poſitæ enim fuerunt A B, & B C incommenſurabiles.





a prop. 28. lib. 1.
b Coroll. prop. 16. lib. 1.
c prop. 3. lib. 1.
d prop. 31. lib. 1.
e Coroll. prop. 31. l. 1.
f Coroll. 1. prop. 32. lib. 1.

rabiles. Non ergo ſpatia R, & S habere poſſunt aliquam commununem menſuram; ideoque incommenſurabilia ſunt. Quod erat propoſitum.

COROLLARIVM.

Patet ex demonſtratione huius propoſitionis poſſe diuidi quodlibet parallelogrammum, aut quodlibet triangulum in partes çquales, quotcunque iuſſerit quiſpiam.

SCHOLIVM.

Sicuti oſtenſum eſt lineas rectas, & ſpatia, triangula, vel parallelogramma eſſe poſſe incõmenſurabilia, ita oſtendemus poſtea omnes quantitates continuas, eiuſdem generis, incommenſurabiles inter ſe eſſe poſſe. Debent tamen ex hac ſerie excludi Numeri; eo quod in numeris diuidendo poteſt deueniri ad minimum in eius genere, ſcilicet ad vnitatem; hoc autem in quantitate continua minimè locum habet, quia ſemper diuiſibilis eſt; & ſic non datur minimum in eius genere, quod poſſit eſſe menſura communis duarum quantitatum continuarum.

Finis Libri ſecundi.

LI-

LIBER TERTIVS.

Euclid. lib. Δ.

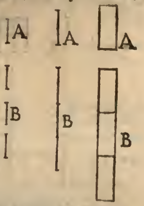
Poſtquam in ſuperioribus libris oſtenſæ ſunt principes figurarum planarum paſſiones, vt poſſint aliæ arcanę earundem figuratum propietates declarari, debent prius conſiderari quantitatum comparationes, quæ conſtituunt quantitatis ſpeciem, ab alijs quantitatibus notis, diuerſam. Harum ergo comparationum tractatio generica habetur in hoc tertio libro: Speculatio quidem non minus pulchra, & vtilis, quàm miris difficultatibus inuoluta, in qua Antiqui valde defecerunt, vt poſtea oſtendetur; & propterea neceſſe eſt, vt vniuerſa à fundamentis reſtituatur, initio ſumpto à definitionibus.

DEFINITIONES.

I.

Pars dicitur minor quantitas maioris quantitatis, cùm minor aliquoties metitur maiorem.

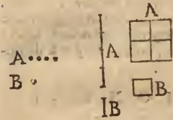
Quoniam in iſto libro tractatio inſtituenda eſt de cōparationibus quantitatum, quoad quantitatē pertinet, ideſt quoad ęqualitatē, & inęqualitatem earum. Manifeſtum eſt quātitates, quę æquales, vel inæquales inter ſe dici nequeunt, comparabiles non eſſe; vt linea cum ſuperficie, aut numerus cum corpore, vel motus cum pondere comparari non poteſt; propterea quod nec ęqualis, nec maior, aut minor alter alterius dici poteſt, cùm ſint diuerſorum generum: duę verò lineæ inter ſe comparari poſſunt, cùm ſint eiuſdem generis; & ſic duo numeri, duo motus, duę ſuperficies; &c. & inter omnes hęc eſt prima comparatio duarum quarumlibet quantitatum inter ſe. Diciturque illa quantitas propriè Pars alterius quantitatis, quę aliquoties menſurat illam quantitatem; ſi verò eam non metiatur, & ſit minor illa: appellabitur portio, vel ſegmentum eius. Itaque antecedens quantitas A pars erit conſequentis



quantitatis B , ſi A aliquoties ipſam B metiatur ; vt bis , ter , quater , decies , centies , &c. Et denominatio cuiuslibet partis determinatur à multitudine partium , contentarum in conſequenti , quarum quelibet ęqualis eſt antecedenti . Vt ſi B contineat tres partes ęquales ipſi A, nomen à ternario deſignabitur , & dicetur A tertia pars ipſius B , & ſic de reliquis .

II.

Multiplex autem dicitur maior quantitas minoris quantitatis, cùm maior à minore menſuratur .

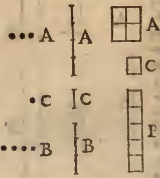


Vt antecedens quantitas A multiplex eſt conſequentis B , quando B aliquoties ipſam A metitur ; vel quando A multoties ipſam B continet , vt bis , ter, decies , &c. diciturque A ipſius B dupla, tripla, quadrupla, &c. ſi toties B ipſam A menſurat .

III.

Partes dicitur quantitas maior , ſiue minor , alterius quantitatis , cùm reperiri poteſt tertia quantitas , quæ illarum ſit communis menſura .

Quotieſcunque fuerint duę quantitates A , & B, atque tertia quantitas C aliquoties menſuret antecedentem A ; nec non ipſamet C aliquoties metiatur conſequentem B: tunc antecedens A partes erit conſequentis B , ſiue A fuerit maior , aut ęqualis , vel minor, quàm B; quę partes numerantur à multitudine partium , contentarum in antecedente , & denominantur à multitudine partium, contentarum in conſequente . Vt, ſi C ter contineatur in A , & quater in B , dicetur A tres quartę partes ipſius B. Et, ſi C quater contineatur in A , & ter in B , dicetur A quatuor partes tertię ipſius B . At ſi C quinquies contineatur in B , & quater in A dicetur A quatuor partes quintę ipſius B, & ſic de reliquis .

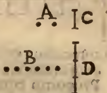


IV.

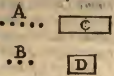
Eadem pars dicitur prima quantitas ſecundæ, ac eſt tertia quartæ quantitatis; cùm prima toties ſecundam metitur, quoties tertia quartam.

V.

Et ęquè multiplex dicitur prima quantitas ſecundę, vt eſt tertia quartę; cùm prima, & tertia ęquè menſurantur à ſecunda, & quarta.



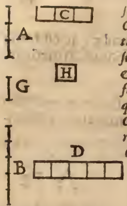
Prius comparauimus vnicam quantitatem antecedentem cum vnica conſequente: Modò comparantur duę antecedentes cum duabus conſequentibus. Et poſſunt eſſe duę primę eiuſdem, aut non eiuſdem generis, cum duabus poſtremis; vt prima, & ſecunda poßunt eſſe lineę, atque duę reliquę, ſcilicet tertia, & quarta, poſſunt quidem eſſe lineę, & etiam ſuperficies, aut numeri, vel corpora, vel pondera, aut motus. Et ſiquidem prima quantitas A comparatur cum ſecunda B, & tertia C comparatur cum quarta D, atque antecedens A toties metitur conſequentem B, quoties reliqua antecedens C menſurat reliquam conſequentem D: Dicetur prima A eadem pars ſecundę C, quàm tertia C pars eſt quartę quãtitatis D. Itaque, ſi vtræque antecedentes quater menſurent vtraſque conſequentes, dicetur tam A ipſius B, quàm C alterius D, quarta pars: &, ſi ſepties eas menſurent, dicentur antecedentes ſuarum conſequentium ſeptima pars, & ſic in reliquis menſuris. E contra, ſi antecedens A toties menſuretur à ſua conſequente B, quoties C menſuratur à ſua conſequẽte D, dicetur prima A ipſius B ęquè multiplex, ac eſt tertia quantitas C multiplex quartę D.



VI.

Eędem partes dicitur prima quantitas ſecundę, quemadmodum eſt tertia partes quartę quantitatis, cùm duę quęlibet quantitates ęquè metiuntur primam, & tertiam; pariterque ęquè menſurent ſecundam, & quartam.

Vt ſi fuerint quatuor quantitates A, B, C, D, quarum antecedentes, ſcilicet prima A, & tertia C ęquè menſurentur à quibuslibet quantitatibus G, & H; pariterque duę conſequentes, ſcilicet ſecunda B, & quarta D ęquè menſurentur ab eiſdem menſuris G, & H, dicetur prima A ipſius ſecun-



ſecundę B eędem partes, quemadmodum eſt tertia C partes quartę quantitatis D. Vel potius quando tam numeratores inter ſe, quàm denominatores ſunt inter ſe æquales: tunc prima ipſius ſecundæ, & tertia ipſius quartę eędem partes erunt. Vt ſi A fuerit tres quintæ partes ipſius B, ſicuti C eſt tres quintæ partes ipſius D; vel ſi tam A ipſius B, quàm C alterius D fuerint nouem quintę partes, & ſic in reliquis menſuris; tunc dicetur A ipſius B, atque C alterius D eędem partes.

VII.

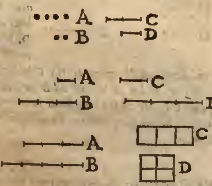
Si antecedens quantitas fuerit multiplex, aut pars, parteſue conſequentis, vocetur comparatio primę cum ſecunda Proportio commenſurabilis; diceturque prima ad ſecundam, proportionem menſurabilem habere. At ſi nulla alia quantitas, menſurabilem proportionem habens ad conſequentem, eſſę poteſt ęqualis antecedenti, ſed ſemper maior, aut minor eſt illa; dicetur antecedens ad conſequentem habere proportionem non menſurabilem.

Agimus iam de noua ſpecie quantitatis, quæ licet ſit diuerſa à reliquis quantitatibus notis, nihilominùs in eiſdem omnibus inuoluitur. Et primò certum eſt duas quantitates, inter ſe commenſurabiles, habere aliquā certam, & determinatam habitudinem, ſecundum quam prima quantitas (quæ antecedens dicitur) determinato numero multiplex eſt ſecundæ quantitatis, ſeu conſequentis, id eſt tot vices continet conſequentem; vel prima talis pars eſt ſecundę, aut prima tot, & tales partes eſt ſecundę; vt ſi prima tripla ſit ſecundæ, vel quarta pars fuerit ſecundę, aut tres quartę partes fuerit ſecundę: tunc talis reſpectus antecedentis ad conſequentem vocatur Proportio, ſeu Ratio menſurabilis. At duę quātitates inter ſe incommenſurabiles eiuſdem generis, vt ſunt latus, & diameter quadrati, habent etiam ſuum reſpectum, qui dignoſcitur per hanc paſſionem, quòd quęlibet linea, ex infinitis alijs, quę partes ſit diametri ipſius quadrati, maior, aut minor, nunquam autem ęqualis eſt lateri eiuſdem quadrati. Et talis reſpectus ineffabilis per numeros, vocatur Proportio non menſurabilis; eſtque nihilominùs hæc proportio, ſeu reſpectus vnicus, & determinatus in natura, ita vt quęlibet alia linea maior, aut minor latere eiuſdem quadrati, non habeat ad eius diametrum eam proportionem, quam habet latus. Quo modo verò determinatio quantitatis

tatis proportionis non commenſurabilis reperiri poſſit, poſtea docebitur.

VIII.

Si quatuor quantitatum (eiuſdem generis, ſiue non) prima ipſius ſecundę, & tertia quartę ęquè multiplices fuerint, vel eadem pars, aut eędem partes: vocetur commenſurabilis proportio quantitatis primę ad ſecundam eadem, vel ſimilis proportioni quantitatis tertię ad quartam; & huiuſmodi quatuor quantitates vocentur proportionales commenſurabiles.

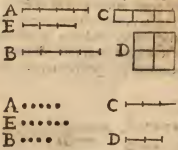


Vt ſi quatuor quantitatum A, B, C, D, duę A, B fuerint vnius generis, & C, D alterius, vel omnes ſint eiuſdem generis; & prima antecedens quantitas A ipſius ſecundę conſequentis B ſit tam multiplex, quàm tertia antecedens C eſt multiplex alterius conſequentis quartę D; vel A eadem pars ſit ipſius B, veluti C pars eſt alterius D; aut A eędem partes fuerit ipſius B, quemadmodum C partes eſt alterius D: tunc commenſurabilis proportio quam antecedens A habet ad conſequentem B, eadem, vel ſimilis erit proportioni alterius antecedentis C ad ſuam conſequentem D. Et quatuor quantitates A, B, C, D, habentes dictas conditiones, vocentur proportionales commenſurabiles.

IX.

Si verò quantitas prima maior fuerit illa quantitate, quę ad ſecundam, eandem rationem commenſurabilem habet, quam tertia habet ad quartam: vocetur proportio quantitatis primę ad ſecundam maior commenſurabili proportione quantitatis tertię ad quartam. Et, ſi prima minor fuerit quantitate illa, quę ad ſecundam eandem rationem commenſurabilem, quam tertia, habet ad quartam: vocetur proportio quantitatis primę ad ſecundam minor proportione commenſurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem.

Vt, ſi fuerint quatuor quantitates A, B, C, D, ſiue A, & B fuerint vnius generis, & C, D alterius, ſiue omnes eiuſdem generis; & tertia C ad quartam D habeat quamlibet proportionem commenſurabilem: (Sit exempli gratia C tres quartę partes ipſius D); & aliqua quantitas E



ſit minor, quàm prima A; ſitque E ad ſecundam B in eadem proportione commenſurabili, quam tertia C habet ad quartam D, ideſt, ſi E quoque fuerit tres quartę partes ipſius B: Tunc prima A (maior exiſtens, quàm E) erit maior, quàm opus eſt, vt ad ſecundam B eandem rationem commenſurabilem habeat, quàm tertia C habet ad quartam D. His poſitis, vocetur proportio quantitatis A ad B maior illa proportione commenſurabili, quam tertia C habet ad quartam D. Si verò E (maior exiſtens, quàm A) fuerit ad B in eadem proportione commenſurabili, quam C habet ad D: vocabitur proportio primę quantitatis A ad ſecundam B. minor proportione commenſurabili, quam tertia C habet ad quartam D.

X.

Et, ſi quatuor quantitatum (eiuſdem generis, ſiue non) antecedentes fuerint incommenſurabiles conſeqentibus; & proportio quantitatis primę ad ſecundam maior fuerit atque proportio quantitatis tertię ad quartam minor ſit eadem tertia commenſurabili proportione: Vocetur proportio quantitatis primę ad ſecundam maior illa incommenſurabili proportione, quam tertia habet ad quartam quantitatem.

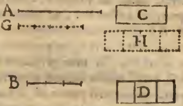
XI.

Si verò in eiſdem quantitatibus incommenſurabilibus proportio primę quantitatis ad ſecundam fuerit minor & proportio quantitatis tertię ad quartam maior ſit, eadem tertia commenſurabili proportione: tunc vocabitur proportio quantitatis primę ad ſecundam minor illa incommenſurabili proportione, quam tertia habet ad quartam.

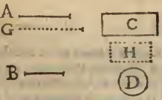
Vt, ſi fuerint quatuor quantitates A, B, C, D; ſiue A, & B fuerint vnius generis, & C, D alterius; ſiue omnes ſint eiuſdem generis; atque

A ipſi

A ipſi B, nec non C ipſi D incommenſurabiles ſint: & reperiri poſſit tertia quędam proportio commenſurabilis, quęlibet ex infinitis, quę proponi poſſunt (quę licet inter duos ſeparatos terminos ſupponi poſſit, nihilominùs commoditatis gratia concipi poteſt inter vnicum terminum ſeparatum H, & quartum terminum D); Sitque proportio ipſius A ad B maior cõmenſurabili proportione, quam habet H ad D; nec non proportio tertię C ad quartam D ſit minor eadem commenſurabili proportione, quam habet H ad D: Tunc vocabitur proportio quantitatis primæ A ad ſecundam B maior illa incommenſurabili proportione, quam tertia C habet ad quartam D. Vt autem verificetur, quòd proportio primę ad ſecundam B ſit maior commenſurabili illa proportione, quam H habet ad D, poni debet alia quantitas G, quæ ad B habeat eandem commenſurabilem proportionem, quam H habet ad D. & neceſſe eſt, ex nona definitione, vt prima A maior ſit, quàm G; ſic enim A maior erit illa quantitate, quę habet ad ſecundam B eandem proportionem commenſurabilem, quam H habet ad D. Simili modo, vt verificetur, quòd proportio tertiæ quantitatis C ad quartam D ſit minor eadem commenſurabili proportione, quam H habet ad D, neceſſe eſt, vt H ſit maior, quàm C. Quare quotieſcunque proportio primæ A ad ſecundam B conceditur maior proportione incommenſurabili, quam tertia C habet ad quartam D: debet etiam concedi ex vi huius definitionis, quòd duę alię quantitates reperiri poſſunt, vt ſunt G & H, quæ habeant eandem proportionem commenſurabilem ad conſequentes B & D, ita vt G minor ſit, quàm A; at H maior ſit quàm D. Et è conuerſo, quando hæ conditiones verificari poſſunt, ſcilicet ſi duæ alię quantitates G & H aſſignari poſſunt, eandem commenſurabilem rationem habentes ad conſequentes B & D, quarum G minor ſit, quàm A, & H maior ſit, quàm C: tunc vocabitur proportio primæ A ad ſecundã B, Maior incommenſurabili illa proportione, quam tertia C habet ad quartam quantitatem D.



Si verò in eiſdem incommenſurabilibus quantitatibus proportio primę A ad ſecundam B minor fuerit tertia quadam commenſurabili proportione, quam H habet ad D: Sed proportio tertiæ C ad quartam D maior ſit eadem commenſurabili proportione ipſius H ad D: tunc quidem proportio primę A ad ſecundam B vocabitur Mi-



nor incommenſurabili illa proportione, quam tertia C habet ad quartam D. Et ſimiliter reperiri poterit altera quantitas, vt G, quæ ſit ad ſecundam B in eadem commenſurabili proportione, quam H habet ad D; & ſit ipſa G maior, quàm prima A; & H minor, quàm tertia C.

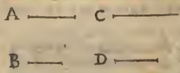
Vt verò definitio generalis fiat pro quantitatibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus, hoc modo dicemus: ſi proportio quantitatis primæ ad ſecundam maior fuerit; at proportio quantitatis tertiæ ad quartam non ſit maior eadem commenſurabili proportione: tunc proportio quantitatis primæ ad ſecundam vocetur maior proportione illa, quam tertia habet ad quartam (Nam tunc proportio magnitudinis tertiȩ ad quartam eadem erit, vel minor tertia illa proportione commenſurabili. Et ſi proportio quantitatis primȩ ad ſecundam minor fuerit; ſed proportio quantitatis tertiȩ ad quartam non ſit minor eadem commenſurabili proportione (ſic enim proportio tertiȩ ad quartam eadem, aut maior eſſe poteſt eadem illa commenſurabili proportione); tunc vocabitur proportio quantitatis primæ ad ſecundam minor illa proportione, quam habet tertia quantitas ad quartam. Sic enim comprehenduntur tam proportiones commenſurabiles, quàm incommenſurabiles.

XII.

At in eiſdem incommenſurabilibus quatuor quantitatibus, ſi proportio quantitatis primȩ ad ſecundam non fuerit maior, neque minor ea proportione incōmenſurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem: vocetur incommenſurabilis proportio quantitatis primȩ ad ſecundam eadem, vel ſimilis proportioni, quam tertia habet ad quartam quantitatem. Et huiuſmodi quatuor quantitates vocentur proportionales incommenſurabiles.

Def. 10.
Def. 11.

Poſitis eiſdem quantitatibus A, B, C, & D; ſint A ipſi B, nec non C ipſi D incommenſurabiles; & quia ſupra declaratum eſt; quando prima A habet maiorem, vel minorem proportionem ad ſecundam B, quàm tertia C habet ad quartam D. Si ergo proportio ipſius A ad B non eſt maior, neque minor ea proportione incommenſurabili, quam C habet ad D: vocabitur proportio incommenſurabilis primæ A ad ſecundam B, eadem, vel ſimilis proportioni quantitatis tertiȩ C ad quartam D. Et huiuſmodi quatuor quantitates A, B, C, D dicentur proportionales incommenſurabiles.



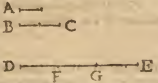
AXIO-

AXIOMATA.

I.

Si prima quantitas ſecundam metiatur, ſecunda verò tertiam menſuret; prima quoque tertiam metietur.

Vt ſi quantitas A menſuret ſecundam B C, & B C menſuret tertiam D E. Manifeſtum eſt primam A menſurare quoque tertiam D E. Nam diuiſa D E in partes D F, F G, G E, quę ſingulę ęquales ſint ipſi B C; cùm A menſuret ipſam B C, menſurabit quoque eadem A ſingulas partes D F, F G, G E; ideoque a ipſa A totam D E ex dictis partibus conſtantem, menſurabit. a Axio.6. lib.1



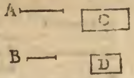
II.

Tribus quantitatibus propoſitis, quam proportionem habet prima ad ſecundam, habebit tertia ad aliquam aliam quantitatem eiuſdem generis.

III.

Et quam proportionem habet prima ad ſecundam, habebit aliqua alia quantitas eiuſdem generis ad tertiam.

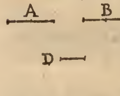
Vt, ſi data ſit aliqua proportio quantitatis A ad B. Manifeſtum eſt tertiam quantitatem C habere ad aliquam aliam quantitatem eiuſdem generis, D eandem proportionem, quam A habet ad B. Licet enim ignoretur interdùm quænam ſit illa quantitas quarta, certum eſt eam reperiri in natura. Nam cuiuslibet datę quantitatis C datur quoque dupla eius, tripla, quadrupla, & quælibet alia multiplex illius. Similiter datur in natura ſemiſſis ipſius C, nam tota C ex duabus eius medietatibus conſtatur: Pari ratione datur eiuſdem C tertia pars, quarta, & quælibet alia eius pars: Vnde eiuſdem partes omnes in natura exiſtent. Quare exiſtente proportione data ipſius A ad B commenſurabili, dubitandum non eſt ipſam C ad aliquam aliam habere poſſe eandem proportionem, quam habet A ad B. At ſi proportio A ad B fuerit incommenſurabilis, vt diametri ad latus quadrati, cùm dentur omnes proportiones commenſurabiles, ſcilicet infinitæ maiores, & infinitæ minores



illa, non repugnat quin detur etiam eadem incommenſurabilis proportio inter terminum C, & aliquem alium eiuſdem generis; qui erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt C. Animaduertendum tamen eſt in numeris hoc non ſemper verificari, niſi fracti adhibeantur. Nam ternarius ad nullum numerum integrum habebit proportionem duplam, aut quintuplam: Ternarius enim diuidi nequit in duas, aut quinque partes æquales, niſi eius vnitates ſubdiuidantur: & tunc ſemiſſis ternarij erit tres ſemiſſes vnitatis, & quinta pars ternarij erit tres quintæ partes vnitatis: & hoc ſufficit ad veritatem Axiomatis ſtabiliendam.

IV.

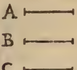
Si duarum quantitatum ęqualium vna partes fuerit alicuius tertiæ: & altera quoque eędem partes erit eiuſdem tertię, ac erat prima.



Nam, ſi duę quantitates A, & B æquales fuerint, & A ipſius C partes fuerit, quarum communis menſura ſit D: erit neceſſariò D eadem pars alterius B, quæ erat ipſius A; eo quod A & B æquales ponuntur; ideoque B ipſius C eędem partes erit, quæ A partes eſt eiuſdem C.

V.

Duæ proportiones in tribus pauciſſimis terminis contineri, aut continuari poſſunt: ſi nimirum vnus ſit conſequens, aut antecedens communis; vel ſi vnus ſit antecedens vnius proportionis, & conſequens alterius.



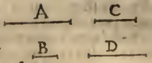
Vt duæ proportiones A ad B, atque C ad B continentur in tribus terminis; eritque B ſecunda, & quarta. Pari modo in duabus proportionibus A ad B, atque A ad C erit A prima, & tertia. Tandem duę proportiones A ad B, & B ad C continuantur in tribus terminis A, B, C, eſtque B ſecunda reſpectu primę A, & tertia reſpectu quartę C.

VI.

Si quatuor quantitatum prima maior fuerit, quàm ſecunda, ſed tertia non ſit maior, quàm quarta: habebit prima ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam.

Nam,

Nam, exiſtente A maiore, quàm B; C verò non maiore ipſa D, proportio a *quantitatis prima ad ſecundam maior erit commenſurabili proportione æqualitatis; cùm prima A maior ſit ſecunda B: at proportio tertiæ C ad quartam D non erit maior eadem commenſurabili proportione æqualitatis; cùm tertia ponatur non maior quarta. Vnde patet (ex definitione decima) A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D.* a def. 9 huius.



Liber quintus elementorum Euclidis adeò difficilis, & imperceptibilis vnicuique videtur, vt meritò dubitari poſſit aliquid in eo deſiderari. Cętera enim opera Euclidis ita clarè, & euidenter percipiuntur, vt ne vmbram quidem difficultatis relinquant, ſicuti puritas ſcientiæ demonſtratiuę exigit. Qua ergo ratione fieri poſſet, vt omnes, in hoc opere de proportionibus, tanquam in ſcopulum incidentes, hærerent perplexi, & dubij, niſi aliquid non ritè, aut non clarè expoſitum in principijs aſſumptis, aut in progreſſu reperiretur? Nec defuerunt quamplurimi, qui hanc pręcipuam Geometrię partem reſtituere conati ſint, ſed infructuoſè, vt mox oſtendam.

Multifariam definiuit Euclides proportionalitatem, in libro quinto duplici modo, & aliter in ſeptimo. In quinto enim (vbi agit de proportionibus in communi, ſcilicet de eis, quæ in quibuſcunque magnitudinibus reperiuntur, tam commenſurabilibus, quàm incommenſurabilibus, vt omnes confitentur) dixit tertia definitione: proportionem eſſe duarum magnitudinum eiuſdem generis, *ſcilicet quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuò ſuperare,* habitudinem quandam ſeu reſpectum ſecundum quantitatem. *Poſtea in quarta definitione addit* proportionalitatem eſſe proportionum ſimilitudinem. *Deinde in ſexta dixit:* in eadem proportione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam: cùm primę, & tertię ęquè multiplicia à ſecundę, & quartę ęquè multiplicibus (qualiſcunque ſit hęc multiplicatio) vtrunque ab vtroque, vel vna deficiunt, vel vna excedunt, vel vna ęqualia ſunt, ſi ea ſumantur, quę inter ſe reſpondent. *Et in octaua addidit:* cùm verò ęquè multiplicium multiplex primę magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundę; at multiplex tertię non exceſſerit multiplicem quartę: tunc primam ad ſecundam habere maiorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam.

Hiſce definitionibus adductis, non quieuit Euclides, ſed libri VII. definit. 20. agens de quadam ſpecie quantitatis, ſcilicet de numero, hanc aliam attulit definitionem proportionalitatis: Numeri proportionales

tionales ſunt, cùm primus ſecundi, & tertius quarti ęquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eędem partes:

Eadem ergo res, eodem nomine proportionalitatis ſignata, tribus modis ab Euclide definitur, adhibitis tribus paſſionibus diuerſis inter ſe. Et quoniam, vt dictum eſt, Definitio, quæ eſt principium Scientiæ, debet exponi per paſſionem omnium notiſſimam, & primam earum, quæ ſubiecto definito conueniunt; cùmque tres dictæ paſſiones non poſſint eſſe omnium notiſſimæ, & primæ; neceſſariò aliqua ex eis, ſi non omnes, ſuperfluę, aut adulterinæ, aut prauæ erunt. Hoc autem ſatis declaratur ab ipſomet Euclide, qui in lib. V. attulit vniuerſalem definitionem, comprehendentem etiam commenſurabiles quantitates, & propterea comprehendet etiam numeros, qui quantitates inter ſe commenſurabiles ſunt: Ergo ſi definitiones lib. V. declarantur per paſſiones euidentiſſimas, & primas, ideſt, ſi ſunt principia Scientiæ, aptiſſimæ erunt ad declarandam proportionalitatem numericam. Quare aut ſuperfluus fuit Euclides, quando nouam definitionem proportionalitatis numericæ in lib. VII. attulit; aut non omnino ſufficientes, aut perfectas eſſe definitiones lib. V. iudicauit.

Similiter in lib. V. definit. 4. expoſuit proportionalium naturam per ſimilitudinem reſpectus, quo ad quantitatem pertinet; at ſi hæc paſſio eſt omnium notiſſima, & prima (qualis debet eſſe illa, quę definitionem ſcientificam conſtituit): Quare propoſitiones lib. V. per hanc definitionem non demonſtrauit? Et ſi libuit eas demonſtrare per paſſionem ęquè multiplicium: quare non oſtendit Euclides, quòd magnitudines, quarum æquè multiplicia habent illam proprietatem, habeant ſimiles reſpectus, ſeu habitudines, vt iure meritò proportionales appellari poſſint? Vel è contra, quare non demonſtrauit, quòd magnitudines, habentes reſpectum ſimilem, neceſſariò habent illam paſſionem æquè multiplicium, ſine qua demonſtratione omnes propoſitiones lib. V. euidenter oſtenſæ non erunt? Quare ne præſtantiſſimo Geometrę imperitia logices immeritò tribuatur, dicendum eſt definitiones tertiam, & quartam adulterinas, & appoſititias eſſe. Et ſanè cùm video propoſitiones lib. V. demonſtratas fuiſſe ab Euclide per proprietatem ęquè multiplicium ſextæ definitionis, perſuaderi non poſſum eundem Euclidem 3. & 4. definitiones in eodem libro appoſuiſſe, quę ſuperfluę omnino ſunt, & ordinem perturbant. Nam in prima definitione quid ſit pars declarat. In ſecunda, quę ſint magnitudines aliarum multiplices, & æquè multiplices. Tertio loco, in 5. definitione, declarat proprietatem, per quam antecedens magnitudo, comparata conſequenti, dicitur habere rationem, ſeu proportionem; cùm ſcilicet quęlibet multiplex antecedentis, ęxcedit, ęqualis eſt, aut deficit à quacunque multiplice conſequentis. *Quarto loco*

ait,

ait, in 6. def. Dicuntur in eadem ratione eſſe prima ad ſecundã, vt tertia ad quartam, cùm quęlibet ęquè multiplicia antecedentium à quibuſcunque ęquè multiplicibus cõſequentium vtrunque ab vtroque vnà deficiunt, vel vnà ęqualia ſunt, vel vnà excedunt. *Et in his duabus poſtremis definitionibus, quid ſit proportio, & quid ſit proportionalitas apertè declaratur, ex quibus omnes propoſitiones lib. V. oſtenduntur, nunquam facta mentione definitionis tertię, aut quartę.*

Veriſimile etiam eſt definitiones 4. & 6. duas diſtinctas non eſſe, & ſeparatas; ſed conſtituere vnicam tantùm, & continuari debere, vt ſenſus ſit: Magnitudines proportionales ſunt illę, quę habent ſimiles reſpectus: & tunc reſpectus ſimiles inter ſe dicuntur, cùm ęquè multiplices earum habent dictam conditionem: *& ſic non eſt opus, vt oſtendatur, quod magnitudines habentes ſimiles reſpectus, habeant conditionem ſextæ definitionis, nec è contra. nam hoc in definitione ſuppoſitum fuerat nomine proportionalitatis ſignificari debere.*

Hanc ſextam definitionem, Euclidiſque methodum primus omnium improbauit Ametus filius Ioſeph, qui epiſtolam edidit de proportione, & proportionalitate (vt refert Campanus). Succeſſit poſt alios Ioannes Baptiſta Benedictus, & poſt eum alij plures viri docti, & prętantiſſimi, qui apertè pronunciant propoſitiones lib. V. minimè demonſtratas eſſe; cùm originem trahant ab ignoto, & obſcuro principio, ſcilicet à definitione 6. quæ principium ſcientiæ eſſe nequit, cùm ſit theorema demonſtrabile, & non ſine maxima difficultate: & cenſent recipi debere quartam definitionem, à qua euidentiùs declaratur natura proportionalitatis, per ſimilitudinem reſpectus, ex qua paſſione clarè percipitur, quòd magnitudines ęquales ad eandem magnitudinem habent eandem proportionem; quia ad eam habent eundem reſpectum, ſeu habitudinem, & è cõtra: Pariterq; quòd inęqualium maior ad eandem maiorem proportionem habet, quàm minor; propterea quod reſpectus ille maior eſt iſto, & contra. in commento defin. 16. lib. V. Eucl.

Similiter deducunt, quòd proportiones, quę ſunt eadem vni tertię, eędem quoque ſunt inter ſe; cùm reſpectus ſimiles vni tertio, inter ſe quoque ſimiles ſint. Pari modo aiunt ſe euidenter percipere, quòd ſi duæ proportiones fuerint ſimiles inter ſe, quarum vna maior fuerit tertia quadam proportione: erit reliqua etiam maior. Itaque putant Euclidis propoſitiones 7. 8. 9. 10. 11. 13. eſſe euidentiſſima pronunciata lumine naturę cognita, ex quibus in duobus theorematibus demonſtratiuè oſtendunt vera eſſe ea, quę in definitionibus 6. & 8. ſupponit Euclides. Et poſtea inuerſiones, permutationes, compoſitiones, diuiſiones proportionum,

num, & reliquos modos argumentandi in proportionalibus, ex dictis theorematibus deducunt. At ego huic ſententię acquieſcere non poſſum; eo quod fundamentum eius, quòd nimirum 4. definit. lib. V. Euclidis (ſolitariè ſumpta) ſit bona, & ſcientifica, mihi ſtabile non videtur, vt mox oſtendam. Quęlibet res in mente preconcepta non poteſt declarari, & exponi abſque vocabulis, ſignificantibus illam rem; propterea pro tali declaratione inepta erunt vocabula ambigua, confuſa, & non expreſſiua. Nam ab his auditores non percipient mentem preceptoris; &, ſi non percipitur ſignificatus orationis, quo modo ſciri poteſt an ea, quæ proferuntur vera ſint, vel falſa, & an competant alicui ſubiecto? Et propterea ignota omnino erunt. Iam paſſio adhibita in definitione proportionalitatis, quę eſt ſimilitudo reſpectuum, quo ad quantitatem pertinet, *ſi exponitur vocabulis ambiguis, & obſcuris, cùm non declaret euidenter quid proportionales ſint, & quare diſtinguantur à ceteris rebus, erit ignota; & propterea non erit bona definitio, ideſt non poterit eſſe principium ſcientię; quandoquidem ne dùm certam, & euidentem cognitionem non affert, ſed potius incertitudinem, & ignorantiam.*

Videndum modò eſt, an voces, quibus paſſio proportionalium exponitur in dicta definitione quarta, ſint ambiguę, an verò notę, & euidentiſſimæ ſignificationis: Pro qua inquiſitione animaduertendum eſt, quòd vocabula illa, quorum ſignificatus ſimplex eſt, non ęquiuocus, vſu receptus, & vt talis ab omnibus percipitur abſque hæſitatione, acceptantur in ſcientijs mathematicis, nec indigent declaratione; vt ſunt hæc vocabula: Totum, Portio, Aequale, Maius, Minus, Exceſſus, Defectus, & alia quamplurima, quorum germanam ſignificationem nemo eſt, qui non intelligat: Reliqua verò vocabula, quę non ſunt huius generis non admittuntur in mathematicis, niſi prius expreſsè declaretur quid nam per illa ſignificari velimus, vt æquiuocationes omnino tollantur. Dico iam, quòd voces iſtę: ſimilitudo reſpectuum, quo ad quantitatem pertinet, *non ſunt prioris generis. Nam Euclides ipſe vocem ſimilitudinis declarauit in tertio libro dum ait*: circulorum ſegmenta ſimilia eſſe, quando anguli in ſegmentis ęquales ſunt. *Et in lib. VI. aliter eam expoſuit, dum ait*: triangula, & polygona ſunt ſimilia, quando ſunt ęquiangula, & circa angulos ęquales latera ſunt proportionalia. *Similiter in lib. XI.* ſolida ſimilia eſſe *dixit*, quę ex paribus multitudinibus polygonorum ſimilium cõtinentur; atque conos, & cylindros ſimiles inter ſe eſſe, quorum axes, ęquè inclinati ad baſes, proportionales ſunt diametris baſiũ. *Quare manifeſtum eſt vocem ſimilitudinis eſſe ambiguę ſignificationis; & ideò ſenſus horũ verborum*; ſimilitudo reſpectuum, quo ad quantitatem

titatem pertinet, *erit confuſe ſignificationis; proptèrea quod ſimilia vocantur ea, quę in aliquo conueniunt, ideſt, quę habent aliquam identitatem. Nam ſimilem habitudinem, quo ad quantitatem, ideſt quo ad menſuram, habere dicuntur duo magna comparata cum duobus paruis; eandem enim comparationem, ſeu reſpectum maioritatis habent ambę antecedentes ad ſuas conſequentes. Pari modo conuenientiam, & identitatem habent reſpectus duarum magnitudinum paruarum, ſi comparentur cum duabus quantitatibus magnis. Illi enim reſpectus ſimiles ſunt in minoritate.*

Non ſecus duę magnitudines ſimilem reſpectum inęqualitatis ad duas alias habere poſſunt: quando prima maior eſt ſecunda, & tertia minor eſt quarta. tunc enim ſimilitudo reſpectuum ſeruatur in eo, quòd ambę antecedentes inęqualitatis reſpectum habent ad ſuas conſequentes. Ita etiam duo excedentia ad duo deficientia, ſi exceſſus æquales fuerint, vel ambo dupli, vel ambo tripli, &c. ſimilem reſpectum, quo ad quantitatem, habebunt. nam conueniunt in exceſſus, vel defectus ęqualitate; neque dici poteſt ęqualia inter ſe ſimilia non eſſe: & ideò ęqualitas exceſſus, vel defectus, indicat reſpectus eſſe omnino ſimiles.

Dubitandum ergo non eſt voces, quibus proprietas proportionalium exprimitur habere ampliſſimum, ambiguum, & multiplicem ſignificatum. Quapropter definitio quarta proportionalitatis erit omnino imperfecta. Nam, ſi quęram quid nam demonſtrari debeat, vt concedatur quatuor magnitudines eſſe proportionales, & non habere inęquales proportiones? dicent, quod reſpectus, ſeu habitudo, quoad quantitatem pertinet, magnitudinis primę ad ſecundam demonſtrari debet ſimilis reſpectui, quo tertia refertur ad quartam. Sed rurſus inſto: quando, & quomodo reſpectus ille eſt ſimilis iſti? An quando, prima magnitudo maior eſt ſecunda, pariterque tertia maior eſt quarta? An quando prima minor eſt ſecunda, & tertia quoque minor eſt quarta? An ſi prima maior eſt ſecunda; tertia verò minor eſt quarta? Vel cùm exceſſus ambarum antecedentium ſupra conſequentes ęquales ſunt inter ſe, aut potius, cùm ambarum antecedentium defectus à conſequentibus ęquales fuerint? In his enim omnibus ſimiles ſunt reſpectus, aut in excedentia, aut in deficientia, aut in ęqualitate, vel in equali menſura exceſſuum, vel defectuum Neque negari poteſt eſſe tales reſpectus, ſeu habitudines, quo ad quantitatem pertinet: Scimus tamen huiuſmodi habitudines non eſſe proportionales. Ergo ſi quęratur tantummodo ſimilitudo habitudinum, vel reſpectuum, quo ad quantitatem pertinet, affirmare poſſem magnitudines eſſe proportionales, quando non ſunt; & negare poſſem alias eſſe proportionales, quando re vera ſunt. Hęc autem erit illa tam exaggerata certitudo ſcientię, an incertitudo, & ignorantia?

Sed dicet aliquis exponi debere hanc definitionem 4. ex mente eiuſdem Euclidis in alio loco expreſſa. Nam in 20. definitione lib. VII. dicuntur eſſe quatuor numeri proportionales, quando antecedentes ſunt æquè multiplices, vel eadem pars, aut eędem partes conſequentium. Quis non videt has habitudines, ſeu reſpectus eſſe omnino ſimiles inter ſe? Ergo eodem modo reliquę omnes magnitudines debent habere reſpectus ſimiles inter ſe, vt iure meritò proportionales ſint.

Mitto, quòd non propterea excuſatur obſcuritas definitionis quartę lib. V. Deinde notandum eſt ſolummodo in magnitudinibus commenſurabilibus percipi poſſe ſimilitudinem reſpectuum: At in magnitudinibus incommenſurabilibus, quando antecedentes non poſſunt eſſe multiplices, neque pars, neque partes conſequentium, qua euidentia, immo qua notitia quis animaduertet in illa infinitate partium, ſimilitudinem reſpectus, ſeu habitudinis? Quapropter ſi nulla cogitatione percipi poteſt euidenter quid nam ſit illud, per quod reſpectus primę magnitudinis ad ſecundam ſit ſimilis reſpectui tertię magnitudinis ad quartam eſt impoſſibile, vt prędicta definitio 4. abſque alia ſuperaddita declaratione ſit bona, & principium ſcientię.

Neque admitti poteſt ſententia preſtantiſſimi neoterici Auctoris, qui cenſet, quamquam expreſsè, & euidenter declarari nequeat, quid nam ſit illud, per quod vna proportio eſt ſimilis alteri, ſufficere tantùm, vt vna concedatur ſimilis alteri, & denique admittatur in natura dari proportionalitatem. At inquam ego, quomodo poſſum hoc concedere, ſi non percipio quidnam proportionalitas ſit? Et quomodo diſtinguere poſſum quando vna habitudo, quo ad quantitatem pertinet, eſt ſimilis, vel non, alteri, ſi hucuſque tradita non eſt paſſio prima, & euidenter cognita, per quam ſimiles reſpectus dignoſci poſſint? Et tandem quomodo concedere poſſum reperiri in natura reſpectus ſimiles, quo ad quantitatem pertinet, ſi horum verborum germanam ſignificationem non percipio? Quare ſi ignoro, an in natura dentur magnitudines proportionales multo minus ſcio cui ſubiecto certè, & euidēter paſſio proportionalitatis conueniat: Et quomodo diſtinguere poſſum magnitudines, quæ certè abſque hęſitatione ſunt proportionales ab iis, quę proportionales non ſunt? Quare nullo pacto ſciri poteſt an duæ æquales ad eandem magnitudinem habeant eandem proportionem; neque, quòd maior ad eandem habeat maiorem proportionem, quàm minor; & ſimiliter ea omnia, quæ in propoſitionibus 9. 10. 11. & 13. continentur ignota erunt. Et propterea inter euidentiſſima axiomata connumerari nulla ratione poſſunt. Nam iuxta pręcepta bonæ logicés axiomata exponunt euidentiſſimam, & perceptibilem paſſionem alicuius ſubiecti, cuius nomen receptum iam eſt. Et hic obiter notandum eſt, quod propoſitio ſeptima Euclidis rationabiliùs,

vt

vt definitio, quàm vt axioma afferri poterat, dicendo habitudines, quibus duæ magnitudines æquales eidem comparantur, vocentur ſimiles, & proportionales. Sed nihil ex tali definitione colligi potuiſſet, vt conſideranti patebit. Vanus eſt ergo labor clariſſimi huius auctoris in ſuo acutiſſimo lib. V. de proportionibus, qui facta hac ſuppoſitione, quòd nimirum dentur in natura magnitudines proportionales, quę ſcilicet habent ſimiles reſpectus, quo ad quantitatem pertinet, aſſumit propoſitiones 7. 8. 9. 10. 11. & 13. Euclidis, vt per ſe notas, & vt axiomata. Deinde in duobus triangulis æquè altis probat baſim vnius non eſſe maiorem, neque minorem, quam opus eſt, vt ad baſim alterius eandem proportionem habeat, quam triangulum ad triangulum: quod oſtendit ex dictis pronunciatis, more antiquorũ per deductionem ad inconueniens, mediante commenſurabili proportione triãgulorum, & baſium commenſurabilium. Sed prędictus progreſſus videtur obſcurus, & imperfectus: nã tradita non eſt definitio proportionalium, per aliquam primam, & euidenter cognitã paſſionem; quandoquidem ſimilitudo reſpectuum, quo ad quantitatem pertinet ambigua, & obſcura eſt; & ideò ignoratur an in natura dentur proportionales, & multo magis ignoratur, quando prima magnitudo eſt maior, aut minor, quàm opus eſt, vt ad ſecundam habeat eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam. Secundò imperfectus eſt eius progreſſus, quia permutationes, compoſitiones, diuiſiones, & reliqui modi argumentandi proportionalitatis oſtenduntur ſolummodo de lineis, & triangulis: & ipſe gratis aſſumit idem valere in reliquis quantitatibus, ſcilicet ſolidis, angulis, numeris, motibus, &c.

Igitur ſi liber V. Euclidis imperfectus eſt, non erit talis propter rationes ab Ametto, & ab eius fautoribus adductas: neque correctiones ab ipſis excogitatę huic defectui opportunæ ſunt: alia enim eſt cauſa, longè diuerſa, imperfectionis prędicti voluminis, quę vltimo loco in medium adducetur.

Accedo ad Clauium, qui in Comm. lib. V. poſt. 8. definitionem quærit, cur Euclides quatuor magnitudines proportionales & non proportionales per earum ęquè multiplices definiuit. *Reſpondet* 6. & 8. definitiones eſſe impoſitiones nominum ad placitum; & ideò quęri non debet quare ſic, vel aliter proportionales magnitudines Euclides definiuit, ſed ſufficit, vt in progreſſu demonſtrationis, definitum de definitione, & è contra, non affirmetur, niſi demonſtratiuè oſtendatur definitionem traditam ſubiecto definito competere. *Et poſtea ſubiungit;* ſed quanquam hęc reſponſio vera ſit, ac propria; tamen quia non videtur colligi poſſe, verè magnitudines, quarum ęquè multiplicia habent illam conditionem, eſſe proportionales, &

non proportionales,etiam ſi eas ſolùm velit Euclides appellare proportionales; propterea explicandum eſt accuratius,&c.

Sed hęc verba ritè intelligi debent:nam ſi nomen proportionalitatis ſolummodo illis magnitudinibus, habentibus talem conditionem æquè multiplicium, impoſitum eſt, & non alijs quo modo dubitari poteſt an eędem magnitudines ſint verè proportionales? Quare longè diuerſa mihi videtur intentio oculatiſſimi Clauij. Exiſtimo enim conſiderare voluiſſe methodum, quà bonæ definitiones quæri debent. Et re vera ſi ageretur in definitione de nomine imponendo tantùm, certum eſt, quòd non debet reddi ratio, quare hoc nomine potiùs, quàm alio aliqua res definiatur, & nominetur. At, quia etiam tractari debet de electione proprietatis rei definiendæ, quę non caſu, neque arbitrariè ſumi debet, ſed certis rationibus, ac legibus, conuenienter quęri poteſt, quare in definitione adhibetur potius hęc, quàm alia proprietas. Nam, ſi re vera non ſit eius proprietas, aut non ſit notiſſima omnium, aut non ſit expreſſa verbis ſignificantibus, non habebit vſum in ſcientia, & non erit principium demonſtrationis. Ergo, ſicuti non poteſt quis petere quare in definit. 6. Euclides impoſuit illis magnitudinibus nomen Proportionalium, ita benè Clauius quęrere poſſet quare Euclides in tali definitione elegit proprietatem illam æquè multiplicium potiùs, quàm aliam.

Huic dubitationi reſpondet, quòd, ſi omnes magnitudines eſſent inter ſe commenſurabiles, nihil aliud pręter 20. propoſ. lib. VII. deſiderari poſſet; at quia definit. 6. lib. V. complecti voluit etiam incommenſurabiles magnitudines, quę illum reſpectum mutuum perceptibilem minimè habere poſſunt; cùm altera alterius, neque multiplex neque pars, neque partes eſſe poſſit; propterea excogitauit Euclides proprietatem quandam, quę magnitudinibus proportionalibus commenſurabilibus certè competit, *& fuit hęc*, Quod nimirum ipſarum ęquè multiplices haberent illam conditionem exceſſus, vel ęqualitatis, vel defectus.

Sed huiuſmodi ratiocinium potius coniecturam, quàm neceſſitatem inducere videtur. Nam, licet proprietas tradita in 6. definit. lib. V. ſit aliquid, quod certum ſit conuenire magnitudinibus proportionalibus inter ſe commenſurabilibus, (vt ipſemet Clauius oſtendit in illis ſuis quatuor propoſitionibus) non dicentur iure optimo quatuor incommenſurabiles magnitudines, etiam proportionales, ſi ipſis idem demonſtretur conuenire; propterea quod, vt aliqua proprietas ſit vniuerſalis, non ſufficit, vt ſolum oſtendatur conuenire vni particularium, niſi etiam demonſtretur conuenire reliquis omnibus particularibus ſub vniuerſali contentis; quod oſtendi poteſt tali exemplo. Si quis quæreret vniuerſalem paſſionem competen-

peten-

petentem cuilibet triangulo, & putaret eſſe proprietatẽ cuiuslibet trianguli habere duos angulos, quorum quilibet tertia pars ſit duorum rectorum. Hic iam oſtendere poſſet quod prædicta proprietas competit triangulis ęquilateris: neque hac de cauſa abſque alia demonſtratione concludere poterit, quòd reliquę ſpecies triangulorum, vt ſunt ambligonii, & oxigonÿ, habent duos angulos, quorum quilibet tertia pars eſt duorum rectorum.

Non igitur certè affirmari poteſt, quòd proprietas illa æquè multiplicium certè competat magnitudinibus proportionalibus inter ſe incommenſurabilibus, non alia de cauſa, niſi quia oſtenſum eſt commenſurabilibus proportionalibus certè competere æquè multiplicium proprietatem.

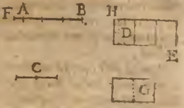
Huiuſmodi difficultates oriri mihi videntur ex præconcepta opinione, quòd dentur quatuor magnitudines incommenſurabiles inter ſe, quarum habitudines, ſeu reſpectus eandem naturam habeant, quam magnitudines proportionales inter ſe commenſurabiles habent. Et quia in 20. definit. lib. VII. affertur proprietas prima, & euidentiſſima, qua declaratur natura proportionalium commenſurabilium, ex eo, quod antecedentes ſunt ęquè multiplices conſequentium, vel eadem pars, vel ſunt eædem partes; ex qua euidentiſſima paſſione diſtinguuntur proportionales à non proportionalibus; & ſic percipitur, quòd antecedentes poſſunt eſſe vnà maiores, aut vnà minores conſequentibus; at eius conuerſum non verificatur. Non enim, ſi ambę antecedentes excedunt ſuas conſequentes, aut deficiunt ab eis, erunt proportionales: poteſt enim eſſe prima dupla ipſius ſecundæ, & tertia quintupla ipſius quartæ, nec propterea erunt proportionales; quandoquidem equè multiplices non ſunt; & ſic dicendum eſt de reliquis. Pari modò percipitur, quòd exceſſus antecedentium, ſiue defectus poſſunt eſſe æquales inter ſe, & etiam inæquales, & multoties incomparabiles; quando nimirum duæ quantitates ſunt vnius generis, & aliæ duę alterius generis. At in magnitudinibus incommenſurabilibus, in quibus neque multiplicitas, neque identitas partis, aut partium reperiri poteſt, omnes iam dictę proprietates in eis haud conſpici poſſunt. Nam in illa ineffabili congerie partium, ſeu potius infinitate, incommenſurabilium magnitudinum, non poſſunt eius proprietates comprehendi: Voluit nihilominus Euclides venari proprietatem competentem prędictis magnitudinibus proportionalibus inter ſe incommenſurabilibus; & hæc expoſita fuit in ſexta definitione: ſed re vera dici non poteſt, quòd aſſignata proprietas naturam rei definitę declaret, & diſtinguat à qualibet alia; imo rem difficilem, obſcuriorem reddit. Primò enim ignoratur, an in natura reperiri poſſint quatuor quantitates, habentes talem paſſionem, quòd nimirum infinitę æquè multiplices antecedentium, ſi comparentur cum infinitis ęquè multiplicibus conſequentium, debeant vnà excedere, vel vnà æquari, aut defi-

deficere ab illis. Secundò infinitæ illę comparationes comprehendi non poſſunt; & ideò hęc paſſio non erit euidentiſſima, qualis debet eſſe illa, quæ principium ſcientiæ conſtituit. Tertiò licet hypotheticè concedatur, adhuc ignotum eſt quidnam ex ambage illa infinitarum comparationum, colligi debeat. Nam nec ipſe Clauius expeditè, & lumine naturę colligere potuit ex paſſione æquè multiplicium in magnitudinibus commenſurabilibus proportionalitatem; ſed coactus fuit hoc demonſtrare in ſuis illis quatuor propoſitionibus. Sed quomodo erit notiſſima illa paſſio, quæ abſque demonſtratione acceptari non poteſt in magnitudinibus commenſurabilibus? & quę inſufficiens iudicata fuit ab ipſomet Euclide, quando proportionalitatem commenſurabilem iterum lib. VII. definiuit. Certum ergo eſt obſcuram, & difficilem eſſe proprietatem proportionalium definitionis ſextę; propterea quod nedùm euidenter naturam proportionalium incommenſurabilium non declarat, vt 20. defin. VII. facit, ſed rurſus (quod mirum eſt) neque manifeſtat ea, quæ de re ipſa definienda pręcognoſcebamus. Nam ex eo, quod quatuor magnitudinum ęquè multiplices habent illam conditionem exceſſus, vel defectus, minimè percipitur quando, & quo modo, ſi antecedentes vnà excedant, aut deficiant à ſuis conſequentibus, ſint proportionales; neque ſi exceſſus ſint inter ſe æquales, nec ne. Nec demum hęc minima cognitio ex dictà proprietate colligi poteſt, quòd ſcilicet: ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, cùm prima excedit ſecundam, neceſſariò tertia magnitudo quartam ſuperare debet; quod Clauius conſitetur in 16. propoſ. lib. V. elementorum.

Quis ergo dicet ſextam definitionem eſſe bonam, & principium ſcientiæ, ſi tam obſcuram affert cognitionem, & imperfectam? Videndum modò eſt in qua parte huius definitionis defectus lateat. Et quia in nomine ipſo proportionalitatis defectus nullo pacto reperiri poteſt, vt dictum eſt; Remanet ergo, vt in proprietate definita peccatum lateat. Sed in proprietate tria conſiderari poſſunt; quòd ſit poſſibilis, & competat ſubiecto definito: ſecundò vt ſit expoſita vocibus clarè aliquid ſignificantibus; Tertiò vt ſit proprietas prima, & omnium notiſſima, quę illi ſubiecto competunt. Primùm dici non poteſt, quia magnitudines, quarum æquè multiplices habent dictam conditionem re vera ſunt res definitę; vt poſtea oſtendetur. Neque ſecundum, nam verba ſextę definitionis exponunt abſque ambiguitate quid ſit talis proprietas. Remanet ergo, vt proprietas illa non ſit notiſſima, prima omnium, quę illi ſubiecto competunt. Et re vera alia proprietas incommenſurabilium notior reperiri poteſt, quæ naturam proportionalium, & ea omnia, quę ex 20. propoſ. lib. VII. primo intuitu patent manifeſtiſſimè declarat; quod nimimè dici poteſt de proprietate ęquè multiplicium tradita ab Euclide, vt dictum eſt.

Quod

Quod autem alia proprietas magnitudinum proportionalium notior reperiri poſſit apertè percipiet is, qui attentè definitiones ſuperiùs expoſitas conſideraverit. Nam ſi fuerint quatuor magnitudines commenſurabiles A B, C, H E, & G, atque prima A B ſit ipſius ſecundæ C quælibet partes: ponatur A B ſeſquialtera ipſius C; pariterque H E ponatur ſeſquialtera ipſius G: erunt iam ex octaua noſtra definitione quatuor prædictæ quantitates inter ſe proportionales; eò quod prima ipſius ſecundæ eædem partes eſt, quæ tertia eſt partes quartæ; & propterea reſpectus, quo prima A B refertur ad ſecundam C, ſimilis eſt reſpectui, quo tertia H E refertur ad quartam G. Intelligatur poſtea quælibet particula F A addita ipſi A B, ita vt conurgat tota F B, aut commenſurabilis, aut non, ipſi C. Manifeſtum eſt ipſam F B maiorem eſſe quàm opus eſt, vt ſit ſeſquialtera ipſius C. Et propterea F B maior erit, quàm neceſſe eſt, vt ſit ipſius C eædem partes, quàm eſt H E alterius G. Vnde proportio F B ad C maior erit proportione ipſius H E ad G, & hæc omnia conſpicua ſunt ex 20. definit. lib. VII. Euclidis, quæ ſupra relata fuit. Deinde ex tertia quantitate H E auferatur quælibet particula H D, cuiuſcunque paruitatis, ita vt reſiduum D E incommenſurabile ſit ipſi G. Manifeſtum eſt ipſam D E minorem eſſe, quàm ſeſquialtera alterius G; & ideò facili negotio quilibet percipiet, quòd reſpectus, quo D E refertur ad G minor eſt illo, quo H E refertur ad eandem G, ideſt minor eſt reſpectu, quo A B refertur ad C; ſed erat reſpectus, quo F B refertur ad C maior illo, quo eadem A B refertur ad eandem C. Nemo ergo negabit maiore reſpectu F B referri ad C, quàm D E ad G. Quapropter ſi fuerint quatuor quantitates F B prima, C ſecunda, D E tertia, & G quarta, (licet F B ipſi C, atque D E ipſi G incommenſurabiles ſint) dubitandum non eſt primam ad ſecundam maiorem proportionem habere, quàm tertia habet ad quartam, ex eo quod proportio quantitatis primæ F B ad ſecundam C maior eſt tertia quadam commenſurabili proportione, quam H E habet ad G; ſed proportio tertiæ quantitatis D E ad quartam D minor eſt eadem commenſurabili proportione, quam H E habet ad G. Et hæc erit proprietas à qua natura rei definitæ apertè declaratur, & diſtinguitur à qualibet alia. Ergo æquali euidentia in magnitudinibus commenſurabilibus percipitur, quando vna proportio maior eſt alia, ac dignoſcitur, in hiſce magnitudinibus incommenſurabilibus, per dictam proprietatem à me excogitatam. Si ergo euidentiſſima, & omnium prima iudicatur paſſio illa, qua inæqualitas proportionum, in magnitudinibus commenſurabilibus



libus

libus declaratur ex 20. definit. lib. VII. pariter prima, & euidentiſſima erit hæc noua paſſio magnitudinum incommenſurabilium, non proportionalium. Vtręque enim per exceſſus, aut defectus proportionalium commenſurabilium declarantur; qui quidem perceptibiles omnino ſunt, & poſſibiles, neque procedunt per ambages illas infinitarum ęquè multiplicium; ſed primo intuitu abſque vllo ratiocinio percipi, & admitti poſſunt.

Iam ex dicta proprietate non proportionalium incommenſurabilium, à me definita deduci poteſt, quòd, ſi prima magnitudo exceſſerit ſecundam, & tertia non ſuperauerit quartam, (vt in appoſito exemplo patet) prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia habet ad quartam. Nam facilè percipitur, quòd aliqua quantitas maior, quàm tertia, aut ipſamet tertia, eſſe poteſt æqualis quartę: Ponebatur autem prima maior ſecunda. Igitur proportio primę ad ſecundam maior erit commenſurabili proportione ęqualitatis; at proportio tertię ad quartam non eſt maior eadem equalitatis proportione. Rurſus patet conuerſum huius propoſitionis falſum eſſe; ſcilicet, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam, non eſt neceſſe, vt prima ſecundam excedat, at tertia non ſuperet quartam. Nam ex primo exemplo percipi poteſt, quòd tertia proportio commenſurabilis poteſt eſſe multiplicitatis, vt decupla, & prima poteſt eſſe maior, quàm decupla ſecundę; at tertia minor, quàm decupla, & maior, quàm octupla ipſius quartę; licet duæ antecedentes F B, & D E ſimul, excedant, aut vna deficiant à ſuis conſequentibus C, & G. Simili modo alię cognitiones proportionalium in magnitudinibus incommenſurabilibus percipi poſſunt eadem facilitate, qua comprehenduntur reperiri poſſe in magnitudinibus commenſurabilibus.

Tandem ſicuti natura proportionalium commenſurabilium, pari euidentia declarari potuiſſet per proprietatem affirmatiuam, ac negatiuam, dicendo: ſi prima magnitudo ad ſecundam non habuerit maiorem, neque minorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam: vocentur commenſurabiles illę quantitates proportionales. quia quando reſpectus, quo prima refertur ad ſecundam non eſt maior, neque minor illo reſpectu, quo tertia comparatur quartę, neceſſariò illi reſpectus ſimiles & ęquales erunt inter ſe. & ſic quando prima ipſius ſecundę non eſt maior, neque minor, quàm opus eſt, vt eædem partes ſit, quæ tertia partes eſt quartę, neceſſariò ambę antecedentes erunt eędem partes conſequentium; & definitio proportionalium commenſurabilium tam per affirmationem, quàm per negationem proprietatis exponi poſſet. Nam vtroque modo exponitur quid ſit proportionalitas, & quare diſtinguatur à non proportionalibus, ſcilicet percipitur quando vna proportio ſimilis eſt alteri, &

quare

quare differunt à proportionibus inæqualibus.

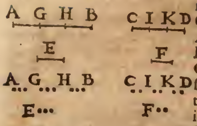
Simili modo poſtquam in magnitudinibus incommenſurabilibus euidenter percipitur quando, & quare vna proportio maior eſt alia, aut minor, dici poterit: ſi prima magnitudo ad ſecundam non habuerit maiorem neque minorem proportionem incommenſurabilem, quàm tertia habet ad quartam: vocentur illę Proportionales. Et re vera, ſi hic afferri poſſet proprietas affirmatiua eſſet eligenda; at quia hoc fieri nequit, recipi debet illa, quanquam negatiua, dummodo ſit euidenter cognita. Non enim inſolens eſt, vt negatiuæ proprietates definiantur: Euclides enim per negationem punctum, & lineas parallelas definiuit. Vnde nihil refert an proprietas ſit negatiua, vel affirmatiua; ſed ſufficit, vt euidenter exponat naturam rei definitę, id quod hęc mea definitio perfectè exequitur.

Iam ex hac euidentiſſima definitione ignotæ illæ proprietates definitionum ſextę, & octauę Euclidis demonſtrari poſſunt. Et quia percepi duplici forma librum quintum Euclidis reſtitui poſſe: primò ſi tantummodo proprietates definitionum ſextæ, & octauæ cum ſuis conuerſis demonſtratę fuiſſent, relictis omnibus propoſitionibus V. lib. vt ab Euclide traditæ ſunt; aut ſi nulla mentione facta illarum definitionum, omnia hac noua methodo expoſuiſſem. & licet hoc ne dum ob nouitatem, ſed etiam propter euidentiam methodi non iniucundum fore perciperem, nolui tamen definitiones illas Euclidis ommittere; tum quia in elementis vſu recepta ſunt, cùm etiam quia ab alijs, & pręcipuè ab Archimede in ſuis demonſtrationibus adhibentur. Quare mediam viam elegi: Nam omnes proprietates proportionalium non per æquè multiplices tradidi, & etiam paſſiones æquè multiplicium demonſtraui: & ſic puto hanc pręcipuam Geometrię partem hactenus dubiam, & imperceptibilem me reſtituiſſe niſi fortè me fallat, vel propriarum rerum propenſio, vel amicorum ſumma nobilitate, ac doctrina præſtantium, plauſus, quibus cum in vniuerſa Sicilia, Romę, Neapoli, Genuę, ac Florentiæ quindecim ab hinc annis ipſam communicaui.

PROPOS. I. THEOR. I.

Si duę quantitates duarum quantitatum fuerint ęquè multiplices, erunt viciſſim vnà ęquales, aut vnà maiores, aut minores.

Sint quatuor quantitates, ſiue magnitudines, ſiue numeri A B, E, C D, & F, omnes eiuſdem generis, & ſit A B tam multiplex ipſius E, quàm C D eſt multiplex alterius F; ſitque pri-

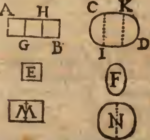


mò E ęqualis F. Dico A B ipſi C D ęqualem eſſe. intelligantur A B,& C D diuiſę in ſuas partes. Manifeſtum a eſt tot partes A G,G H, & H B contineri in A B, ſingulę ęquales ipſi E, quot partes C I, I K, & K D continentur in C D, ſingulę ęquales eidem F. Ergo A G,& C I cũ ſint ęquales ęqualibus E, & F, inter ſe quoq; ęquales erunt, pariterq; G H, I K, nec non H B, & K D ęquales erunt inter ſe. Iam ſi ęqualibus A G, C I addantur ęquales G H, I K: erunt b totę A H, & C K ęquales inter ſe; Et ſi eiſdem rurſus ęquales H B, & K D addantur, erunt totę A B, & C D ęquales inter ſe. Quare quando E ęqualis eſt F: etiam A B. ęqualis eſt ipſi C D.

a Def. 5. huius.

b Ax. 2. lib. 1.

Sit ſecundò E maior, quam F. Dico A B maiorem eſſe, quã C D. Diuiſis ęquè multiplicibus, vt prius: erit A G maior, quàm C I, eo quod illa maiori E, hęc verò minori F ęqualis eſt. Pari ratione G H maior erit, quam I K, & H B maior, quàm K D. Iam, ſi maiori A G maior G H addatur, & minori C I minor I K coniungatur, & rurſus eiſdem eodem ordine alię partes inęquales ſuperaddantur, erit tota A B maior, quàm C D.



Tertio ſit E minor, quàm F. Dico A B minorem eſſe, quàm C D. Quia E minor eſt, quàm F. Ergo F maior erit, quàm E; ideoque c C D etiam maior erit, quàm A B.

c Ex prima parte.

Quartò ſit A B æqualis C D. Dico E æqualem eſſe ipſi F. Si hoc verum non eſt: erit E maior, aut minor, quàm F. Ergo, ex ſecunda, & tertia parte huius, A B maior, aut minor erit, quàm C D, quod eſt contra hypotheſin. Ergo E ipſi F æqualis eſt.

Quintò ſit A B maior, quàm C D. Dico E maiorem eſſe, quàm F. Sin minus, erit E æqualis, aut minor, quàm F. Vnde, ex prima, & tertia parte huius, A B æqualis erit, aut minor quàm C D, quod eſt contra hypotheſin. Quare E maior eſt, quàm F. Vnde patet propoſitum.

CO-

COROLLARIVM.

Patet, quòd ſi duę quantitates fuerint duarum quantitatum eędem partes, erunt viciſſim vnà maiores, aut vnà minores, vel vnà ęquales;

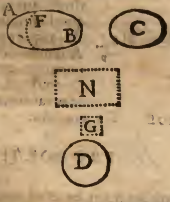
Nam, ſi ponantur M, & N ęquè multiplices earundem E, & F: erunt *d* A B ipſius M, atque C D ipſius N eędem partes; & ſicuti *e* E maior, vel minor, aut ęqualis eſt ipſi F; ſic pariter M maior, vel minor, aut ęqualis erit ipſi N; nec non A B eodem modo maior, vel minor, aut ęqualis erit ipſi C D. *d Def. 6. huius. e prop. 1. huius.*

Eucl. 8. V.

PROPOS. II. THEOR. II.

Inęqualium quantitatum maior ad eandem maiorem proportionem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem maiorem proportionem habebit, quàm ad maiorem inęqualium.

Sint duę quantitates A B maior, C minor, & quęlibet tertia D eiuſdem generis. Dico primò A B ad D maiorem rationem habere quàm C ad eãdem D. Ex maiore A B intelligatur ablata F B equalis ipſi C, reſidua erit A F: *a* intelligaturq; ſecta D bifariã, & bifariã ſucceſſiuè, quouſq; reperiatur eius pars G, quę minor ſit, quàm A F (quod fieri poſſe conſtat licet in numeris multoties fracti adhiberi debeant): poſtea ſumatur G ſemel, aut bis, vel ter, & ſic vlterius, quouſque conſurgat N, ex G compoſita, quę proximè maior ſit, quàm F B, ſcilicet exceſſus ipſius N ſupra F B non ſit maior, quàm vna eius particula G: cùmque G minor ſit, quàm A F: *a Schol. propoſ. 27. l. 2.*



erit exceſſus ipſius N ſupra F B minor, quàm A F; & ideo N minor erit, quàm A B, ſed maior, quàm F B, ſeu maior, quàm C (cùm C, & F B ęquales ſint). Vnde erunt quatuor quantitates A B prima, D ſecunda, C tertia, & D quarta (concipitur enim D, vt ſecunda, & vt quarta). Eſtque *b* proportio quanti- *b Def. 9. huius.*

A 2 F 8 B. C 8

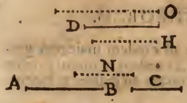
N 9 G 1 $\frac{1}{2}$

D 6

tatis primę A B ad ſecundam D maior illa commenſurabili proportione, quam habet N ad eandem D (eo quod A B maior eſt, quàm N); atque c proportio quantitatis tertię C ad quartam D minor eſt eadem commenſurabili proportione, quam habet N ad D (cùm C. ſit minor, quam N). Ergo d quantitas A B ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D.

c Def. 9. huius.
d Def. 10. huius.

Secundò dico eandem D ad minorem C habere maiorem proportionem, quàm ad A B. vt prius, fiat N partes ipſius D, ita vt ſit minor quàm A B, ſed maior, quàm C: & intelligantur O quidem ipſius A B, atque H ipſius C eedem partes, quæ D partes eſt ipſius N. Et e quia N minor eſt quàm A B, erit D minor, quàm O: pariterque quia N maior eſt, quàm C, erit D maior, quàm H. Quapropter erunt quatuor quantitates, prima D, ſecunda C, tertia D (concipitur enim D, vt prima, & vt tertia), & quarta A B; f eſtque proportio primę D ad ſecundam C maior commenſurabili illa proportione, quam habet H ad C ſiue O ad A B (eo quod H minor, quàm D; g eſt ad C, vt O ad A B); atque h proportio tertię D ad quartam A B minor eſt eadem commenſurabili proportione, quam habet O ad A B (eo quod D minor eſt, quam O). Ergo i D ad C maiorem rationem habet, quàm D ad A B. Quod erat, &c.



e Coroll. Prop 1. huius.

O 6 $\frac{1}{3}$ D 6

N 9 H 5 $\frac{1}{3}$

A 10 B C 8

f Def. 9. huius.
g Def 8. huius
h Def. 9. huius
i Def 10. huius.

Eucl. 7. V.

PROPOS. III. THEOR. III.

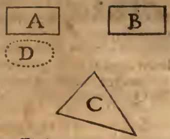
Aequales quantitates ad eandem habent eandem proportionem, & eadem ad ęquales.

Sint quantitates eiuſdem generis A, B, & C; & A ſit ęqualis B. Dico A ad C eſſe, vt B ad C. ſi enim hoc verum non eſt, aliqua a quantitas reperietur in natura maior, vel minor quàm

a Ax. 3. huius.

quàm

quàm A, quę ad C habeat eandem rationem, quam B habet ad eandem C. Intelligatur illa eſſe, ſeu vocari D. Et quia D, & A inęquales ponuntur, eſtque B ęqualis A; Ergo D maior, aut minor eſt, quàm B; & ideo b D maiorem, aut minorem proportionem habebit ad C, quàm B habet ad eandem C, quod eſt impoſſibile: Poſita enim fuit D ad C, vt B ad eandem C. Non ergo alia quantitas maior, aut minor, quàm A, erit ad C, vt B ad C; ideoque ipſamet A ad C erit, vt B ad C. *b prop. 2. huius.*



Secundò dico C ad A, atque ad B eandem proportionem habere. Si enim hoc verum non eſt, quam c rationem habet C ad B habebit C ad aliquam aliam quantitatem D. Et quia D, & A inæquales conceduntur, & eſt B ęqualis A: Ergo D maior, aut minor eſt, quam B; & ideò d C ad B maiorem, aut minorem rationem habebit, quàm C habeat ad D, quod eſt impoſſibile. Poſita enim fuit C ad B, atque ad D in eadem ratione. Non ergo C ad maiorem, vel minorem, quàm A, eandem rationem habet, quàm C ad B; ideoque C ad ipſam A eandem proportionem habet, quam ad B. Quare patet propoſitum. *c Ax 1. huius.* *d prop 2. huius.*

A 25. B 25.

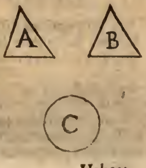
D...

C 47.

PROPOS. IV. THEOR. IV. *Eucl. 5. V.*

Quæ ad eandem quantitatem eādem proportionem habent, æquales ſunt inter ſe. Et ad quas eadem quantitas eandem proportionē habet, eæ quoque inter ſe ſunt ęquales.

Sint tres quantitates A, B, & C; & primò A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad eandem C. Dico A ipſi B æqualem eſſe. Si enim A non eſt ęqualis ipſi B, erit aut maior, aut minor eadem. Ergo a A ad C maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm B ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A maior eſt, aut minor, quàm B. vnde æqualis erit ipſi. *a prop. 2. huius.*



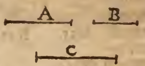
Habeat

Habeat ſecundò eadem C ad A eandem proportionem, quàm ad B. Dico pariter A çqualem eſſe ipſi B. Si enim A non eſt çqualis B: erit aut maior, aut minor eadem. Quare
b prop 2. huius. eadem *b* C ad A minorem, aut maiorem proportionem habebit, quàm ad B, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A maior, aut minor eſt, quàm B. Quare neceſſariò æqualis erit illi. Quod erat oſtendendum.

Eucl 10. V.

PROPOS. V. THEOR. V.

Ad eandem quãtitatem rationem habentium, quç maiorem rationem habet, illa maior eſt. Et ad quam eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.



Habeat primò A ad C maiorem rationem, quàm B ad eandem C. Dico A maiorem eſſe ipſa B. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit A, aut çqualis, aut
a prop. 3. huiu. minor, quàm B; & ideò A *a* eandem, aut *b* minorem rationem habebit ad
b prop. 2. huius. C, quàm habeat B ad eandem C. quç ſunt falſa, & contra hypotheſin. Non ergo A çqualis, aut minor eſt, quam B. Quare neceſſe eſt A ipſa B maiorem eſſe.

Secundo eadem C habeat ad B maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B ipſa A minorem eſſe. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit B, aut çqualis, aut maior, quàm A; & ideò C ad
c prop. 3. huius. B *c* eandem, aut *d* minorem proportionem habebit, quam ad A, quç ſunt contra hypotheſin. Non ergo B çqualis, aut ma-
d prop. 2. huius. ior eſt ipſa A. Quare minor erit illa. Quç erant oſtendenda.

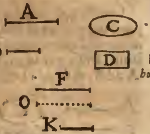
Eucl 13. V.

PROPOS. VI. THEOR. VI.

Si duç proportiones ſimiles fuerint inter ſe, & vna illarum maior, aut minor fuerit aliqua tertia proportione: erit quoque reliqua maior, aut minor eadem.

Sit A ad B, vt C ad D, & quçlibet alia proportio F ad K: Et primò A ad B habeat maiorem rationem, quàm F ad K. Dico C ad D maiorem proportionem quoque habere, quàm
a Def. 10. huiu. F ad K. Quoniam A ad B maiorem rationem habet, quàm F ad K. Ergo *a* proportio A ad B maior erit aliqua commenſurabili

rabili proportione, quę ponatur eſſe O ad K; At proportio F ad K erit non maior eadem commenſurabili ratione, eiuſdem O ad K, Dico iam, quod proportio C ad D maior eſt commenſurabili proportione O ad K. Nam, ſi fieri poteſt, ſit proportio C ad D non maior eadem ratione commenſurabili O ad K; cùmq; proportio A ad B maior ſit eadem commenſurabili proportione O ad K. Igitur [b] A ad B maiorem proportionē habet, quàm C ad D, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo proportio C ad D eſſe poteſt non maior ratione cōmenſurabili O ad K; ideoque maior erit illa; eſtque proportio F ad K non maior eadem commenſurabili ratione O ad K. Igitur [c] C ad D maiorē proportionem habebit, quàm F ad K.



b *Def. 10. huius.*

c *Def. 10. huius.*

Secundò quando A ad B minorem rationem habet, quàm F ad K: pari modo oſtendetur, quòd proportio C ad D minor eſt commenſurabili ratione O ad K, dum proportio F ad K non minor eſt eadem ratione commenſurabili O ad K. Vnde C ad D minorem rationem habebit, quam F habet ad K. Quæ erant oſtendenda.

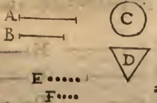
A 7	C 14
B 6	D 12
	F 10
	O 9
	K 6

PROPOS. VII. THEOR. VII.

Eucl. 11. V

Proportiones, quæ ſunt eędem vni tertię, ſunt eædem quoque inter ſe.

Sit proportio quantitatis A ad B eadem, quæ C ad D; & pariter E ad F ſit, vt C ad D. Dico eſſe A ad B, vt E ad F. Si hoc verum non eſt, habeat, ſi fieri poteſt, A ad B maiorem proportionem, aut minorem, quàm E habet ad F. Et quia proportio E ad F eadem ſuppoſita eſt, quę C ad D; & proportio E ad F maior, aut minor conceſſa eſt proportione magnitudinis A ad B. Ergo [a] C ad D maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm A ad B, quod eſt contra hypotheſim. Erat enim C ad D, vt A ad B. Non ergo A ad B maiorem, aut



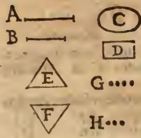
a *prop. 6. huius.*

aut minorem proportionem habere poteſt, quàm E ad F; & ideo A ad B erit, vt E ad F. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

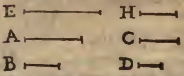
[b prop. 6. huius.] [c prop. 7. huius.]

Conſtat ex duabus hiſce propoſitionibus, quod duę proportiones inter ſe ſimiles, vnà maiores, aut vnà minores, vel ambę eędem erunt duabus alijs proportionibus inter ſe ſimilibus. Poſita G ad H, vt E ad F, quoniam duę ſimiles rationes A ad B, & C ad D oſtenſę [b] ſunt vnà maiores, aut vnà minores, vel [c] ambę eędem rationi E ad F; atque duę ſimiles rationes E ad F, & G ad H ſunt vnà maiores, aut vnà minores, vel ambę eędem rationi C ad D. Ergo quando ratio A ad B maior eſt ratione E ad F, etiam proportio C ad D maior erit proportione G ad H. Et quando proportio A ad B minor eſt proportione E ad F, erit pariter proportio C ad D minor proportione G ad H: Atque cùm proportio A ad B eadem eſt proportioni E ad F, ſimiliter erit proportio C ad D eadem proportioni G ad H.



PROPOS. VIII. THEOR. VIII.

Si fuerint quatuor quantitates proportionales, & quinta ſit maior, quàm prima, & ſexta non maior, quàm tertia: erit quinta ad ſecundam in maiori proportione, quàm ſexta ad quartam: Et quinta ad ſextam in maiori proportione, quàm prima ad tertiam. Et, ſi quinta maior ſit ſecunda, & ſexta non maior quarta, erit prima ad quintam in minori proportione, quàm ſecunda ad ſextam.



[a prop. 5. huius.]

Sit A ad B in eadem ratione, quam C habet ad D, & E ſit maior, quàm A, & H non ſit maior, quàm C, id eſt ſit H ęqualis, aut minor ipſa C. Dico primò E ad B maiorem proportionem habere, quàm H ad D. Quia [a] maior E ad B maiorem rationem

nem habet, quàm minor A ad eandem B; eſtque C ad D, vt A ad B: Ergo [b] E ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D; ſed C ęqualis, aut maior eſt, quàm H. Igitur C ad [c] eandem D eandem, aut [d] maiorem rationem habet, quàm H ad D. Quare [e] proportio E ad B adhuc maior erit proportione H ad D.

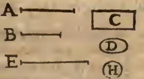
b prop. 6. huius. c prop. 3. huius. d prop. 2. huius. e prop. 6. huius.

Secundò dico E ad H maiorem proportionem habere, quã A ad C. Quoniam E maior eſt, quàm A. Ergo [f] E ad H maiorem ratione habebit, quàm A ad eandem H; eſtque H ęqualis, aut minor ipſa C. Igitur eadem A ad H [g] eandem, [h] aut maiorem rationem habet, quàm ad C. Et propterea [i] E ad H adhuc maiorem proportionem habebit, quàm A habet ad C,

E 7	H 27
A 6	C 30
B 5	D 25

f prop. 2. huius. g prop. 3. huius. h prop. 2. huius. i prop. 6. huius.

Tertiò ſit E maior ſecunda B proportionalium, & H non ſit maior quam D. Dico A ad E minorem proportionem habere, quàm C ad H. Quoniam E maior eſt, quàm B, at H non eſt maior, quàm D. Ergo [k] eadem A ad maiorem E habebit minorem proportionem, quàm ad B minorem; eſtque C ad D, vt A ad B. Igitur [l] A ad E minorem proportionem habet, quàm C ad D. Sed eadem C ad non maiorem H [m] eandem, aut [n] maiorem proportionem habet, quàm ad D. Igitur [o] proportio A ad E adhuc minor erit proportione C ad H. Vt propoſitum fuerat.



k prop. 2. huius. l prop 6. huius. m prop. 3. huius. n prop. 2. huius. o prop 6. huius.

PROPOS. IX. THEOR. IX.

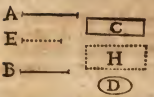
Eucl. Corol. prop. 4. lib. V.

Si prima quantitas ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, erit ſecunda ad primam, vt quarta ad tertiam. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma Inuerſio rationis.

Sit A ad B, vt C ad D. Dico B ad A eandem rationem habere, quam D ad C. Si enim hoc verum non eſt, habebit B ad A maiorem, aut minorē proportionē, quàm D habet ad C; & ſi fieri poteſt, primò ſit proportio maior. Ergo [a] proportio B ad A maior erit; proportio verò D ad C non erit maior eadē proportione cōmenſurabili (quę ponatur eſſe quantitatis E ad A,

a Def. 10.

 atque



atque H ad C); & propterea B maior erit, quàm E, ſed D non erit maior, quàm H. Et quoniam E ad A, atque H ad C in eadem ſunt proportione commenſurabili. *b* Igitur E ipſius A, atque H alterius C ęquè multiplices, vel eadem pars, aut eędem partes erunt; & è contra *c* A ipſius E, nec non C alterius H eadem pars, vel æquè multiplices, aut eędem partes erunt: & ideo *d* A ad E; atque C ad H in eadem proportione erunt; eſtque B maior, quàm E; at D non maior, quàm H. Igitur *e* A ad B proportionem minorem habet, quàm C habeat ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter B ad A nõ habet maiorem proportionem, quàm D ad C. Similiter oſtendetur, quòd D ad C non habet maiorem proportionem, quàm B ad A; & ideo B ad A neque minorem proportionem habebit, quàm D ad C. Et propterea *f* B ad A erit, vt D ad C. Quod erat oſtendendum.

b Def. 8.
c Def. 4. 5. 6. huius.
d Def. 8. huius.
e prop. 8. huius.
f Def. 12. huius.

Pappi Alex. prop 7. lib. VII.

COROLLARIVM.

Ex hac demonſtratione colligitur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam: inuertendo ſecunda ad primam minorem rationem habebit, quàm quarta ad tertiam. Ex eo enim, quod proportio B ad A poſita fuit maior, quàm D ad C, demonſtrata fuit proportio A ad B minor proportione ipſius C ad D.

PROPOS. X. THEOR. X.

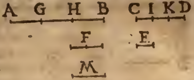
Si quatuor quantitatum eiuſdem generis duę antecedentes duarum conſequentium ęquè multiplices fuerint; & antecedens antecedentis tantùm, vel conſequens conſequentis tantùm multiplex fuerit: erunt viciſſim proportionales.

Sint quatuor quantitates eiuſdem generis, A B quidem ipſius E, & C D ipſius F æquè multiplices. Et primò ſit E ipſius F multiplex. Dico A B ad C D eſſe, vt E ad F. Quoniam A B, & C D ipſarum E, & F ęquè multiplices ſunt, ſectis antecedentibus in ſuas partes, erunt *a* in A B tot partes A G, G H, & H B, ſingulæ ęquales ipſi E, quot ſunt in C D partes C I,

a Def. 5. huius.

I K,

I K, & K D, ſingulæ ęquales ipſi F; ideoque, *b* quæ pars eſt F ipſius E eadem pars erũt C I ipſius G A, & I K ipſius G H, & K D ipſius H B. Ergo *c* quoties F multiplicata ęqualis fit ipſi E, toties C I multiplicata ęqualis fit ipſi A G, & toties I K multiplicata efficitur ęqualis ipſi G H, nec non k D toties multiplicata efficitur ęqualis ipſi H B, & ſic reliqua ſegmenta, ſi plura extiterint, quę totidem ſunt in C D, quot in A B. Ergo quoties F multiplicata ęqualis fit ipſi E, toties ipſę C I, I k, k D, ideſt ipſa C D multiplicata efficitur æqualis ipſis A G, G H, H B, ſeu ipſi A B. Et propterea C D toties menſurat ipſam A B, quoties F metitur ipſam E. & ideo *d* A B ipſius C D tam multiplex eſt, quàm E ipſius F. Vt erat probandum.



b prop. 3. huius.
c Def. 4. huius.
d Def. huius.

Secundò iiſdem poſitis ſit A B multiplex ipſius CD. Dico eſſe E ad F, vt A B ad C D. Fiat M ipſius F tam multiplex, quàm A B ipſius C D, eſtque pars C D multiplex ipſius F. Ergo *e* A B ad M eſt, vt C D ad F, erat autem, vt C D ad F, ita A B ad E. Ergo *f* eadem A B ad duas M, & E eandem rationem habet; ideoque *g* E, & M inter ſe ęquales ſunt. Vnde *h* A B ipſius C D, & E ipſius F ęquè multiplices erunt. Quare &c.

e ex prima parte.
f prop 7. huius.
g prop 4. huius.
h prop. 3. huius.

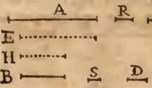
PROPOS. XI. THEOR. XI.

Eucl. 15. V.

Eiuſdem generis partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione.

Sint A ipſius B, & C alterius D ęquè multiplices, & eiuſdem generis. Dico A ad C eſſe, vt B ad D. Si enim hoc verum non eſt, habeat primò, ſi fieri poteſt, A ad C maiorem proportionem, quàm B ad D. Ergo *a* proportio A ad C maior erit, proportio verò B ad D non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam intelligatur habere E ad C, atque H ad D; & ipſarum communes menſurę eędem ſint R, & S). Quare A maior erit quàm E, at B non erit maior, quàm H. Et quoniam ſunt C, D ęquales, vel ęquè multiplices ipſarum R, & S cum hę ęquè metiantur illas, & eſt C ipſius D multiplex. Ergo *b* R ipſius

a Def. 10. huius.
b prop. 10. huius.



ipſius S, & C ipſius D ęquè multiplices ſunt. Rurſus quia E, & H ęquales, vel ęquè multiplices ſunt ipſarum R & S & R eſt multiplex ipſius S. Ergo *c* E ipſius H tam multiplex eſt, quàm R ipſius S, ſeu *d* quàm C ipſius D: eſt verò A ipſius B tam multiplex, quàm C ipſius D: Ergo *e* E ipſius H tam multiplex eſt, quàm A eſt multiplex ipſius B; ideoque *f* ſicuti E minor eſt, quàm A, ita H minor eſt, quàm B; ſed conceſſa fuit H non minor, quàm B, quod eſt abſurdum, Non ergo A ad C maiorem proportionem habet, quã B ad D. Eadem ratione oſtendetur A ad C non habere minorem proportionem, quàm B ad D. Quare *g* A ad C erit, vt B ad D. Quod erat probandum.

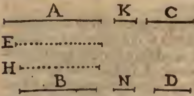
c prop. 10. huius. *d prop. 7. huius.* *e prop 7. huius.* *f prop 1. huius.* *g Def. 12. huius.*

Eucl. 16. V.

PROPOS. XII. THEOR. XII.

Si quatuor quantitates eiuſdem generis proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. Vocetur autem talis argumentandi forma Permutatio rationis.

Sit A ad B, vt C ad D; ſintque omnes eiuſdem generis. Dico eſſe A ad C, vt B ad D. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad C maiorem, aut minorem proportionem, quàm B ad D. Et primò ſit proportio maior, ſi fieri poteſt. Ergo *a* proportio A ad C maior erit, proportio verò B ad D nõ erit maior, eadem proportione commenſurabili (quam intelligatur habere E ad D, atque H ad D, & ipſarum communes menſurę eædem ſint k, & N): quare A maior erit, quàm E, ſed B non erit maior, quàm H; cùmque ſit E ad D, vt H ad D. *b* Igitur maior erit proportio A ad B, quàm K ad H; ſed *c* k ad N eſt, vt E ad H (cùm ille ſint harum eædem menſurę) Ergo *d* A ad B maiorem proportionem habet, quàm k ad N; eſt verò *e* C ad D, vt k ad N (cùm hæ ſint illarum eædem menſurę). Igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter A ad C non habebit



a Def. 10. huius. *b prop. 8. huius* *c prop. 11. huius.* *d prop. 6. huius.* *e prop. 11. huius.* *f prop. 6. huius.*

bebit maiorem proportionem, quàm B ad D.

Similiter oſtendetur, quòd B ad D non habet maiorē proportionem, quàm A ad C; & ideò A ad C, neq; minorem proportionem habebit, quā B ad D. Quare *g* A ad C eandem rationem habebit, quàm B habet ad D. Vt propoſitum fuerat. Vocetur hęc argumentandi forma permutatio rationis. *g Def. 11. huius.*

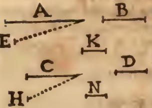
COROLLARIVM. *Pappi. 5. VII.*

Deducitur ex hac demonſtratione, quod ſi prima quantitas ad ſecundam habuerit maiorem rationem, quàm tertia habet ad quartam; permutando prima ad tertiam maiorem rationem habebit, quàm ſecunda ad quartam. Nam ex poſitione, quòd A ad C habet maiorem proportionem, quàm B ad D, conſequitur, permutando, habere A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D.

PROPOS. XIII. THEOR. XIII. *Eucl. 17.*

Si coniunctę quantitates proportionales fuerint, hę quoque diuiſę proportionales erunt. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma Diuiſio terminorum rationis.

Sint A & B, ſimul ſumptę, ad B, vt C & D, ſimul ſumptę, ad D. Dico A ad B eſſe, vt C ad D. Si enim hoc verum non eſt habebit A ad B maiorem, aut minorem proportionem, quàm C habet ad D. Et ſit primò proportio maior. *a* Ergo proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D non erit maior, eadem proportione commenſurabili (quam habeat E ad B, atque H ad D; & ipſarum communes menſurę eędem ſint K & N). Quare A maior erit, quàm E, ſed C non erit maior, quàm H. Et quia E, & H ęquè menſurantur ab ipſis K, & N. Ergo *b* tot partes erunt in E, ſingulę ęquales K, quot ſunt in H, ſingulę ęquales N. Rurſus quia K, N ęquè metiuntur ipſas B, & D, tot *c* partes erunt in B, ſingulę ęquales K, quot ſunt in D ſingulę ęquales N. Quapropter, ſi ęqualibus multitudinibus partium contentarum in E, & H addantur ęquales multitudines partium ipſarum B, & D: erunt in E B, ſimul ſumptis, tot partes ęquales ipſi K, quot ſunt partes in aggregato H, D contentæ, menſuratæque ab N; & ideò *d* E B erit eędem partes ipſius B, quam eſt H, D partes alte- *a Def. 10. huius.* *b Def. 4. huius.* *c Def. 4. huius.* *d Def. 6. huius.*



alterius D. Cùmque A maior cõceſſa ſit, quàm E, addita B communi: erit A B maior, quàm E B. Et quia C non maior cõceſſa eſt, quàm H, addita D communi: erit C D non maior, quàm H D. Quare *e* E B ad B eſt, vt H D ad D, atque A B maior eſt, quàm E B, & C D non eſt maior, quàm H D. Ergo *f* A B ad B maiorem proportionem habebit, quàm C D ad D, quod eſt abſurdum. Erat enim ex hypotheſi A B ad B, vt C D ad D. Non ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D. Similiter oſtendetur, quòd C ad D non habet maiorem proportionem, quàm A ad B; & ideò A ad B neque minorem proportionem habebit, quàm C ad D. *g* Quapropter A ad B erit in eadem proportione, quam C habet ad D. Quod erat oſtendendum.

e Def. 8. huius. — *f prop. 8. huius.* — *g Def. 11. huius.*

Pappi 3. VII.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quam tertia ad quartam, coniungendo habebunt prima & ſecunda, ſimul ſumptæ, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia, & quarta, ſimul ſumptæ, ad quartam. Ex eo enim, quod proportio A ad B poſita fuit maior, quàm C ad D, demonſtratum eſt A, & B habere maiorem proportionem ad B, quàm C, & D habent ad D.

Eucl. 18.

PROPOS. XIV. THEOR. XIV.

Si diuiſę quantitates proportionales fuerint, hę quoque coniunctæ proportionales erunt. Vocetur hęc argumentatio Coniunctio terminorum rationis.

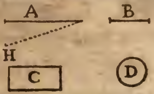
Sit A ad B, vt C ad D. Dico eſſe A, B, ſimul ſumptas, ad B in eadem ratione, ac ſunt C, D, ſimul ſumptæ, ad D. Si hoc verum non eſt, aliqua alia quantitas H, B maior, vèl minor, quàm A, B habebit ad ipſam B eandem rationem, quam C, D ad D. Ergo *a* diuidendo H ad B erit, vt C ad D; ſed A maior, aut minor eſt, quàm H (eo quod H, B inęqualis erat ipſi

a prop. 13. huius.

ipſi A B, & tollitur B communis) Ergo *b* A ad B maiorem, aut minorem, proportionem habet, quàm H ad eandem B; erat autem C ad D, vt H ad B. Igitur *c* A ad B maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm C habet ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo aliqua quãtitas maior, vel minor, quàm A B eandem rationem habere poteſt ad B, quàm C D habet ad D; & ideò A, B ad B erit, vt C D ad D. quod erat probandum. Vocetur hæc argumentandi forma coniunctio terminorum rationis.

b prop. 2. huius.

c prop. 6. huius.



COROLLARIVM.

Campani 29. V.

Colligitur pariter, quòd, ſi quantitas prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad quartam, diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Conceſſum enim fuit, quod A, B ad B habeat maiorem proportionem, quàm C, D ad D; & demonſtratum *d* eſt A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D.

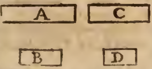
d prop. 14. huius

PROPOS. XV. THEOR. XV.

Eucl. 19 & 12. V.

Si quantitatum aggregata fuerint, vt ablatę portiones: erunt reſidua, vt aggregata. Et ſi portiones proportionales fuerint: aggregata eandẽ rationem habebũt, quam portiones.

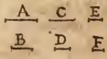
Sit primò aggregatum A, C ad aggregatum B, D, vt ablata portio C ad ablatam D. Dico reſiduum A ad reſiduum B eſſe vt A, C ad B D. Quoniam A C ad B, D eſt, vt C ad D. Ergo *a* permutando A, C ad C eſt, vt B, D ad D: Et diuidendo *b* A ad C erit vt B ad D: Et inuertendo *c* C ad A erit, vt D ad B; Et coniungendo *d* C A ad A erit vt D B ad B. Et iterum permutando *e* C, A ad D, B erit, vt A ad B. Quod erat primum.



Secundò ſit A ad B, vt C ad D. Dico A, C ad B, D eſſe vt A ad B, vel vt C ad D. Quia A ad B eſt, vt C ad D, erit permutando *f* A ad C, vt B ad D: Et coniungendo *g* A C ad C vt B D ad D. Et iterum permutando *h* A C ad B D erit, vt C ad D, ſeu

a prop. 12. huius. b prop. 13. huius. c prop. 9. huius. d prop 14. huius. e prop. 12. huius. f prop 12. huius. g prop. 14. huius. h prop. 12. huius

ſeu vt A ad B. Et ſi rurſus ſit E ad F, vt C ad D. Quia A C ad B D eſt, vt eadem C ad eandem D. Ergo rurſus erunt quatuor quantitates proportionales A C ad B D, vt E ad F; & ideo, vt prius A, C, E erunt ad B, D, F, vt E ad F, ſeu vt A ad B. Quod propoſitum fuerat.



COROLLARIVM I.

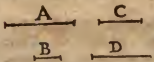
Colligitur ex prima parte huius demonſtrationis, quòd, ſi aggregata ad ablata eandem proportionem habuerint, erunt aggregata ad reſidua in eadem ratione.

Nam conceſſum fuit A C ad C eſſe, vt B D ad D: Et deinde oſtenſum eſt A C ad A eſſe, vt B D ad B. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma Conuerſio rationis.

SCHOLIVM.

Facili negotio oſtendetur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam: habebit prima cum tertia, ad ſecundam cum quarta, maiorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam; ſed minorem, quàm prima hâbet ad ſecundam.

Quoniam A ad B, ſi habuerit maiorem proportionem, quàm C ad D,
i Coroll. prop 12. huius. *permutando i A ad C maiorem proportionem habebit, quàm B ad D: Et*
k Coroll. prop. 19. huius *coniungendo k A C ad C maiorem proportionem habebit, quàm B D ad*
l Coroll. prop. 12. huius. *D: & iterum permutando l A, C ad B, D maiorem proportionem habebit, quàm C ad D.*



Rurſus quia prius habebat A ad C maiorem proportionem, quàm B ad D. Et inuertendo m C ad A minorem proportionem habebit, quàm D ad B: Et coniungendo n C, A ad A minorem proportionem habebit, quàm
m Coroll. 9. prop huius. *D B ad B: Et permutando o C A ad D B minorem proportionem habebit,*
n Coroll. prop. 13. huius. o Coroll. prop 12. huius. *quàm A ad B. Vt propoſitum fuerat.*

COROLLARIVM II.

Colligitur, quòd, ſi totum ad totum maiorem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, erit totius ad totum
p Sch prop. 15. huius. minor proportio, quàm reliqui ad reliquum.

Habebat enim p A, C ad B, D maiorem proportionem, quàm

quàm C ad D; & demonſtratum eſt A, C ad B, D habere minorem proportionem, quàm A ad B.

COROLLARIVM III.

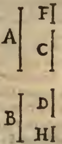
Deducitur pariter, quòd ſi totum ad ablatum maiorem rationem habuerit, quàm totum ad alterum ablatum: habebit, per conuerſionem rationis, totum ad eius reſiduum, minorem proportionem, quàm aliud totum ad ſuum reſiduum.

Fuit enim *q* A, C ad C in maiori proportione, quàm B D ad D; & demonſtratum eſt A, C ad A minorem proportionem habere, quàm B D ad B. *q Schol. prop. 15. huius.*

PROPOS. XVI. THEOR. XVI. *Eucl. 25. V.*

Si quatuor quantitates eiuſdem generis proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sint quatuor quantitates eiuſdem generis A ad B in eadem proportione, ac C ad D; ſitque A omnium maxima, & D minima. Dico A & D, ſimul ſumptas, maiores eſſe, quàm B & C ſimul. Ponatur F ęqualis exceſſui maximę A ſupra G, & H ęqualis exceſſui ipſius B ſupra minimã D. Patet C & F ſimul ęquales eſſe A, atque D & H ſimul, ęquales eſſe B. Et quoniam, vt A ad B, ſeu, vt totum F C ad totum H D, ita eſt C ad D ablatum ad ablatum. Ergo *a* reſiduum F ad reſiduum H erit, vt totum ad totum, ſcilicet, vt A ad B; ſed quia A, vt maxima maior eſt, quàm B: erit quoque F maior, quàm H. (Nam ſi non maior eſſet, haberet *b* A ad B maiorem proportionem, quàm F ad H, quod eſt falſum: Oſtenſę enim fuerunt A, B, F, H, proportionales), ſi igitur inęqualibus F, & H addantur communiter ambę C, D ſimul, erit *c* ſumma quantitatum F, C, & D maior, quàm ſumma quantitatum H, D, & C: Sunt verò F, C, & D ęquales A, & D (cùm F C oſtenſa ſit ęqualis A, & D ſit communis); atque eadem ratione H, D, & C ęquales ſunt B & C. Quare maxima A cum minima D maiores ſunt, quàm B, C ſimul. Quod erat, &c.



a prop. 15. huius.

b Ax. 6. huius.

c Ax. 4. l. 1.

Eucl.14.V.

COROLLARIVM I.

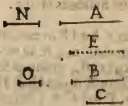
Manifeſtum eſt, quòd, ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, erunt directè, & viciſſim vnà maiores, aut vnà æquales, aut vnà minores.

d prop. 16. huius.

Fuit enim A ad B, vt F ad H, & oſtenſum eſt, d quando A maior eſt, quàm B, non eſſe F ęqualem, aut minorem ipſa H, & contra. Igitur antecedentes A, & F erunt vnà maiores, aut vnà ęquales, aut vnà minores conſequentibus B, & H. Rurſus quia e viciſſim A ad F eſt, vt B ad H. Igitur A, & B ſunt vnà maiores, aut vnà ęquales, aut ſimul minores ipſis F, & H.

e prop. 12. huius.

COROLLARIVM II.



Patet, ſi tres quantitates proportionales fuerint, eſſe duas extremas, ſimul ſumptas, maiores, quàm duplum mediæ.

Sit enim maxima A ad B, vt B ad C, & fiat E ęqualis B: erit A ad E, vt B ad C, ideoque f maxima A & minima C maiores erunt, quàm E, & B ſimul, ideſt maiores, quàm duplum mediæ B.

f prop. 16. huius.

SCHOLIVM.

Si fuerint tres quantitates proportionales; exceſſus, quo maxima ſuperat mediam, maior erit exceſſu mediæ ſupra minimam.

Sit maxima A ad B, vt B ad minimam C, Sitq; N exceſſus A ſupra B, atque O ſit exceſſus B ſupra C. Dico N maiorem eſſe, quàm O. Nam, vt g totum A ad totum B, ita eſt B, ablatum ex A, ad C, ablatum ex B. Ergo N, reſiduum ipſius A, ad O, reſiduum alterius B, erit, vt totum A ad totum B, ſiue, vt maxima A ad mediam B. Et ideò h N maior erit, quàm O.

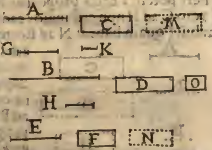
g prop. 15. huius. h Coroll. 1. prop. 16. huius.

PROPOS. XVII. THEOR. XVII.

Si duabus ſimilibus proportionibus commenſurabilibus duę alię ſimiles proportiones commenſurabiles continuentur, termi-

termini priores ad poſteriores erunt in eadem commenſurabili proportione.

Sit A ad B in eadem commenſurabili ratione, quam habet C ad D; atque B ad E ſit in eadem commenſurabili proportione, quam D habet ad F. Dico A ad E in eadem ratione commenſurabili eſſe, in qua C ad F. Sit G communis menſura ipſarum A, B; atque H ſit communis menſura duarum B, E; & intelligatur [a] K toties metiri ipſam G, quoties H ipſam B metitur. Ergo [b] permutando K toties metietur ipſam H, quoties G ipſam B menſurat; cùmque H menſuret ipſas B, & E: Igitur [c] K metitur ipſas B, & E. Rurſus quia K metitur ipſam G, ſed G menſurat ipſas A, B. Ergo [d] eadem K metitur, nedùm ipſam E, ſed etiã ipſas A, & B. Poſtea intelligatur [e] O, quę toties menſuret ipſam D, quoties K metitur B, atque M ſit ad O, vt A ad K, pariterque N ſit ad O, vt E ad K. Et quoniam A, & M æquè multiplices ſunt ipſarum K & O, pariterque E, & N ęquè multiplices ſunt earundem K, & O. Ergo [f] A ipſius E eędem partes eſt, ac M alterius N; ſuntque B, & D ęquè multiplices earundem K, & O: Igitur [g] A, & M eędem partes ſunt ipſarum B, & D; ſed C ad D erat, vt A ad B: Ergo [h] C, & M eędem partes ſunt eiuſdem D; ideoque [i] C ęqualis eſt M. Eodem modo oſtendetur F ęqualis ipſi N. Quare [k] C ad F erit, vt M ad N; & oſtenſa fuit A ad E, vt M ad N. Igitur [l] A ad E erit, vt C ad F. Quod erat probandum.



a Ax. 3. huius. b prop. 10. huius. c Ax. 1. huius. d Ax. 1. huius. e Ax. 3. huius. f Def. 6. huius. g Def. 6. huius. h prop. 7. huius. i prop. 4. huius. k prop. 3. huius. l prop. 7. huius.

COROLLARIVM.

Deducitur ex demonſtratione huius propoſitionis, quòd duę quantitates, quę vni tertię commenſurabiles ſunt, inter ſe quoque ſunt commenſurabiles.

Nam A, & E eidem B commenſurabiles poſitę fuerunt; eo quod G erat communis menſura ipſarum A, & B; nec non H erat communis menſura ipſarum B, & E: & oſtenſum [m] fuit K communi menſura extremas A, & E metiri.

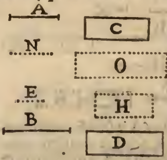
Eucl. 12. X.

m prop. 17. huius.

PROPOS. XVIII. THEOR. XVIII.

Si fuerint quatuor quantitates proportionales, habebunt antecedentes eandem rationem quoq; ad duas quantitates, eandem proportionem commenſurabilem habentes, ad eaſdem conſequentes.

Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D, & habeat E ad B eandem proportionem commenſurabilem, quam H habet ad D. Dico A ad E eſſe, vt C ad H. Si enim hoc verum non eſt habebit A ad E maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et ſit primò proportio maior, ſi *a Def. 10. huius.* fieri poteſt. *a* Ergo proportio A ad E maior erit, proportio verò C ad H non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam habeāt N ad E, atque O ad H); & ideo A maior erit, quàm N, ſed C non erit maior, quàm O. Et quoniam N ad E, atque O ad H ſunt in eadem ratione commenſurabili; pariterque E ad B, atque H ad D ſunt in eadem proportione commenſurabili. Ergo *b prop. 17. huius.* *b* N ad B eſt in eadem proportione commenſurabili, quam O habet ad D; eſtque A maior, quàm N, & C non maior, quàm O. Igi- *c prop. 8. huius.* tur *c* A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D, quod eſt impoſſibile: Suppoſitę enim fuerunt A, B, C, D proportionales. Non ergo A ad E habebit maiorem proportionem, quàm C ad H. Similiter oſtendetur, quòd C ad H non habet maiorem proportionem, quàm A ad E; & ideò A ad E *d Def 12. huius.* neque minorem proportionem habebit, quàm C ad H *d* Quare A ad E eſt, vt C ad H. Quod erat probandum.



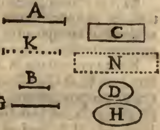
Eucl. 22. V.

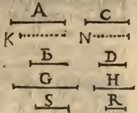
PROPOS. XIX. THEOR. XIX.

Si proportionibus ſimilibus pares multitudines proportionum ſimilium addantur ordinatè, erunt termini priores ad poſteriores in eadem ratione. Vocetur talis argumentandi forma, compoſitio ordinata proportionum.

Sit

Sit proportio A ad B ſimilis, vel eadem proportioni quantitatis C ad D, & ijs addantur aliæ proportiones ſimiles, vt ſit B ad G, vt D ad H. Oſtendendum eſt proportionem A ad G, eandem eſſe, quæ ipſius C ad H. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad G maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et ſi fieri poteſt, ſit primò proportio maior. Ergo [a] proportio A ad G maior erit, proportio verò C ad H non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam habeant K ad G, & N ad H); & ideo A maior erit quàm K, at C non erit maior, quàm N. Quoniam B ad G eſt, vt D ad H; atque K ad G eandem proportionem commenſurabilem habet, quam N ad H. Ergo [b] vt B ad K, ita eſt D ad N; & inuertendo [c] K ad B erit, vt N ad D: eſtque A maior, quàm K, at C non maior, quàm N. Ergo [d] A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo A ad G maiorem proportionem habet, quàm C ad H. Similiter oſtendetur, quòd C ad H non habet maiorem proportionem, quàm A ad G; & ideo A ad G neque minorem proportionem habebit, quàm C ad H. & propterea [e] A ad G erit, vt C ad H. Et ſi rurſus plures aliæ proportiones ſimiles G ad S, & H ad R ſucceſſiuè addantur, ſemper eodem modo conſiderando tres quantitates A, G, S, & tres alias C, H, R; vt prius oſtendentur compoſitæ proportiones A ad S, & C ad R, ſimiles eſſe. vt fuit propoſitum. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma compoſitio ordinata proportionum. Et ſiquidem componentes proportiones continuatæ A ad B, B ad G, & G ad S fuerint ſimiles inter ſe: Vocetur proportio A ad G Duplicata proportionis A ad B, vel B ad G; atque proportio A ad S vocetur Triplicata vnius rationis A ad B, & Seſquialtera rationis A ad G. & ſic ſucceſſiuè. Si verò proportiones continuatæ A ad B, & B ad G, & G ad S non fuerint eædem inter ſe: vocabitur abſolutè proportio ipſius A ad S Compoſita ex intermedijs proportionibus A ad B, B ad G, & G ad S.





[a] Def. 10. huius.
[b] prop. 18. huius.
[c] prop. 9. huius.
[d] prop. 8. huius.
[e] Def. 12. huius.

Eucl.4. V.

COROLLARIVM I.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint quęlibet ęquè multiplices antecedentium ad quaslibet ęquè multiplices conſequentium proportionales erunt.

Nam, ſi B ad G eſt, vt D ad H, & ijs alię proportiones ſimiles addantur, vt ſit A tam multiplex ipſius B, quàm C alterius D, atque G eadem pars ſit ipſius S atque H alterius R. Ergo *f* erit A ad S, vt C ad R.

f prop. 19. huius.

COROLLARIVM II.

Ex hac demonſtratione colligitur, quòd, ſi pares multitudines proportionum continuentur ordinatè: erit quæ ex maioribus componitur maior, quàm illa, quæ ex minoribus proportionibus compoſita eſt.

Nam *g* proportio A ad B compoſita erit ex proportionibus A ad G, & G ad B; atque proportio C ad D compoſita erit ex proportionibus C ad H, & H ad D; & conceſſa fuit proportio A ad G maior proportione C ad H; & eſt inuertendo *h* G ad B, vt H ad D, fuitque oſtenſa proportio A ad B maior, quàm C ad D.

g prop 19. huius.

h prop. 9 huius.

COROLLARIVM III.

Deducitur etiam, quòd duplicatæ proportiones ſimilium proportionum eędem quoq; vel ſimiles ſunt; & ſubduplicatę, ſeu medietates ſimilium proportionum ſunt quoque ſimiles inter ſe; & idem dicendum eſt de quibuſcunque alijs paribus multitudinibus continuè proportionalium.

Nam exiſtentibus tam A, B, G continuè proportionalibus, quàm C, D, H, ſi ſupponatur A ad B eſſe, vt C ad D, cùm rationes B ad G, atque D ad H ſint eędem proportionibus ſimilibus A ad B, & C ad D, erunt ex hac propoſitione duplicatæ proportiones A ad G, & C ad H eędem quoque inter ſe. E contra, ſi ſupponatur A ad G eſſe, vt C ad H neceſſariò earum medietates, ſeu ſubduplicatæ proportiones A ad B, & C ad D ſimiles erunt; aliàs duę proportiones ſimiles A ad B, & B ad G vnà maiores, aut vnà minores duabus proportionibus ſimilibus C ad D, & D ad H non componerent duplica-

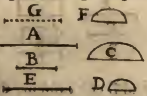
plicatam proportionem A ad G ſimilem proportioni duplicatæ C ad H, vt in 2. Corol. huius propoſitionis oſtenſum eſt.

PROPOS. XX. THEOR. XX.

Eucl. 23. V

Si proportionibus ſimilibus aliç proportiones ſimiles perturbatè addantur: erunt proportiones, ex paribus multitudinibus proportionum compoſitç, ſimiles quoque inter ſe. Vocetur autem hçc argumentandi forma Compoſitio perturbata proportionum.

Sit quantitas A ad B, vt C ad D, & his proportionibus ſimilibus addantur duç aliç proportiones ſimiles, ſed ordine perturbato ita vt ſit B ad E, ſicut F ad C. Dico proportionem A ad E, compoſitam ex proportionibus A ad B & B ad E eandẽ eſſe, quç ipſius F ad D; quç nimirum compoſita eſt ex ijſdem proportionibus C ad D, & F ad C. Et quoniam quam proportionem habet B ad E, habebit aliqua *a* alia quantitas ad ipſam A licet illa ſit ignota, tamen quia dari poteſt, ſupponatur eſſe G, ſeu vocetur G. Et quoniam G ad A eſt, vt B ad E; ſed F ad C eſt, vt eadem B ad eandem E. Ergo *b* G ad A eſt, vt F ad C, & A ad B eſt, vt C ad D. Ergo *c* ex compoſitione ordinata erit G ad B, vt F ad D. Poſtea quia, vt G ad A, ita eſt B ad E. Ergo *d* permutando, vt G ad B, ita eſt A ad E: ſed vt G ad B, ſic fuit oſtenſa F ad D. Igitur, *e* vt A ad E, ita erit F ad D.



a Axio. 3. huius.
b prop. 7. huius.
c prop. 19. huius.
d prop. 12. huius
e prop. 7. huius.

Si rurſus plures aliç proportiones ſimiles E ad H, & K ad F ſucceſſiuè addantur, ſemper eodem modo conſiderando tres quantitates A E, & H, & tres aliç K, F, & D, vt prius oſtendentur compoſitç proportiones A ad H, & K ad D ſimiles eſſe inter ſe. Quod erat, &c.

A	6	K	24
B	3	F	12
E	4	C	16
H	2	D	8

COROLLARIVM.

Similiter proportio compoſita ex maioribus proportionibus

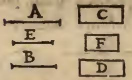
nibus perturbato ordine, erit maior, quàm illa, quę ex totidem proportionibus minoribus componitur.

Nam compoſitę proportiones, ſiue ordinatè, vel perturbatè diſponantur, eędem ſunt inter ſe; & propterea, f ſi ordinata maior eſt aliqua alia, etiam perturbata proportio maior erit eadem proportione.

f Coroll. 2. prop 19. huius.

PROPOS. XXI. THEOR. XXI.

Si à proportionibus ſimilibus auferantur proportiones ſimiles, ſiue ordinatè, ſiue perturbatè: reſiduę proportiones, ſimiles quoque erunt.



Sit proportio cuiuslibet quantitatis A ad B, vt C ad D; atque ab his proportionibus ſimilibus, ſiue eiſdem tollantur eędem proportiones, primò ordinatè, ita vt ſit A ad E, vt C ad F. Dico reſiduas proportiones E ad B & F ad D eſſe eaſdem. Quia a inuertendo, vt E ad A, ita eſt F ad C, & vt A ad B, ita eſt C ad D. Ergo componendo b ordinatè, vt E ad B, ita erit F ad D.

a prop. 9. huius. b prop. 19. huius.

Tollantur ſecundò perturbatè proportiones eędem, ita vt ſit A ad E, vt F ad D. Dico reſiduas proportiones E ad B, & C ad F eſſe eaſdem. Quoniam inuertendo c eſt, vt B ad A, ita D ad C, & vt A ad E, ita eſt F ad D; Ergo ex d compoſitione perturbata, vt B ad E, ita eſt F ad C; & inuertendo e vt E ad B, ita eſt C ad F. Quod erat oſtendendum.

A	8	C	4
E	4	F	6
B	6	D	3

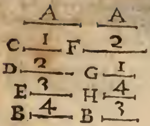
c prop. 19. huius d prop. 10. huius. e prop. 9. huius.

COROLLARIVM I.

Ex tribus precedentibus propoſitionibus elicitur, ſi aliqua proportio compoſita fuerit ex aliquibus proportionibus, eam quoque componi ex iiſdem proportionibus, quocunque ordine poſitis.

Si enim

Si enim proportio A ad B, interpoſitis terminis C, D, & E, ſit compoſita ex proportionibus 1, 2, 3, 4, eadem erit compoſita ex eiſdem proportionibus, ſed ordine perturbato 2, 1, 4, 3, interpoſitis alijs terminis F, G, & H. Nam, *f* vt A ad D ita eſt A ad G; & rurſus, *g* vt D ad B, ita eſt G ad B. Ergo *h* A ad B eſt, vt A ad B alterius ordinis.

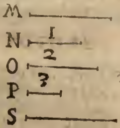


f prop. 20. huius.
g prop. 20. huius.
h prop. 19. huius.

COROLLARIVM II.

Patet etiam quamlibet proportionem propoſitam ex quotlibet proportionibus, excepta poſtrema, componi.

Nam quęlibet proportio A ad B, interpoſitis quibuslibet terminis C, D, E, erit compoſita ex proportionibus A ad C, C ad D, D ad E, & E ad B. Et proportio M ad S componi quidem poteſt ex totidem proportionibus ex quot componitur A ad B; ſed non omnes poſſunt eſſe eędem. Nam licet tres priores proportiones 1, 2, & 3 continuentur in quatuor terminis M, N, O, & P: tamen poſtrema proportio P ad S non erit neceſſariò eadem, quam habet E ad B, ideſt non erit 4.

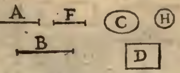


PROPOS. XXII. THEOR. XXII.

Eucl. 14. V.

Si duę quantitates ad duas conſequentes habuerint eandẽ rationem, atq; duę alię ad eaſdem conſequentes habeant etiã eandem rationem: habebunt antecedentes, ſimul ſumptę, eandem rationem ad eaſdem conſequentes.

Sit A ad B, vt C ad D, atq; F ad eandem B ſit, vt H ad eandem D. Dico duas antecedentes A & F ſimul, habere ad B eandem rationem, quam duę C & H ſimul ad D. Quoniam vt F ad B, ita eſt H ad D. *a* Ergo



a prop. 9. huius,

inuertendo, vt B ad F, ita eſt D ad H; ſed A ad B eſt, vt C ad
b prop. 19. huius. D : Ergo b componendo ordinatè erit, vt A ad F, ita C ad H;
& coniungendo c erunt A & F ad F, vt C & H ad H : ſed F ad
c prop. 14. huius. B erat, vt H ad D. Ergo d rurſus, ex compoſitione ordinata,
erunt A F ſimul, ad B, vt H C, ſimul ſumptę, ad D. Quod
d prop. 19. huius. erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

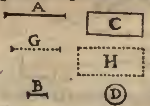
Hinc patet, quod, ſi eędem duę antecedentes ad quatuor conſequētes habeant eandem rationē: antecedentes ad conſequentes non eiuſdem proportionalitatis, ſimul ſumptę, proportionem eandem habebunt.

e prop. 9. huius. Nam ex eo, quod A ad B eſt, vt C ad D, nec non F ad B, vt H ad D: ſequitur inuertendo, e quod B ad A eſt, vt D ad C; f prop 9. huius. atque B ad F eſt, vt D ad H. Et ſimiliter ex eo, quod ſumma A, F ad B eſt, vt ſumma C, H ad B. ſequitur f inuertendo, quòd B ad ſummam A, F eſt, vt D ad ſummam C H.

PROPOS. XXIII. THEOR. XXIII.

Si fuerint quatuor quantitates, & quelibet alię proportionales, commenſurabiliter conſequentibus, fuerint vnà maiores, aut ſimul ęquales, aut vnà minores antecedentibus ordinatè: erunt quatuor illę quantitates proportionales.

Sint quatuor quantitates, prima A, ſecunda B, tertia C, & quarta D; & inſuper quinta G ad B eandem rationem commenſurabilem habeat, quàm ſexta H ad D, ſintque dictę commenſurabiles proportiones, quęlibet ex infinitis, quę proponi poſſunt; & quotieſcumque G eſt ęqualis primę A, ſit pariter H ęqualis tertię C, & quoties G minor eſt, quàm A, ſit pariter H minor, quàm C, & quotieſcunque G maior eſt, quàm A reperiatur ſemper H maior, quàm C, & hoc ſemper



verificetur in infinitis proportionalitatibus commenſurabilibus. Dico primam A ad ſecundam B eandem proportionem habere, quam tertia C ad quartam D. Si hoc verum non eſt, habebit A ad B maiorem, aut minorem rationem quàm C ad D.

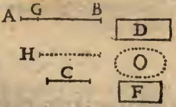
Et ſit primò proportio maior, ſi fieri poteſt. Ergo *a* proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D nõ erit maior eadẽ proportione commenſurabili (quã intelligatur habere G ad B, atque H ad D) eritq; A maior, quàm G, at C non erit maior, quã H. Quare duę quantitates G, & H eandem rationem cõmenſurabilẽ habentes, ad duas conſequẽtes B, & D non erunt vnà minores antecedẽtibus, quod eſt contra hypotheſin. Nõ ergo A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D. Simili ratiocinio oſtendetur C ad D non habere maiorem rationem, quàm A ad B; Vnde A ad B non habebit minorem proportionem, quàm C ad D; ſed neque maiorem rationem habebat, vt oſtenſum eſt. Ergo *b* quatuor quantitates A, B, C, D, ſunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

a Def. 10. huius.
b Def. 12. huius.

PROPOS. XXIV. THEOR. XXIV.

Si fuerint quatuor quantitates, & duę alię proportionales conſequentibus ſint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus exceſſu, vel defectu à prima minori quocunque dato, erunt illę proportionales.

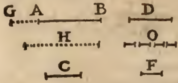
Sint quatuor quantitates A B, C, D, F, & duę alię H, & O quamlibet proportionem eandem habentes ad C, & F, ſint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus A B & D, ita vt exceſſus vel defectus ipſius H à prima A B minor ſit quacunque aſſignabili quantitate ex infinitis, quę proponi poſſunt. Dico A B ad C eſſe in eadem ratione, ac D ad F. Si enim hoc verum non eſt, aliqua *a* alia quantitas maior, vel minor, quàm A B in natura reperiri poterit, quę habeat ad C eandem rationem; quam D habet ad F, & ſit illa, vel vocetur G B, quę primò ſit minor, quàm A B, deficiens ab ipſa quocunque defectu A G. Et quoniam H, & O proportionales ipſis C, & F ſupponuntur eſſe vnà minores antecedentibus A B, & D, ita vt defectus ipſius H à prima A B minor ſit quacunque aſſignabili quantitate, poterit eſſe defectus ipſius H à prima A B minor, quàm A G; & ideo H maior erit, quàm G B, dum O minor ſupponitur, quam D; eſt verò G B ad C in eadem ratione, ac D ad F. Igitur *b* H ad C ma-



a Axio. 3. huius.
b prop 8. huius.

maiorem proportionem habet, quam O ad F, quod eſt falſum; Suppoſita enim fuit H ad C, vt O ad F. Nulla ergo quantitas minor quàm A B eãdem rationem habebit ad C, quam D habet ad F.

Secundò ſit G B maior, quàm A B exceſſu quolibet G A. Et quia H, & O proportionales ipſis C & F, ſupponuntur vnà maiores antecedentibus exceſſu à prima minori quocunque dato G A; propterea erit H minor, quàm G B. Et, vt prius, oſtendetur O ad F maiorem proportionem habere, quàm H ad C, quod eſt abſurdum.



Erant enim ex hypotheſi H, & O proportionales ipſis C, & F. Nulla ergo quantitas maior, quàm A B, ſicuti prius nulla minor, habebit eandem rationem ad C, quam D habet ad F. Igitur ipſamet A B ad C eandem proportionem habebit, quam D habet ad F. Quod erat propoſitum.

COROLLARIVM.

Conſtat, quòd, ſi fuerint quatuor quantitates, & quælibet aliæ ad conſequentes, eandem proportionem habentes, ſint vna maiores, aut vnà minores, aut vnà ęquales antecedentibus, erunt illæ proportionales.

Nam inter quaslibet, ideſt inter infinitas proportionales conſequentibus, quę ſupponuntur eſſe vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus, neceſſariò debent illæ comprehendi, quę differunt à prima exceſſu, aut defectu minore quocunque dato; & propterea c illę quatuor quantitates proportionales erunt.

c prop. 24. huius.

SCHOLIVM.

Præter hos modos venandi, an quatuor quantitates ſint proportionales nec ne, datur hic alius, qui eſt valdè vſitatus apud Euclidem, & Archimedem.

Si quantitas maior, quàm prima exceſſu minore quouis aſſignabili, habuerit ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam, & quantitas minor, quàm prima, defectu minore quocunque aſſignabili, habuerit ad ſecundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam:

tum: erit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam. Quoniam quantitatis, habentis maiorem, aut minorem proportionem ad ſecundam, quam tertia ad quartam, exceſſus, aut defectus à prima ſupponitur minor quacunque aſſignabili quantitate ex infinitis, quæ proponi poſſunt; ſed quælibet quantitas maior, quàm prima, aliquo exceſſu ipſam ſuperat, qui minor erit aliqua aſſignabili quantitate. Ergo quælibet quantitas maior, quàm prima, habet maiorem proportionem ad ſecundam, quàm tertia habet ad quartam quantitatem; ideoque nulla quantitas maior, quàm prima, habebit ad ſecundam eandem rationem, quam tertia habet ad quartam.

Similiter quælibet quantitas minor, quàm prima, deficit ab ea defectu minore aliqua aſſignabili quantitate; & propterea nulla quantitas minor, quàm prima, habebit ad ſecundam eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam. Cùm ergo d *aliqua quantitas reperiatur in natura, quæ ſit ad ſecundam, vt tertia ad quartam, & illa non poſſit eſſe maior, nec minor, quàm prima, licet eiuſdem generis ſit. Igitur ipſamet prima ad ſecundam habebit eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam.*

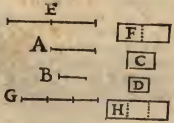
d *Ax. 3. huius.*

PROPOS. XXV. THEOR. XXV.

Eucl. def. 8. lib. V.

Si æquè multiplicium quatuor quantitatum multiplex primę exceſſerit multiplicem ſecundę, at multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ: tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm tertia ad quartam.

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & ſumptis E, & F ęquè multiplicibus antecedentium A, & C, nec non ſumptis G, & H æquè multiplicibus conſequentium B, & D, ſitque E multiplex primę maior, quàm G multiplex ſecundę; at F multiplex tertię non ſit maior, quàm H multiplex quartæ. Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D. Quia E maior eſt, quàm G, & F non eſt maior, quam H: Ergo a E ad G maiorem proportionem habet, quàm F ad H; ſed b A ad E eſt, vt C ad F, cùm ſint illarum pars eadem: Ergo c A ad G maiorem rationem habet, quàm C ad H: Et rurſus d G ad B eſt, vt H ad D, cùm ſint harũ ęquè multiplices.



a *Ax. 6. huius.*
b *Def. 8. huius,*
c *Coroll. 2. prop. 9. huius.*
d *Def. 8. huius.*

Igitur

Igitur *e* A ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D. Quod erat oſtendendum.

e Coroll. 1. prop. 19. huius.

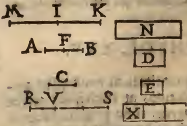
PROPOS. XXVI. THEOR. XXVI.

Eucl. conuerſ. def. 8. V.

Si prima quantitas ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam, reperiri poſſunt ęquè multiplices antecedentium, atque aliç ęquè multiplices conſequentium, quarum multiplex primę excedat multiplicem ſecundę, at multiplex tertię non excedat multiplicem quartę.

Habeat A B ad C maiorem proportionem, quàm D ad E. Dico fieri poſſe, quod proponitur. Quoniam A B ad C maiorem rationem habet, quàm D ad E. Ergo *a* aliqua quantitas minor, quàm prima A B, eandem rationem habebit ad

a prop. 5. huius.



ſecundam C, quam tertia D ad quartam E: vocetur illa A F, & ſumantur quantitatum A F, A F, & D ęquè multiplices M I, M K & N. hac lege, vt K I, earum differentia, maior ſit, quàm C. Poſtea ſumantur ęquè multiplices R S ipſius C, & X alterius E, hac tamen lege, vt R S ſit minima omnium, excedentium ipſam M I, ita vt exceſſus ſit minor, aut ęqualis vni eius parti R V, ſeu C; ideòque exceſſus ipſius R S, ſupra M I erit minor, quàm I K, quę maior facta eſt, quàm C: vnde M K maior erit, quàm R S, & M I minor eadem R S. Oſtendendum modò eſt in hiſce ęquè multiplicibus, quòd dum M K maior eſt ipſa R S, ipſam N, aut ęqualem, aut minorem eſſe ipſa X. Quoniam, vt A F ad C, ita eſt D ad E, & ſumptę ſunt duę M I, & N ęquè multiplices ipſarum antecedentium A F, & D, nec non duę R S & X ęquè multiplices conſequentium C, & E. Ergo *b* vt M I ad R S, ita eſt N ad X. Quarre *c* ſicut M I minor eſt, quàm R S, ita N minor erit, quàm X: fuit autem oſtenſa M K maior, quàm R S. Igitur quando M K maior eſt, quàm R S, non eſt N maior, quàm X. Quod erat propoſitum.

b Coroll. 1. prop 19. huius.
c Coroll. 1. prop 16. huius.

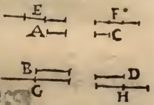
PRO-

PROPOS. XXVII. THEOR. XXVII.

Eucl. def. 6. V.

Si ſuerint quatuor quantitates, & antecedetium ęquè multiplicia ab ęquè multiplicibus conſequentium, qualiſcunque ſit hęc multiplicatio vtrunque ab vtroque, vel vnà deficiunt, vel vnà ęqualia ſunt, vel vnà excedunt, ſi ea ſumantur, quę inter ſe reſpondent: erunt illę quatuor quantitates proportionales,

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & ſint E & F quęcunque ęque multiplices antecedentium A & C ex infinitis ęquè multiplicibus, quę aſſignari poſſunt; nec non ſint G, & H quęcunque ęquè multiplices, ideſt valeant pro infinitis alijs ęquè multiplicibus conſequentium B & D; & quotieſcunque E maior eſt, quàm G ſemper ſit F maior, quàm H, & quotieſcunque E ęqualis eſt ipſi G ſit pariter F ęqualis ipſi H, & in quacunque multiplicatione E minor eſt, quàm G, ſemper ſit F minor quàm H.



Dico A ad B eandem rationem habere, quàm C ad D. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad B, aut maiorem, aut minorem rationem, quàm C ad D: Et in quocunque *a* caſu, ſi multiplex E exceſſerit ipſum G, aliquando F non excedet ipſam H, vel ſi F excedit ipſā H in aliqua multiplicatione, F non excedet ipſam G, quę ſunt falſa, & contra hypotheſin. Non ergo A ad B maiorem, aut minorem proportionem habere poteſt, quàm C ad D. Quare *b* A, B, C, & D erunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

a prop. 26. huius.

b Def. 11. huius.

SCHOLIVM.

In his tribus propoſitionibus demonſtratę ſunt paſſiones illæ pulcherrimæ proportionalium, & non proportionalium, quæ inter definitiones poſitæ fuerunt ab Euclide. Et ſicut hactenus admodum licentioſè inter principia receptę fuerunt hę propoſitiones, ſic modò, vt theoremata tam demonſtrata, poterunt tutè vſurpari in Geometria. Eas data opera in fine huius libri apponere volui, licet in eius principio poſt paucas propoſitiones demonſtrari potuiſſent, tum quia methodus incępta perturbari non debebat, cùm etiam quia hic breuiſſimè, & facillimè abſque

auxilio

auxilio plurium lemmatum demonſtrari potuerunt. Sed interim animaduerſione dignum eſt tres adductos modos inueſtigandi proportionalitatem ferè idem velle: nam proportiones quantitatum incommenſurabilium, cùm minimè exprimi poſſint per determinatas menſuras earundem partium, & ęquè multiplicium; aſſequuntur tamen per ambages exceſſuum, & defectuum earundem partium, & ęquè multiplicium.

Finis Libri tertij.

LIBER QVARTVS.

Eucl. lib. VI.

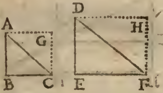
Poſtquam in tertio de proportionibus in genere egimus, modò conſiderantur proportiones linearum, triangulorum, & parallelogrammorum; Sed prius aliquę definitiones declarari debent.

DEFINITIONES.

I.

Reciproca triangula, vel parallelogramma ſunt, cùm duo latera circa angulum vnius fuerint duo extrema, & duo latera circa angulum alterius figurę fuerint duo media quatuor proportionalium.

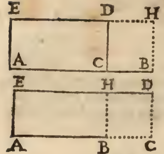
Vt duo triangula A B C, D E F, vel duo parallelogramma B G, E H erunt reciproca, ſi fuerit A B ad E D, vt F E ad C B: Hac enim ratione angulus B parallelogrammi B G, vel trianguli A B C continebitur à prima A B, & quarta C B; & angulus E parallelogrammi E H,



vel trianguli D E F continebitur à ſecunda D E & tertia E F, quatuor proportionalium.

II.

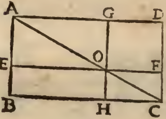
Parallelogrammorum ſecundum aliquam rectam lineam applicatorum illud deficere dicitur, quod non occupat totam lineam: Excedere verò quando occupat maiorem lineam rectam, quàm ſit ea, ſecundum quam applicatur: Exceſſus verò, vel defectus dicitur pars, vel productio eiuſdem applicati parallelogrammi, quod ſuper defectum, aut exceſſum lineę ſuppoſitę deſcriptum eſt.



Vt parallelogrammum A D applicatum ſuper rectam A B, dicitur deficiens, quando eius latus A C non occupat totam lineam A B. Et dicitur excedens, quando A C maius eſt, quàm A B. Diciturque defectus in primo caſu, vel exceſſus in ſecundo, ipſum parallelogrammum C H.

III.

Si ab eodem puncto diametri parallelogrammi ductæ fuerint duæ rectę parallelæ lateribus ipſius: parallelogramma, quæ à diametro biſſecantur, vocentur circa diametrum conſtituta,& duo illa parallelogramma, quę à diametro non biſſecantur; vocentur parallelogramma complementi.



Vt ſi in parallelogrammo B D per punctum O, in eius diametro A C aſſumptum, ducantur duæ rectæ, H O G quidem parallela lateri D C, ſeu A B; atque F O E parallela lateri C B, vel D A: vocentur parallelogramma B D, H F, atque E G circa diametrum conſtituta; atque duo parallelogramma D O, & B O, quę à diametro non biſſecantur: appellentur parallelogramma complementi.

Eucl. 1.VI.

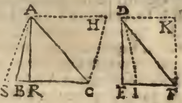
PROPOS. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma ęquè alta ſunt inter ſe, vt baſes. Et, ſi fuerint inter ſe vt baſes, ęquales altitudines habebunt.

Sint primò duo triangula A B C, D E F ęquè alta, ideſt perpendiculares A R, D E à ſummitatibus A, D ad baſes ductę, ſint ęquales inter ſe. Dico triangulum A B C ad triangulum
a prop. 28. D E F habere eandem rationem, quam baſis B C ad baſim E
lib 1. F. Secetur [a] E F in quancunque multitudinem partium ęqualium,
b Def.3. lium, quarum vna ſit E I, & in C B ſumatur S C, quę ſit quę-
lib. 3. libet multiplex ipſius E I: erit [b] S C ipſius E F quælibet par-
c Coroll. 3. tes, & coniungantur S A, I D. Quoniam [c] quoties baſis E I
prop.32 l.1 metitur baſim E F, toties triangulum E I D metitur ęquè altum

tum triangulum D E F, & quoties d E I metitur C S, toties triangulum D E I, metitur ęquè altũ triãgulum A S C. e Ergo triangulũ A S C quęlibet & eędem partes eſt trianguli D E F, queadmodum S C eſt partes alterius E F. Sunt ergo quatuor magnitudines, prima B C, ſecunda E F, tertia triangulum A B C, quarta triangulũ D E F, & duæ aliæ, ſcilicet baſis S C, & triangulum A S C ſunt quęlibet, & eędem partes conſequentium E F, & trianguli D E F, ideſt f ad eas habent quamlibet, & eandem rationem commenſurabilem; & quoties S C eſt ęqualis primę B C, g neceſſariò triangulum A S C ęquale erit tertię, ſcilicet triangulo A B C; & quoties S C maior eſt, quam B C, toties h A S C maius eſt, quàm A B C, & cùm S C minor eſt, quàm B C, ſemper A S C minus erit, quàm A B C. Ergo i prima B C ad ſecundam E F eandem rationem habet, quam tertia A B C triangulum, ad quartam magnitudinem, triangulum D E F. Quod erat oſtendendum.

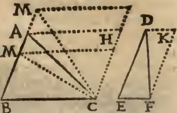
d Coroll. 3. prop. 32. l. 1
e Def. 6. lib. 3.
f Def. 8. l. 3
g prop. 32. lib. 1.
h Coroll. 1. prop 32. l. 1
i prop. 23. lib. 3.



Secundò ſint parallelogramma B H, E K eiuſdem altitudinis. Dico proportionalia eſſe baſibus. Ductis diametris A C, D F; erunt triangula A B C, D E F ęquè alta; & ideo k inter ſe erunt, vt baſes B C, E F; ſed l vt triangulum A B C ad triangulum D E F, ita duplum ad duplum, ideſt m parallelogrammum B H ad parallelogrammum E K. Ergo n parallelogrammum B H ad parallelogrammum E K, erit vt baſis B C ad baſim E F. Vt erat probandum.

k ex prima parte huius
l prop. 11. lib. 3.
m prop 26. lib 1.
n prop. 7. lib. 3.

Tertio ſit triangulum A B C ad triangulum D E F, vt baſis B C ab baſim E F. Dico altitudines triangulorum ęquales eſſe. Si hoc verum non eſt, ipſi D E F ęquè altum ſecetur triangulum M B C maius, aut minus, quàm A B C: Ergo o erit triangulum M B C ad triangulum D E F, vt baſis B C ad baſim E F; Erat autem, vt B C ad E F, ita A B C ad D E F. Ergo p triangula M B C, & A B C eandem rationem habent ad idem triangulum D E F; ideoque q M B C, & A B C ęqualia ſunt, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alia altitudo, quàm ipſius trianguli A



o ex prima parte huius prop.
p prop. 7. lib. 3.
q prop. 4. lib. 3.

li A B C ęqualis eſt altitudini trianguli D E F. Vnde patet propoſitum.

Quartò parallelogrammum B H ad parallelogrammum E K ſit, vt baſis B C ad E F. Dico parallelogramma eſſe ęquè alta. Quoniam parallelogramma B H,& E K ſunt inter ſe, vt baſes. Ergo r eorum dimidia triangula A B C, D E F (quę ſunt, vt parallelogramma) ſ erunt quoque inter ſe, vt baſes; & ideo u triangula A B C, D E F erunt inter ſe ęquè alta. Vnde parallelogramma B H F K ęquè alta erunt. Quod erat oſtendendum.

r prop. 26. lib. 1.
ſ prop. 11. lib 3.
t prop. 7. l. 3
u ex tertia parte huius prop.
Eucl 39. ao. I.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur, quòd, ſi parallelogramma, vel triangula fuerint ęqualia, & ęquè alta: habebunt baſes ęquales. Et, ſi ęqualia fuerint triangula, vel parallelogramma inter ſe, & habeant baſes ęquales, ęquè alta erunt.

Nam ex prima,& ſecunda parte huius propoſitionis,quam proportionem ęqualitatis habent ęque alta parallelogramma, vel triangula, eandem habere debent baſes, & ideo baſes ęquales erunt: at ex tertia, & quarta parte huius propoſitionis, parallelogramma, & triangula ſunt in eadem ęqualitatis proportione, quam habent baſes; ideoque ęquè alta erunt.

COROLLARIVM II.

Facilè etiam deducitur, quòd, ſi duo triangula, vel duo parallelogramma habuerint baſes ęquales, erunt inter ſe, vt altitudines.

Nam, ſi ſuper baſibus ęqualibus fiant x triangula, z vel parallelogramma rectangula ęqualia prioribus: erunt ſuper baſes ęquales latera, perpendiculariter eleuata, ęqualia altitudinibus priorum figurarum, ſi modò vſurpentur, vt baſes, quæ prius altitudines erant, atq; vſurpentur, vt altitudines, quę prius baſes ęquales erant: priores figuræ transformatæ erunt in duas alias figuras æquè altas; & ideo y erunt inter ſe, vt baſes, ſcilicet, vt altitudines priorum figurarum.

x prop. 32. lib 1.
z prop. 31. lib. 1.
y prop. 1. huius.

S C H O L I V M.

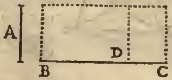
Deducitur ex hac propoſitione, quòd, ſi duo triangula, vel duo parallelo-

lelogramma ſuper baſes habuerint duo equalia latera, eleuata in angulis æqualibus, aut æqualibus duobus rectis: erunt triangula inter ſe, vel parallelogramma, vt baſes.

Nam dicta a *triangula, vel parallelogramma erunt æquè alta,* b *ideoque erunt, vt baſes.* — a Schol. prop 30. l. 1 — b prop. 1. huius.

Facili negotio ex hac propoſitione deducuntur tres primæ propoſitiones, quæ in ſecundo libro ſatis prolixè demonſtrauit Euclides.

Sit primò recta linea A inſecta, & B C ſecta ſit in D. Dico parallelogrammum rectangulum ſub A, & B C comprehenſum, (ideſt cuius baſis eſt B C, altitudo A circa angulum rectum) æquale eſſe rectangulis parallelogrãmis — Eucl. 1. II.



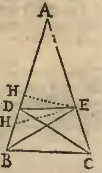
ſub A & B D, atque ſub A & D C contentis. Quoniam hæc omnia parallelogramma rectangula ſunt ęquè alta, cùm habeant communem altitudinem menſuratam à recta A. Ergo c *erunt inter ſe, vt baſes; ſed baſes B D, D C, ſimul ſumptæ, æquales ſunt baſi B C. Ergo* d *rectangula ex B D in A, & ex D C in A, ſimul ſumpta, æqualia ſunt rectangulo ex baſi B C in altitudine A ducto. Quod erat probandum.* — c prop. 1. huius, & prop. 22. lib 3. — d Coroll. 1. prop. 16. l. 3

Secundò ſupponatur inſecta A æqualis totæ B C, erit eadem ratione, parallelogrammum ex A in B C, ſeu ex B C in C B, ideſt e *quadratum ipſius B C, ęquale duobus rectangulis ex A, ſeu B C in B D, & ex B C in C D ſimul ſumptis.* — Eucl. 2. II. — e prop. 34. lib. 1.

Tertiò ſupponatur inſecta A ęqualis ſegmento D C, erit rurſus parallelogrammum ex A, ſeu D C in C B ęquale duobus rectangulis ex A, ſeu C D in B D, & ex D C in D C, ſeu f *quadrato ipſius D C.* — Eucl. 3. II. — f prop 34. lib. 1.

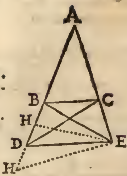
PROPOS. II. THEOR. II. — Eucl. 2. VI

Recta linea parallela baſi trianguli ſecat proportionaliter eius latera. Et recta, ſecans proportionaliter latera trianguli, parallela eſt eius baſi.



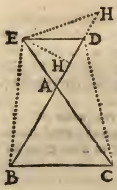
Sit triangulum A B C, & D E recta parallela baſi B C ſecet eius latera in D, & E. Dico B D ad D A eſſe in eadem ratione, ac C E ad E A. Coniungantur rectæ D C, E B. Quoniam duo triangula D B E, E C D candem baſim D E habent, & ſunt inter parallelas D E, B C. Ergò a ęqualia inter ſe ſunt, & ideo b ad idem triangulum A D E eandem rationem habent: ſed c triangulum B E D ad — a prop. 32. lib. 1. — b prop 3. lib 3. — c prop. 1. huius.

trian-



triangulum D E A eandem rationem habet, quam baſis B D ad baſim D A (eò quod perpendicularis, à puncto E ſuper rectam A B, communis altitudo eſt triangulorum D E B, D E A). Ergo *d* triangulum D C E ad triangulum D A E eſt, vt B D ad D A. *e* Rurſus cùm triangulum C D E ad triangulum E D A ſit, vt baſis C E ad baſim E A, quia ſunt eiuſdem altitudinis. Ergo, *f* vt B D ad D A, ita eſt C E ad E A. Quod erat primò oſtendendum.

d prop. 7. l. 3. e prop. 1. huius. f prop. 7. l. 3.

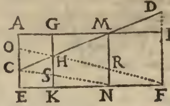


Secundò ſit B D ad D A, vt C E ad E A. Dico D E parallelam eſſe baſi B C. Si hoc verum non eſt, ſit *g* E H parallela baſi B C; Ergo, *h* vt C E ad E A ita erit B H ad H A: erat autem, vt C E ad E A, ita B D ad D A; Ergo, *i* vt B H ad H A, ita eſt B D ad D A. Et componendo *k* in primo caſu, & per conuerſionem *l* rationis inuerſam in ſecundo, at diuidendo *m* in tertio caſu, erit B A ad A D, vt B A ad A H. Quare *n* A D, & A H ęquales erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo E H, ſed ipſa E D parallela eſt baſi B C. Quod erat probandum.

g coroll. prop. 16. lib. 1. h ex prima parte huius. i prop 7. l. 3. k prop. 14. lib 3. l coroll. prop. 15. l. 3. m prop. 13. lib. 3. n prop. 4. l. 3.

S C H O L I V M.

Hinc deducitur, quòd rectę lineę quotcunque, ſecantur proportionaliter à lineis parallelis inter ſe. Rectæ lineę A B, C D, E F ſecentur à parallelis A E, G K, M N, D F. Dico eas proportionaliter ſecari. Ducantur rectæ F H O, & C N, coniungentes bina puncta ſectionum, & ſecantes reliquas parallelas in O, R, S. Quia in triangulo A M C recta G H parallela eſt baſi A C. Ergo o vt A G ad G M, ita eſt C H ad H M: Similiter in triangulo C M N, vt C H ad H M, ita eſt C S ad S N: Et in triangulo C N E, vt C S ad S N, ita E K ad K N. p Ergo, vt C H ad H M, ſeu A G ad G M, ita eſt E K ad K N. Poſtea q vt G M ad M B, ita eſt H M ad M D; & in triangulo D H F, vt H M ad M D, ita



o prop. 2. huius. p prop. 7. l. 3 q prop. 2. huius.

ita eſt H R ad R F, & ita K N ad N F in triangulo H F K. Ergo, r vt H *r prop.7.l.3*
M ad M D, ſeu G M ad M B, ita eſt K N ad N F. Quare patet propoſitum.

COROLLARIVM.

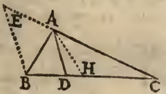
Conſtat ex ſecunda parte huius propoſitionis, quòd latera trianguli proportionalia ſunt ſegmentis factis à parallela baſi vſque ad verticem. Oſtenſum enim fuit B A ad A D eſſe, vt C A ad A E.

PROPOS. III. THEOR. III. *Eucl.3.VI*

Recta linea, ſecans bifariam angulum verticis trianguli, ſecabit baſim in eadem ratione laterum, ita vt homologa ſint conterminalia. Et, ſi baſis ſegmenta diſſecta ſint in eadem ratione laterum, erit ſectus bifariã angulus verticis.

In triangulo A B C recta A D efficiat angulos D A B, D A C æquales inter ſe. Dico B D ad D C eſſe, vt B A ad A C. Producta C A, vt fiat a E A çqualis B A, & iungatur E B. Quoniam b anguli E, & A B E, oppoſiti lateribus æqualibus B A, E A ſunt inter ſe æquales; Ergo c externus angulus C A B duplus eſt anguli A B E: ſed angulus C A B duplus eſt etiam anguli D A B; Ergo duo anguli D A B & E B A (alterni) æquales ſunt; & ideo d A D parallela eſt E B, baſi trianguli C E B. Quare e B D ad D C eſt, vt E A, ſeu ſei æqualis B A, ad A C. Vt erat probandum.

a prop 3.l.1 *b prop.6.l.1* *c prop.18.* *d prop. 16. lib 1.* *e prop.2. huius*



Secundò ſit B D ad D C, vt B A ad A C. Dico rectam D A ſecare bifariam angulum B A C. Si hoc verum non eſt, alia recta H A ſecet angulum B A C bifariam. Iam, g vt B A ad A C, ita erit B H ad H C: erat autem, vt B A ad A C, ita B D ad D C; Ergo h vt B H ad H C, ita eſt B D ad D C; & componendo i B C ad H C erit, vt B C ad C D; ideoque k C H & C D çquales ſunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo aliqua alia recta prçter D A ſecat bifariam angulum C A B. Quod erat oſtendendum.

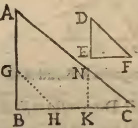
f prop.3.l.3 *g prima par. huius.* *h prop.7. lib.3* *i prop 14. lib 3.* *k prop.4. lib.3.*

Eucl 4. VI.

PROPOS. IV. THEOR. IV.

Triangulorum inter ſe ęquiangulorum proportionalia ſunt latera, quę circum ęquales angulos: Et homologa ſunt, quę ęqualibus angulis ſubtenduntur. Vocentur autem huiuſmodi triangula Similia inter ſe.

In triangulis A B C, D E F ſint duo anguli A, & D ęquales inter ſe; pariterque duo anguli B, & E ęquales; vnde *a* tertij anguli C, & F ęquales erunt, cùm ſint complementa ad duos rectos in vtroque triangulo. Dico eſſe A B ad B C, vt D E ad E F, & B C ad C A, vt E F ad F D, atque C A ad A B, vt F D ad D E (hoc enim modo homologa latera, ideſt antecedentia proportionalitatis, ſubtendunt angulos ęquales). Secentur *b* G B ęqualis D E, & N C ęqualis D F; & ducantur *c* G H quidem parallela A C, atque N K parallela A B. Quoniam eidem angulo A æqualis eſt D ex *d* hypotheſi, & B G H propter parallelas G H, A C, ęqualis eſt eidem A. Ergo anguli B G H & D ęquales ſunt, & erant ęquales anguli B & E, atque ſubiacentia latera G B, D E ęqualia erant. Ergo *e* B H ęqualis eſt E F. Eodem modo in triangulo N K C erit K C ęqualis E F. Poſtea quia G H parallela eſt A C. Ergo *f* A B ad B G erit, vt C B ad B H: & permutando *g* A B ad B C erit, vt G B ad B H; ſuntque G B, B H ęquales ipſis D E, E F. Ergo, *h* vt A B ad B C, ita eſt D E ad E F. Rurſus *i* propter parallelas A B, N K erit B C ad C K, vt A C ad C N; & permutando *k* B C ad C A erit, vt K C ad C N, ſeu, *l* vt E F ad F D (cùm hę ęquales ſint illis); cùmque A B ad B C ſit, vt D E ad E F, & B C ad C A ſit, vt E F ad F D. Ergo, *m* ex compoſitione ordinata, erit A B ad A C, vt D E ad D F. Quod erat probandum.



a corol. 10. prop. 18. l. 1
b prop. 3. lib. 1.
c corol. propoſ. 16. l. 1.
d prop. 15. lib. 1.
e prop. 25. lib. 1.
f corol prop. 2. huius.
g prop. 12. lib. 3.
h pr p 7 l. 3.
i corol. prop. 2. huius.
k prop. 12. lib. 3.
l prop. 3 l. 3
m prop. 19. lib. 3.

COROLLARIVM I.

Patet, ſi in duobus triangulis duo anguli ęquales fuerint duobus angulis, vterque vtrique, eſſe triangula ſimilia. Nam *n* tres anguli vnius trianguli ſunt ęquales tribus angu-

n coroll. 2. prop. 18. l. 1

lis

lis alterius; cùmque duo anguli vnius trianguli ſupponantur ęquales duobus angulis alterius, erit tertius angulus æqualis tertio. Et propterea triangula ſimilia erunt.

COROLLARIVM II.

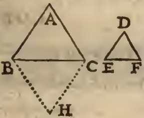
Patet etiam in triangulis ęquiangulis latera vnius proportionalia eſſe lateribus alterius trianguli, ſingula ſingulis, quibus ęquales anguli opponuntur. Poſiti enim fuerunt anguli A, D ęquales, & B, E etiam ęquales, nec non C, F ęquales inter ſe; & vt latus A B ad D E, ita oſtenſum fuit A C ad D F, atque ita B C ad E F.

PROPOS. V. THEOR. V.

Eucl. 5. VI.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, erunt ęquiangula inter ſe.

In triangulis A B C, D E F ſit A B ad B C, vt D E ad E F, & B C ad C A ſit, vt E F ad F D, atque C A ad A B ſit, vt F D ad D E. Dico triangula eſſe ęquiangula. Fiat [a] angulus H B C ęqualis angulo E, & angulus H C B fiat ęqualis angulo F: Efficietur [b] ergo tertius angulus H ęqualis angulo D. Quare in triangulis ęquiangulis B C H, E F D erit [c] H B ad B C, vt D E ad E F; ſed A B ad B C erat, vt D E ad E F. [d] Ergo H B, & A B ad B C eandem rationem habent; ideoque [e] H B, & A B ęquales inter ſe ſunt. Eadem ratione H C æqualis erit A C; & eſt B C baſis communis: Ergo [f] anguli A, & H ęquales inter ſe erunt; erat autem angulus D ęqualis angulo H. Ergo duo anguli A, & D ęquales inter ſe ſunt. Eadem ratione anguli A B C, & E ęquales inter ſe erunt. Quare triangula A B C, D E F ęquiangula ſunt. Quod erat oſtēdendum.



a prop. 24. lib. 1.
b coroll. 10 prop 18. lib. 1.
c prop. 4. huius.
d prop. 7. lib. 5.
e prop. 4. lib. 3.
f prop. 7. l. 1

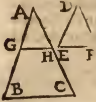
PROPOS. VI. THEOR. VI.

Eucl. 6. VI.

Si duo triāgula vnum angulum vni angulo ęqualem habuerint, & circa ęquales angulos latera fuerint proportionalia; triangula erunt ſimilia.

In triangulis A B C, D E F ſint anguli A & D æquales, &, vt B A ad A C, ita ſit D E ad D F. Dico triangula eſſe ſimilia. Secetur *a* A G æqualis D E, & A H fiat æqualis D F, & coniungatur G H; cùmque anguli A, D æquales ſint, erunt *b* duo triangula A G H, D E F æqualia, ęquiangula, & æquilatera inter ſe; Eſt verò B A ad A C, vt E D ad D F, ſeu *c* vt G A ad A H. (propter æqualitatem). Ergo *d* permutando B A ad A G erit, vt C A ad A H; ideoque *e* G H parallela erit ipſi A C: Vnde *f* angulus B æqualis erit angulo A G H, ſed eidem angulo A G H ęqualis erat angulus E. Ergo anguli B, & E æquales inter ſe erunt: Erant autem prius anguli A, & D æquales. Ergo *g* triangula A B C, D E F inter ſe æquiangula, & *h* ſimilia ſunt. Quod erat oſtendendum.

a prop. 3. lib. 1.
b prop. 4. lib. 1.
c prop. 3. lib. 3.
d prop. 12. lib. 3.
e prop 2. huius.
f prop. 15. lib. 1.
g coroll 1. prop. 4. l. 4



COROLLARIVM I.

Patet, ſi in triangulo ducatur recta linea parallela baſi, abſcindere triangulum illi ſimile. Fuit enim G H parallela B C, & triangulum A G H oſtenſum fuit æquiangulum, ideoque *k* ſimile ipſi A B C.

h prop. 4. huius.

COROLLARIVM II.

Colligitur etiam ſi duo latera vnius trianguli proportionalia fuerint duobus lateribus alterius trianguli, & comprehendant dicta latera angulos æquales, eſſe triangula ſimilia.

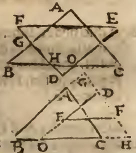
PROPOS. VII. THEOR. VII.

Eucl. 32. VI.

Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, ita vt homologa ſint inter ſe parallela, & tendant duo priora ad eaſdem partes, ad quas tendunt poſteriora latera, vel ad oppoſitas; erunt triangula ſimilia, & baſes parallelę, vel in directum poſitę. aut ſi tria latera tribus lateribus parallela fuerint ſingula ſingulis, erunt triangula ſimilia.

In duobus triangulis A B C, & D E F ſit primò B A ad A C, vt E D ad D F, ſintque B A & D E ęquidiſtantes, pariterque ęquidiſtent A C, D F; atque tam A B, A C, quàm D E, &

D F procedant à punctis A, D verſus eaſdem partes, aut A B, A C verſus vnam, & D E, D F verſus oppoſitas. Dico triangula A B C, & D E F ſimilia eſſe, & baſes B C, E F parallelas eſſe, aut in directum poſitas. Quoniam duę rectę B A, & B C ſecant vnam parallelarum A C, ſecabunt *a* quoque reliquam D F, ſecent eam productam ſi opus eſt, in punctis G, & H: Pariter C B, ſecans ipſam A B, ſecet quoque ei parallelam D E in O. Et quia recta G H parallela eſt baſi A C triāguli A B C. Ergo *b* triangulum D G H ęquiangulum eſt triangulo B A C; & ideo vt B A ad A C, ita erit B G ad G H. Rurſus quia D O parallela eſt G B baſi trianguli H G B, erit, vt prius, O D ad D H, vt B G ad G H; & propterea *c* O D ad D H erit, vt B A ad A C; ponebatur autem E D ad D F, vt B A ad A C. Igitur *d* O D ad D H erit, vt E D ad D F; ſuntque anguli O D H, & E D F æquales ad *e* verticem, vel vnus & idem (propterea quod D E, O D in directum ſunt, & ſic D F, H D, atque rectę D E, & D F tendunt ad partes eaſdem, ad quas diriguntur duę rectę A B & A C, ſiue D O & D H, vel ad partes oppoſitas ex hypotheſi). Ergo *f* duo triangula O D H, E D F æquiangula ſunt inter ſe, & habent latera proportionalia; & ideo *g* baſis E F parallela eſt ipſi O H, ſeu B C; aut *h* in directum erunt poſitę, ſi ſe contingunt: erat autem triangulum A B C æquiangulum triangulo D O H. Ergo triangula A B C, & D E F æquiangula ſunt inter ſe, & ideo *i* ſimilia.



a cor. prop. 29. lib. 1.
b corol. 1. prop. 6. huius.
c prop. 7. lib. 5.
d prop. 7. lib. 3.
e cor. prop. 5. lib. 1.
f prop. 6. huius.
g prop. 2. huius.
h cor. prop. 17 lib. 1.
i prop 4. huius.

Secundò ſint A B, D E æquidiſtantes, pariterque A C, D F æquidiſtent, nec non B C, & E F ſint parallelæ. Dico rurſus triangula A B C, D E F eſſe ſimilia. nam facta eadem conſtructione, oſtendetur, vt prius, triangulum O D H ſimile triangulo B A C. Ducitur verò E F parallela ipſi O H baſi trianguli D O H. Igitur *k* triangulum D E F ęquiangulum eſt ipſi triangulo D O H, ſiue triangulo A B C. Quod erat, &c.

k coroll. 1. prop 6. huius.

COROLLARIVM I.

Conſtat, quòd, ſi duæ rectę, angulum continentes, parallelæ fuerint duabus alijs, & omnes tendant, & producantur ad eaſdem partes, vel poſtremę ad partes aduerſas: erunt an-

guli, ab eis contenti, ęquales inter ſe. Oſtenſi enim fuerunt anguli A, & D ęquales inter ſe, ex eo, quod rectæ B A, & A C parallelæ erant ipſis E D, & D F.

COROLLARIVM II.

Et ſi duo anguli ęquales inter ſe fuerint, & ſingulę, circa ſingulos angulos, rectę lineę parallelę fuerint inter ſe, & vergant ad eaſdem partes: erunt reliquę rectę lineę parallelę inter ſe. Poſitis enim rectis A C, D F parallelis oſtenſi fuerunt anguli G, E D F ęquales; igitur quando etiam ſunt anguli B A C, E D F ęquales, erunt duo anguli F D E, & G ęquales inter ſe; & ideo [f] A B, & D E parallelę erunt.

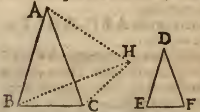
f prop. 16. lib. 1.

Eucl. 7. VII.

PROPOS. VIII. THEOR. VIII.

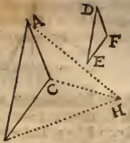
Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, & duo anguli, homologis lateribus oppoſiti, ęquales inter ſe; atque duo anguli, reliquis homologis oppoſiti, ſint eiuſdem ſpeciei: erunt triangula ſimilia inter ſe.

In triangulis A B C, & D E F ſit A B ad A C in eadem ratione, atque E D ad D F; & ſint anguli B, & E ęquales, qui nimirum opponuntur homologis A C, D F, atque duo anguli C & F, oppoſiti reliquis homologis ſint eiuſdem ſpeciei, ideſt ambo ſint acuti, aut ambo obtuſi: Dico triangula A B C, & D E F ſimilia eſſe.



Fiat [a] angulus C A H ęqualis angulo D; ſeceturque [b] A H ęqualis A B, iunganturque rectę C H, & B H. Quoniam [c] æquales B A, & H A habent eandem rationem ad eandem A C, eſtque E D ad D F, vt B A ad A C: Ergo A H ad [d] A C eſt, vt E D ad D F; & ſunt anguli C A H, & D ęquales: Igitur [e] triangula A C H, & E D F ſunt ęquiangula, & ideo anguli A H C, & E æquales ſunt; pariterque anguli A C H, & F ſunt inter ſe ęquales: Erant autem anguli A C B, & F eiuſdem ſpeciei: Ergo quan-

a prop. 24. lib. 1.
b prop. 3. lib. 1.
c prop. 3. lib. 3.
d prop. 7. lib 3.
e prop. 6. huius.



quando angulus A C B eſt acutus, erit quoque angulus A C H acutus, & quando ille eſt obtuſus, hic quoque obtuſus erit, & propterea duo anguli A C B, & A C H, ſimul ſumpti, aut minores erunt, aut maiores duobus rectis; & ideo *f* duæ rectę B C, & C H in directum non erunt, efficieturque triangulum B C H. Cumque duo anguli A B C, & A H C ęquales ſint inter ſe, cùm ſint ęquales eidem angulo E: *g* pariterque duo anguli A B H; & A H B ſint ęquales (cùm latera A B, & A H ęqualia facta ſint). Ergo compoſiti, vel differentiales anguli H B C, & B H C ęquales inter ſe erunt; & propterea *h* rectę B C, & H C ęquales erunt: ſed facta fuerunt latera A B, & A H ęqualia, & A C eſt commune. Igitur *k* angulus B A C ęqualis eſt angulo H A C; ſed eidem angulo H A C ęqualis erat angulus D. Ergo anguli B A C, & D ęquales ſunt inter ſe. Et poſiti fuerunt anguli A B C, & E æquales. Igitur *l* triangula A B C, & D E F ſimilia ſunt. Quod erat oſtendendum.

f prop. 13. lib. 1.
g prop. 6. lib. 1.
h prop. 20. lib. 1.
k prop. 7. lib. 1.
l Coroll. 1. prop. 4. huius.

PROPOS. IX. THEOR. IX.

Eucl. 8. VI

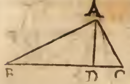
Perpendicularis ab angulo recto trianguli rectanguli ad baſim ducta, diuidit ipſum in duo triangula ſimilia toti, & inter ſe, & eſt media proportionalis inter baſis ſegmenta, & efficit vtrunque ſegmentum tertium proportionale totiùs baſis, & lateris dicto ſegmento conterminalis.

In triangulo A B C ſit angulus B A C rectus, & ab A cadat perpendicularis A D ad baſim, ſecans eam in D. Dico triangula B A D, A C D & B C A ſimilia eſſe inter ſe, & A D mediam proportionalem inter ſegmenta B D, & D C, atque C B ad B A eſſe, vt A B ad B D, pariterque tres B C, C A, D C eſſe proportionales. Quoniam in triangulis B A C, B D A angulus B eſt communis, & anguli recti B A C, B D A ęquales ſunt. Ergo *a* tertius angulus C ęqualis eſt angulo B A D; ideoque *b* triangula B A C, B D A ſimilia ſunt, & circa communem angulum B latera C B ad B A erunt in eadem ratione, quam A B habet ad B D. Similiter in triangulis C A B, C D A angulus C eſt cōmunis, & duo recti C A B,

a corol. 10. prop. 18. l. 1
b prop. 4. huius.

c cor. 1. prop. 4. huius.

d cor. 1 prop. 4 huius.



C D A ſunt equales. Ergo c triangula C A B, C D A ſimilia ſunt inter ſe, & B C ad C A eſt, vt A C ad C D. Tandem in triangulis B A D, A C D duo anguli B A D, & C æquales oſtenſi ſunt, & duo anguli recti B D A, A D C equales ſunt. Ergo d triangula B A D, A C D ſimilia quoque inter ſe ſunt, & latera circa rectos angulos æquales proportionalia ſunt: Ergo B D ad D A eſt, vt A D ad C D. Sic enim homologa ſubtendunt angulos equales: & A D media eſt trium continuè proportionalium B D, D A, D C. Quare patet propoſitum.

S C H O L I V M.

Si à puncto intermedio datæ rectæ lineæ eleuata perpendicularis media proportionalis fuerit inter ſegmenta ipſius: tria puncta extrema in ſemicirculi peripheria exiſtunt.

e prop. 25. lib 2.
f prop. 9. huius.

Sit perpendicularis A D media proportionalis inter B D, & D C. Dico per tria puncta B, A, C ſemicirculi peripheriam tranſire. Si enim hoc verum non eſt, e deſcripto ſemicirculo capiente angulum rectum, diametro B C, tranſeat citra, vel vltra punctum A, ſi fieri poteſt: vnde f perpendicularis ab angulo recto maior, vel minor, quàm A D, media proportionalis erit inter B D, & D C, quod eſt contra hypotheſin. Non igitur ſemicirculi peripheria, diametro B C deſcripta, tranſit per aliud punctum, quàm per A.

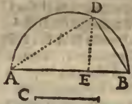
Eucl. 11. 13. VI.

PROPOS. X. PROBL. I.

Duabus datis rectis lineis, tertiam, vel mediam proportionalem inuenire.

Sint datę duę rectæ A B, & C, ijs primò reperiri debet tertia proportionalis. Super maiori A B deſcribatur ſemicirculus A D B, & in eo a accomodetur B D ęqualis C minori & à puncto D cadat b perpendicularis D E, ſecans A B in E. Dico B E eſſe tertiam proportionalem quæſitam. Coniuncta recta A D, c erit angulus A D B in ſemicirculo rectus, & ab angulo recto ducitur perpendicularis D E ad baſin trianguli rectanguli A D B. Ergo d vt A B ad B D, ita

a prop. 12. lib. 2.
b prop. 11. lib. 1.
c prop. 20. lib. 2.
d prop 9. huius.



D, ita eſt D B, ſeu C ad B E; ideoque B E eſt tertia proportionalis quæſita. *e prop. 3 lib. 1.*

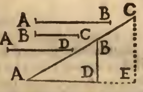
Secundò inter A B, & C reperiri debet media proportionalis. Ex diametro A B *e* ſecetur B E æqualis C, & *f* eleuetur perpendicularis E D, cõpleaturq; *g* triangulũ rectangulũ A D B: erunt, *b* vt prius, tres A B, B D, & B E, ſeu C, continuæ proportionales. Quare B D eſt media quæſita. Vt erat faciendũ. *f prop. 10 lib. 1. g prop. 20. lib. 2. h prop. 9. huius.*

PROPOS. XI. PROBL. II.

Eucl. 12. VI.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Datis tribus rectis A B, B C, & A D, debet reperiri quarta, ad quam A D eãdem rationem habeat, quam A B habet ad B C. Continuentur in directum A B, B C, & D A efficiat quemlibet angulum cum C A, &



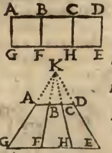
iungatur recta B D, atque *a* C E fiat parallela ipſi B D, & ſecet rectam A D, extenſam in E. Dico D E eſſe quæſitam. Quoniam in triangulo C A E ducta eſt B D parallela baſi C E. Ergo, *b* vt A B ad B C, ita eſt A D ad D E. & hoc erat faciendum. *a Coroll. prop. 16. huius. b prop. 2. huius.*

PROPOS. XII. PROBL. III.

Eucl. 10. VI.

Datam rectam lineam ſecare ſecundum rationes datas.

Data recta linea G E ſecari debet ſecundum proportiones A B ad B C, & B C ad C D. Continuentur in directum rectæ lineę A B, B C, C D, *a* ponaturque ipſa A D parallela rectę G E: & à punctis A, D ad terminos G, & E coniungantur rectæ lineę A G, & D E. Quę primò ſint parallelę inter ſe; & ducantur *b* rectæ B F, C H parallelæ ipſis A G, vel D E, ſecantes G E in F, & H. Patet *c* rectam G E ſectam eſſe à parallelis in G, F, H, E in eiſdem proportionibus, atque A B ſecatur. *a coroll. prop 10 l. 1. b coroll. prop 16 l. 1. c ſchol. prop. 2. huius.*



Secundò A G, & D E concurrant in K, ducanturque à punctis

ctis B, C ad K rectę lineę B K, C K, ſecantes G E in F & H. Et quia G F parallela eſt baſi A B. Ergo [d] triangula A K B, & G K F ſimilia ſunt, ideoque vt B K ad F K ita eſt A B ad G F. Eadem ratione, vt eadem B K ad eandem F K, ita eſt B C ad F H; & ita etiam oſtendetur C D ad H E. Quare [e] permutando, vt A B ad B C, ita erit G F ad F H, & vt B C ad C D, ita erit F H ad H E. Quare patet propoſitum.

d coroll. 1. prop. 6. huius.

e prop 12. lib. 3.

COROLLARIVM.

Conſtat ex ſecunda parte huius demonſtrationis, quòd, ſi duæ parallelæ ſecentur à pluribus rectis lineis concurrentibus in vno puncto, ſectę erunt illę parallelę proportionaliter.

SCHOLIVM.

Animaduertendum eſt tria hæc problemata adaptari poſſe ſpatijs rectilineis, ſi modo ſint, vel efficiantur parallelogramma, vel triangula eiuſdem altitudinis. Nam [f] parallelogramma, vel triangula ęquè alta ſunt inter ſe, vt baſes. Ergo quidquid dictum eſt de rectis lineis accommodari etiam poteſt baſibus ſpatiorum ęqualium altitudinum; ideoque ipſis ſpatijs.

f prop. 1. huius.

Eucl. 23. VI.

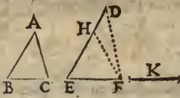
PROPOS. XIII. THEOR. X.

Si duo triangula, vel duo parallelogramma, habuerint vnum angulum vni angulo ęqualem, vel ſimul ſumptos ęquales duobus rectis: habebunt rationem compoſitam ex rationibus laterum, quæ dictos angulos comprehendunt.

Sint duo triangula, vel parallelogramma A B C, & D E F quorum anguli B, & E æquales ſint inter ſe, vel certè, ſimul ſumpti, ęquales ſint duobus rectis. Dico figuram A B C ad figuram D E F (comparando ſemper eas, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, ſcilicet triangula inter ſe, aut parallelogramma inter ſe) habere proportionem compoſitam ex ratione lateris B C ad E F, & ex ratione lateris A B ad latus D E. Fiat [a] E F ad K, vt A B ad D E, & in latere eleuato D E ſecetur [b] E H æqualis lateri elauato A B alterius figurę, & cōpleatur triangulum, vel parallelogrammum H E F. Quoniam duo triangula, vel duo paral-

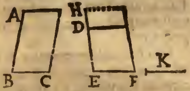
a prop. 11. huius.

b prop. 3. l. 1.



parallelogramma A B C, & H E F habent latera eleuata A B, H E equalia in angulis B, & E æqualibus, vel efficientibus ſummam duorum rectorum. Ergo c figura A B C ad eiuſdem ſpeciei figuram H E F eandem rationem habet, quam baſis B C ad baſim E F. Ruſus d figura F H E ad eiuſdem ſpeciei figuram F D E eſt vt H E ad D E, cum perpendicularis ab F ad H E ducta cõmunis altitudo ſit figurarum; eſt verò H E, ſeu e ei æqualis A B ad D E, vt E F ad K. Ergo f figura H E F ad figuram D E F eſt, vt E F ad K. Quare g ex compoſitione ordinata, vt prima figura A B C ad tertiam eiuſdem ſpeciei D E F, ita eſt prima recta B C ad tertiam K. Sed B C ad K habet proportionem compoſitam ex ratione B C ad E F, & ex ratione ipſius E F ad K; eſtque E F ad K, vt A B ad D E. Ergo h proportio figuræ A B C ad eiuſdem ſpeciei figuram D E F ex iiſdem proportionibus laterum B C ad E F, atque A B ad D E componitur. Quod erat oſtendendum.

c Sch. prop. 1. huius.
d prop. 1. huius.
e prop. 3. lib. 3.
f prop. 7. l. 3
g prop. 19. lib. 3.



h prop. 19. lib. 3.

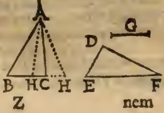
PROPOS. XIV. THEOR. XI.

Eucl. 15. 14. VI.

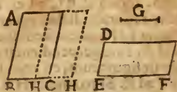
Si duo triangula, vel duo parallelogramma vnum angulum vni angulo çqualem, vel ambos ſimul duobus rectis çquales habuerint, atque circa dictos angulos habuerint latera reciprocè proportionalia, erunt æqualia inter ſe. Et ſi fuerint æqualia, habebunt latera circa dictos angulos reciprocè proportionalia.

Sint primò duo triangula, vel duo parallelogramma A B C, & D E F, quorum anguli B, & E æquales ſint inter ſe vel, ſimul ſumpti, æquales ſint duobus rectis: & vt latus A B ad D E, ita ſit F E ad C B (ſic enim a figuræ A B C, & D E F ſunt reciprocæ, cùm A B C contineatur à prima A B & quarta C B, atque D E F contineatur à ſecunda D E, & tertia E F quatuor rectarum proportionalium). Dico triangula A B C, & D E F inter ſe, vel parallelogramma æqualia eſſe. Fiat b E F ad G, vt A B ad D E. Quia E F ad B C eſt, vt A B ad D E; & vt A B ad D E, ita eſt E F ad G. Ergo c E F ad duas B C, & G eandem rationem habet; ideoque d B C, & G æquales ſunt. Habet e verò B C ad G proportionem

a Def. 1. huius.
b prop. 11. huius.
c prop. 7. l. 3.
d prop. 4. lib 3.
e prop. 19. lib. 3.



nem compoſitam ex ratione B C ad E F, & ex ratione; ipſius E F ad G, ideſt lateris A B ad latus D E. Igitur duę rationes



laterum, quæ angulos B, & E continẽt, componunt *f* proportionem ęqualitatis B C ad G. Sed *g* proportio figurę A B C ad eiuſdem ſpeciei figuram D E F compoſita eſt ex iiſdem proportionibus laterum B C ad E F, & A B ad D E. Ergo *h* figura A B C ad eiuſdem ſpeciei figuram D E F habet eandem ęqualitatis proportionem, quam habet B C ad G. Quare patet propoſitum.

f prop. 19. 3. g prop 13. huius. h prop. 7. lib. 3.

Sint ſecundò triangula A B C, & D E F inter ſe, vel parallelogramma ęqualia, & anguli B, & E ſint æquales, vel efficientes ſummam duorum rectorum. Dico A B ad D E eſſe reciprocè, vt E F ad B C. Si hoc verum non eſt, vt A B ad D E, *i* ita fiat E F ad B H maiorem, aut minorem, quàm B C; & compleatur triangulum, vel parallelogrammum A B H. Et quia duę figurę A B H, & D E F eiuſdem ſpeciei habent latera reciprocè proportionalia circa angulos B, & E. Ergo *k* figura A B H ęqualis eſt figurę D E F; ſed ex hypotheſi figura A B C ęqualis erat ipſi D E F: Ergo figurę A B H & A B C ęquales ſunt inter ſe, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo E F ad maiorem, aut minorem, quàm B C, habere poteſt eandem rationem, quam A B ad D E; ideoque E F ad B C eſt reciprocè, vt A B ad D E. Quod erat oſtendendum.

i prop. 11. huius. k ex prima part huius.

Eucl. 16. VI.

COROLLARIVM I.

Patet, ſi quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, eſſe parallelogrammum rectangulum, ſub extremis contentum, ęquale ei, quod ſub medijs continetur. Et ſi duo parallelogramma rectangula ęqualia fuerint; erit vnum contentum ab extremis, alterum verò à medijs quatuor rectarum proportionalium. Nam duo parallelogramma rectangula, quorum vnum continetur à prima, & quarta; alterum verò à ſecunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium, habent circa angulos rectos ęquales latera reciprocè proportionalia. Ergo *l* ſunt ęqualia inter ſe. Et ſi fuerint ęqualia, habebunt *m* latera circa rectos angulos reciprocè proportionalia; ideoque vnum continetur à prima, & quarta, alterum verò à ſecun-

l prop. 14. huius. m prop. 14. huius.

ſecunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium.

COROLLARIVM II.

Eucl.17. VI.

Et, ſi tres rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulum, ſub extremis contentum, ęquale erit quadrato, à media deſcripto. Et ſi quadratum ęquale fuerit rectangulo, erit latus quadrati medium proportionale inter duo latera rectangulum continentia. Nam tres rectæ proportionales poſſunt effici quatuor proportionales, bis poſita media proportionali; ideoque (vt in præcedenti corollario dictum eſt) rectangulum, ſub extremis contentum, ęquale erit ei, quod ſub duabus medijs ęqualibus continetur, ideſt [n] quadrato medię proportionalis. Similiter exiſtente quadrato ęquale rectangulo, continebitur quadratum à duabus medijs ęqualibus, ideſt ab vna media trium proportionalium.

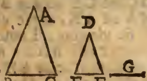
n prop.34. lib.1.

PROPOS. XV. THEOR. XII.

Eucl.19. VI.

Similia triangula, in duplicata ratione ſunt laterum homologorum.

Sint duo triangula ABC, & DEF inter ſe ſimilia, quorum anguli B, & E ſint æquales, & latera homologa AB & DE, vel BC & EF. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF, eſſe in duplicata proportione cuiuslibet lateris BC ad eius homologum EF. Fiat [a] EF ad G, vt AB ad DE. Quoniam propter ſimilitudinē triangulorum ABC, & DEF eſt [b] AB ad DE, vt BC ad EF; ſed vt AB ad DE, ita facta eſt EF ad G. Igitur, [c] vt BC ad EF, ita eſt EF ad G.



Quare [d] BC ad G duplicatam proportionem habet eius, quam habet BC ad EF, ſeu AB ad DE. Eſt verò [e] proportio trianguli ABC ad ei ęquiangulum DEF, vt BC ad G (vt pote compoſita ex rationibus laterum BC ad EF, & EF ad G, ſeu AB ad DE). Igitur [f] triangulum ABC ad ei ſimilem triangulum DEF duplicatam proportionem habet rationis cuiuslibet lateris homologi BC ad homologum EF. Quod erat oſtendendum.

a prop.11. huius.
b prop.4. huius.
c prop.7.l.3
d prop.19. lib.3.
e prop.13. huius.
f prop.7.l.3

COROLLARIVM.

Patet, ſi homologis lateribus duorum triangulorum, ſimilium tertium proportionale reperiatur: eſſe, vt primum latus ad tertium proportionale, ita triangula inter ſe.

Eucl.18.VI.

PROPOS. XVI. PROBL. IV.

Super data recta linea deſcribere Polygonum dato polygono ęquiangulum, & habens circa angulos æquales latera proportionalia lateribus illius, ita vt data recta homologa ſit dato lateri Polygoni. Vocentur huiuſmodi polygona Similia inter ſe, & ſuper datas rectas homologas ſimiliter deſcripta.

Sit data quęlibet figura polygonia C D G, debet ſuper data recta A B deſcribi figura, cuius anguli ſinguli æquales ſint ſingulis angulis figurę datę, & circa angulos ęquales latera ſint proportionalia, ita vt A B homologa ſit dato lateri D C. Ab angulo C ad ſingulos oppoſitos angulos figurę ducantur rectę C E, & C F, diuidentes figuram in triangula C D E, C E F, & C F G; poſtea fiat *a* angulus B A H ęqualis D C E, & H A K ęqualis fiat angulo E C F, atque angulus K A M fiat ęqualis angulo F C G, & ſic vlterius, ſi plures extiterint; eritque totus angulus B A M ęqualis angulo D C G. Deinde, *b* vt D C ad C E ita fiat B A ad A H, & vt E C ad C F, ita fiat H A ad A K, atque vt F C ad C G, ita fiat K A ad A M, & ſic vlterius, ſi opus eſt. Patet *c* ex compoſitione ordinata, eſſe B A ad A M. vt D C ad C G. Coniunguntur tandem rectę B H, H K, & K M. Dico figuram A B M eſſe quęſitam. Quoniam circa angulos ęquales D C E, & B A H latera D C ad C E, & B A ad A H in eadem ſunt ratione: Ergo *d* triangula D C E, & B A H ſimilia ſunt; pariterque triangula E C F, & H A K ſimilia erunt, & ſic etiam triangula F C G, K A M erunt ſimilia. Quare *e* anguli C E D, A H B æquales ſunt, & vt D E ad E C, ita eſt B H ad H A; pariterque anguli D, & B ęquales ſunt, & vt C D ad D E, ita eſt A B ad B H. Rurſus *f* propter ſimilitudinem triangulorum E C F, & H A K anguli C E F, A H K ęquales ſunt, & vt C E ad E F, ita eſt A H ad H K; erat autem prius, vt D E ad E C, ita B H ad H A.

a prop.24. lib.1.

b prop. 11. huius.

c prop.19. lib.3.

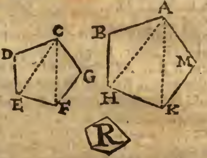
d prop.6. huius.

e prop.4. huius.

f prop.4. huius.

H A. Ergo g ex compoſitione ordinata, vt D E ad E F, ita erit B H ad H K; & ſunt anguli D E C, B H A ęquales, pariterque anguli C E F, A H K æquales ſunt oſtenſi. Ergo totus angulus D E F æqualis eſt toti angulo B H K. Eadem h ratione angulus G æqualis erit angulo M, & F G ad G C erit, vt K M ad M A, & erit angulus A K M æqualis angulo C F G, & A K ad K M erit, vt C F ad F G; at i propter ſimilitudinem triangulorum circa angulos æquales E F C, & H K A, latera E F ad F C, & H k ad k A ſunt proportionalia. Ergo k ex compoſitione ordinata H k ad k M erit vt E F ad F G. ſuntque toti anguli H k M, & E F G æquales inter ſe (nempe ex æqualibus compoſiti) et ſic de cęteris, ſi plures extiterint. Quare omnes anguli figurę A B M æquales ſunt omnibus angulis figurę C D G ſinguli ſingulis; & circa angulos ęquales latera ſunt proportionalia, quorum homologa ſunt datę rectę lineę A B, & C D. Quapropter factum eſt, quod fuerat propoſitum. Vocentur autem huiuſmodi polygona A B M, & C D G ſimilia inter ſe, & ſuper homologa latera A B, & C D ſimiliter deſcripta.

g prop. 19. lib. 3.
h prop. 4. huius.
i prop. 4. huius.
k prop. 19. lib. 3.



COROLLARIVM.

Eucl. 21. VI.

Facilè deducitur, quòd quę eidem retilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

Nam, ſi eidem rectilineo C D E F ſiāt l vel ſupponantur ſimilia duo rectilinea A B M, & R, ideſt eidem æquiangula, & in eadem laterum ratione; erunt quoque duo rectilinea A B M, & R ęquiangula inter ſe, & m habentia circa angulos æquales latera proportionalia. Et propterea ſimilia erunt inter ſe.

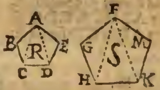
l prop. 16. huius.
m prop. 7. lib. 3.

PROPOS. XVII. THEOR. XIII.

Similia Polygona in duplicata ratione ſunt laterum homologorum.

Sint

Sint polygona ſimilia R, & S, quorum homologa latera ſint A B, F G, vel B C, G H, &c. Et quia, *a* vt A B ad B C, ita eſt F G ad G H. Ergo *b* permutando, vt A B ad F G, ita eſt B C ad G H. Eadem ratione C D ad eius homologum H K erit, vt B C ad G H; & ſic reliqua latera homologa proportionalia erunt. Vnde *c* eorum duplicatę proportiones eędem erũt. Dico figuram R ad figuram S habere rationem duplicatam lateris A B ad eius homologum F G. Ab angulis ęqualibus B A E, & G F M ad angulos ęquales oppoſitos coniungantur rectę lineę A C, A D, F H, F K, diuidentes figuras R, & S in ęquè multa triangula, eo quod *d* figuræ ſimiles ęquè multa latera habent. Et quoniam circa angulos ęquales B, & G latera A B ad B C, & F G ad G H in eadem ſunt ratione, *e* Ergo triangula A B C, & F G H ſimilia ſunt; ideoque anguli B C A, G H F ęquales ſunt, & A C ad C B eſt, vt F H ad H G; Tandem *f* triangulum A B C ad ei ſimile triangulum F G H, habet duplicatam proportionem eius, quam habet latus A B, ad eius homologum F G. Eadem ratione quia circa ęquales angulos E, M latera ſunt proportionalia, erit triangulum A E D ad ei ſimile F M K in duplicata proportione lateris D E ad eius homologum latus K M, ſeu duplicata lateris A B ad F G. Poſtea quia anguli B C D, G H K ęquales ſunt, & ablati B C A & G H F æquales oſtenſi ſunt; Ergo reſidui anguli A C D, & F H K ęquales ſunt; & erat A C ad C B, vt F H ad H G, & B C ad C D eſt, vt G H ad H K. (propter ſimilitudinem polygonorum). Ergo *g* ex compoſitione ordinata erit A C ad C D, vt F H ad H K; & comprehendunt angulos ęquales A C D, & F H K; Igitur *h* triangulum A C D ſimile eſt triangulo F H K, *i* & ad eum habet proportionem duplicatam eius, quam habet latus C D ad eius homologum H K, ſeu duplicatam lateris A B ad F G. Eadem ratione reliqua triangula, (ſi plura extiterint) erunt inter ſe in duplicata ratione lateris A B ad F G: ideoque *k* omnia triangula antecedentia, ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia triangula ſimul, id eſt figura R ad S in eadem ratione erit, atque vnum triangulum A B C ad vnum F G H, ſeu habebit eandem duplicatam proportionem cuiuslibet lateris B C ad eius homologum G H. Quod erat oſtendendum.



a prop. 16. huius.
b prop. 12 lib. 3.
c cor. 3. prop. 19. l. 3.
d prop. 16. huius
e prop. 6. huius.
f prop. 15. huius.
g prop. 19. lib 3.
h prop. 6. huius.
i prop. 15. huius.
k prop. 15. lib. 3.

CO-

COROLLARIVM I.

Conſtat ex demonſtratione huius propoſitionis, quòd ſimilia polygona diſtribui poſſunt in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis. Oſtenſa enim fuerunt in Polygono R triangula A B C, A C D, A D E ſimilia triangulis F G H, F H k, F k M in figura S, quę numero ęqualia ſunt, & quodlibet triangulum ad ſuum correſpondens triãgu lum eſſe vt R ad S.

COROLLARIVM II.

Patet etiam Polygona ſimilia, quorum homologa latera ſunt inter ſe ęqualia, eſſe quoque ęqualia inter ſe: Et è contra, ſi polygona ſimilia fuerint ęqualia, eſſe latera homologa inter ſe ęqualia. Quia [l] cùm habeant duplicatam rationem homologorum laterum ęqualium, habebũt rationem ęqualitatis; cùm duplicata ratio ęqualitatis efficiat proportionem ęqualitatis. *l prop. 17. huius. m prop. 19. lib. 3.*

COROLLARIVM III.

Similiter patet, quòd, ſi duorum ſimilium polygonorum latera homologa habeant rationem, quam duo numeri habent, ſcilicet commenſurabilem, ſiue non, erit primi polygoni ad ſecundum eadem proportio, quam habet quadratum lateris primi ad quadratum lateris ſecundi, vel vt latus primum ad tertium proportionale, aut vt prior numerus ad tertium proportionalem. Nam [o] proportio prioris termini ad tertium proportionalem duplicata eſt rationis termini primi ad ſecundum, vel ſecundi ad tertium, ſeu duplicata eſt rationis laterum homologorum, cuius proportionis laterum (ex hac propoſitione) duplicata quoque eſt ratio ſimilium polygonorum, vel quadratorum, quæ, [p] cùm ſint ęquiangula, & ęquilatera, erunt ſimilia inter ſe. *o prop. 19. lib. 3. p prop. 34. lib. 1.*

PROPOS. XVIII. THEOR. XIV.

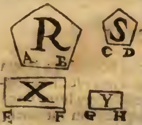
Eucl. 22. VI.

Si latera homologa quatuor figurarum ſimilium proportionalia fuerint: rectilinea ipſa inter ſe proportionalia quoque

que

quę erunt. Et ſi rectilinea ſimilia fuerint proportionalia: erunt eorum latera homologa proportionalia quoque.

Sint duæ figurę R, & S ſimiles inter ſe, pariterque duę figurę X, Y ſimiles inter ſe: & ſit primò A B, latus homologum figurę R, ad C D, latus homologum figurę S, in eadem ratione, quam E F, latus homologũ figurę X, habet ad latus homologum G H figurę Y. Dico figuram R ad S eandem rationem
a prop. 17. huius. habere, quam X ad figuram Y. Qoniam a figura R ad ei ſimilem S duplicatam proportionem habet eius, quam habet latus A B ad eius homologum C D; pariterque proportio figurę X ad ei ſimilem Y duplicata eſt eius, quam latus E F habet ad homologum G H. Sunt b verò proportiones
b coroll. 3. prop 19. l. 5 duplicatę ęqualium, vel earundem proportionum A B ad C D, atque E F ad G
c prop. 7. l. 5 H eędem quoque, vel æquales. Ergo c proportio figurę R ad S eadem eſt, quę figurę X ad Y. Quod erat primum.



Sit ſecundò figura R ad ei ſimilem S, vt X ad ei ſimilem figuram Y, ſintque A B, C D, E F, & G H latera homologa. Dico A B ad C D eſſe, vt E F ad G H. Quoniam proportiones figurarum R ad ei ſimilem S, & X ad ei ſimilem Y ſunt eędem,
d prop. 17. huius. ſeu ęquales, & ſunt d duplicatę proportionum homologorum laterum. Ergo e earum ſubduplicatæ, ſcilicet rationes
e coroll. 3. prop. 19. l. 5 laterum A B ad C D, atque E F ad G H eędem quoque ſunt. Quare patet propoſitum.

COROLLARIVM I.

Hinc facile deducitur artificium (datis tribus figuris rectilineis, quarum duę ſimiles inter ſe ſint) inueniendi quartam proportionalem figuram ſimilem reliquę. Si enim fuerint fi-
f prop. 12. huius. guræ R, & S ſimiles inter ſe, & quęlibet alia figura X; & f vt A B latus prioris ad C D ei homologum latus alterius figurę,
g prop. 16. huius. ita fiat E F latus figurę X ad latus G H: poſtea g ſuper G H fiat figura Y ſimilis, & ſimiliter poſita ipſi X. Patet, vt R ad S, ita eſſe figuram X ad figuram Y.

CO-

COROLLARIVM II.

Manifeſtum eſt, quòd, ſi inter duas figuras ſimiles interponatur media proportionalis figura, quę ſimilis ſit illis, erit eius latus medium quoque proportionale inter duo latera ei homologa extremarum figurarum, & è contra ſi latus figurę intermedię ſimilium figurarum medium proportionale fuerit inter duo ei homologa latera extremarum; erit figura illa media proportionalis inter extremas. Nam [b] prima figura ad ſecundam ei ſimilem, & ſecunda ad tertiam duplicatam proportionem habēt laterum homologorum; ſed quādo [i] ſimplę proportiones eędem ſunt, etiam eorum duplicatę proportiones eædem erunt, & contra. Ergo tam figura intermedia, quàm eius latus vicem antecedentis & conſequentis obtinet. Et propterea medium proportionale erit inter extrema.

h prop. 17. huius.

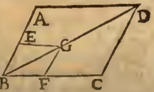
i coroll. 3. prop. 19. l. 3.

PROPOS. XIX. THEOR. XV.

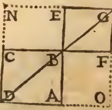
Eucl. 24. 26. VI. & 43. I.

Parallelogramma circa ęquales angulos, atque circa communem diametrum conſtituta, latera in directum habentia, erunt inter ſe ſimilia. Et ſi fuerint ſimilia inter ſe, & habeant latera homologa in directum poſita, conſiſtent circa communem diametrum. Atque duo parallelogramma complementi ęqualia erunt inter ſe.

Duo parallelogramma A C, & E F conſtituta ſint circa communem diametrum D B G, circa angulos ęquales A B C & E B F, atque habeant latera homologa A B, B E in directum poſita, pariterque latera C B, B F in directum. Dico primum parallelogramma A C, & E F ſimilia eſſe. Quoniam recta E G parallela ipſi D A baſi trianguli D B A, ſecat duo eius latera; Igitur [a] triāgulum A B D ſimile eſt triangulo E B G: Et propterea latera homologa A B ad B E atque D A ad E G, nec non D B ad B G in eadem ratione erunt. Similí ratione quia F G parallela eſt D C, baſi trianguli C D B, erunt triangula C D B, G B F ſimilia inter ſe, & vt prius latera homologa C B ad B F, atque D C ad G F



a coroll. 1. prop. 6. huius.



in eadem ratione erunt eiuſdem B D ad
b prop 7. lib. 3. eandem B G. Ideoque b A B ad B E, A D ad
E G, D C ad G F, atque C B ad B F in eadem
c prop. 12. lib 3 ratione erunt. Quare permutando c A B ad B
C erit, vt E B ad B F circa angulos ęquales A
d prop. 15. lib. 1. B C, E B F; pariterque d circa angulos ęquales alternos, aut externum, & internum A &
E, erit B A ad A D, vt B E ad E G, & ſic reliqua omnia latera
n prop. 16. huius. oppoſita. Quapropter n parallelogramma A C, & E F ſimilia
inter ſe erunt.

Secundò ſint parallelogramma A C, E F ſimilia, & habeant latera homologa A B, B E in directum poſita, & ſic latera C B, & B F in directum; & ducantur diametri D B, & E G. Dico D B G vnam rectam eſſe. Quoniam in duobus triangulis D C B, B E G parallela ſunt latera D C, & B E, cùm A B, B
e prop. 26. lib. 1. E in directum ſint poſitę, & e A B parallela ſit oppoſito lateri D C in parallelogrammo C A. Eadem ratione parallela ſunt
f prop. 17. huius. latera C B, & E G; ſuntque f anguli D C B, & B E G ęquales,
g prop. 7. huius. propter ſimilitudinem figurarum. Ergo g baſes D B, B G parallelę ſunt inter ſe; & h ſe tangunt in B. Ergo in directum
h Cor. prop. 17 lib. 1. ſunt poſitæ.

Tertiò Dico parallelogramma complementi N B, & B O
i Cor. prop. 5. lib 1. ęqualia eſſe inter ſe. Quoniam i circa angulos ęquales ad verticem E B C, & F B A latera ſunt reciprocè proportionalia:
k prop 14. huius. Nam vt A B ad B E, ita oſtenſa eſt C B ad B F. Ergo k parallelogramma N B, & B O ęqualia ſunt. Quæ erant oſtendenda.

Eucl. 45. 1.

PROPOS. XX. PROBL. IV.

Ad datam rectam applicare parallelogrammum ęquale rectilineo dato, in dato angulo.

Sit figura rectilinea R S, & quęlibet recta data A B, angulus datus C. Debet ad rectam A B applicari parallelogrammum ęquale rectilineo R S in angulo C. Diſtribuatur rectilineum in triangula R & S, & fiat a parallelogrammum D E F
a prop. 33. lib. 1. ęquale triangulo R in angulo E ęquali ipſi C, pariterque fiat
b prop. 24 lib. 1. parallelogrammum G L æquale triangulo S, cuius angulus H ęqualis ſit eidem angulo C: Poſtea b fiat angulus B A K
c prop. 11. huius. ęqualis angulo C, &, c vt B A ad D E, ita fiat F E ad A M & compleatur parallelogrammum A N: Similiter fiat, vt N M

ad

ad G H, ita L H ad M K, & compleatur parallelogrammum M O. Quoniam d duo parallelogramma A N, & D F circa angulos ęquales A, & E habent latera reciprocè proportionalia; igitur ęqualia ſunt inter ſe; eſt verò triangulum R factum ęquale parallelogrammo D F. Igitur parallelogrammum A N ęquale eſt triãgulo R. Rurſus e quia propter parallelas A B, M N eſt angulus externus K M N ęqualis interno, & oppoſito angulo A, eſtque angulus H æqualis angulo C, ſiue A. Igitur duo anguli H, & K M N ęquales ſunt inter ſe; ſuntque circa hos angulos ęquales latera reciprocè proportionalia. Igitur f parallelogrammum G L, ſeu ei ęquale triangulum S erit ęquale parallelogrammo M O. Et propterea duo parallelogramma A N & M O, ideſt parallelogrammum K A B O æquale erit duobus triangulis R & S, ſiue rectilineo dato: Eſtque applicatum ad rectam A B in angulo ęquali ipſi dato C. Factum eſt ergo Problema.



d *prop. 14. huius.*

e *prop. 15. lib. 1.*

f *prop. 14. huius.*

COROLLARIVM.

Eucl. 44. I

Patet qua ratione ad datam rectam applicari debeat parallelogrammum ęquale triangulo dato, in dato angulo.

Applicatum g enim eſt ad rectam A B parallelogrammum A N ęquale triangulo R in angulo A ęquali angulo dato C.

g *prop. 20. huius.*

PROPOS. XXI. PROBL. V.

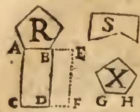
Eucl. 25. VI. & 14. II.

Datis duobus polygonis tertium deſcribere, quod ſimile ſit vni, & ęquale reliquo datorum.

Sint datę duę figurę rectilineę R, & S. Debet conſtrui figura, quę ęqualis ſit figuræ S, at ſimilis ſit figurę R. Super quolibet latere A B figurę R fiat a parallelogrammum A D ęquale ſpatio R in quolibet angulo B A C; & producta A B in E ſuper B D in angulo E B D, qui b ęqualis erit interno, & oppoſito B A C, fiat c parallelogrammum B F ęquale ſpatio S. Patet parallelogramma A D, & B F eſſe inter eaſdem parallelas A E, C F. Poſtea inter duas rectas A B, & B E d fiat

a *prop. 20. huius.*
b *prop. 15. lib. 1.*
c *prop. 20. huius.*
d *prop. 10. huius.*

e prop. 16. huius. media proportionalis G H, ſuper quam fiat *e* figura X ſimilis ipſi R, ita vt G H ſit latus homologum ipſi A B. Quoniam *f prop. 17. huius.* R & X ſunt figurę ſimiles, *f* habebit R ad X duplicatam rationem eius, quam habet latus A B ad eius homologum G H; *g prop. 19. lib. 3.* ſed *g* A B ad B E duplicatam rationem habet eius, quam habet A B ad mediam proportionalem G H. *h prop. 7. lib. 3.* Ergo, *h* vt A B ad B E, ita eſt figura R ad figuram X; *i prop. 1. huius.* ſed *i* parallelogrammum A D ad parallelogrammum B F eſt, vt baſis A B ad baſim B E (cùm ſint inter eaſdem parallelas) Ergo *k* figura R *k prop. 7. lib 3.* ad figuram X eſt, vt parallelogrammum A D ad parallelogrammum B F; eſt verò parallelogrammum A D ęquale figurę R, & parallelogrammum B F ęquale ſpatio S. *l prop. 3. lib. .* *l* Ergo figura R ad figuram X eſt, vt figura R ad figuram S; ideoque *m prop. 4. lib. 3.* figura *m* X ęqualis eſt ſpatio S, & facta fuit figura X ſimilis ipſi R. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

Patet, quòd propoſ. 14. lib. II. Euclidis pars eſt, & comprehenditur in hac vniuerſaliſſima propoſitione. Ibi enim pręcipitur, vt quadratum efficiatur æquale cuilibet ſpatio rectilineo; hic verò ſiue R ſit quadratum, ſiue Polygonum cuiuſcunque ſpeciei, deſcribi poteſt figura X æqualis ipſi S, & ſimilis alteri R.

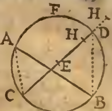
Eucl. 35. 36., 7. III.

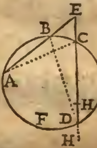
PROPOS. XXII. THEOR. XVII.

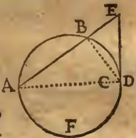
Si in circulo ductę fuerint duæ rectę lineę, ſe ſecantes: parallelogrammum rectangulum, comprehenſum ſub ſegmentis vnius, ęquale erit ei, quod ſub ſegmentis alterius continetur, rectangulo. Et ſi rectangula ſub ſegmentis duarum rectarum, ſe ſecantium, ęqualia fuerint: circuli peripheria per quatuor terminos illarum tranſibit.

In circulo A B F duę rectę lineę ductæ A E B, & D E C ſe ſecent in E (ſiue ambę ſecent circuli peripheriam in duobus pun-

punctis, vt in prima, & ſecunda figura, ſiue vna A E B eam ſecet in duobus punctis A & B, altera verò recta D E C tangat eandem peripheriam in vno puncto à ſignis D, & C expreſſo, vt in tertia figura: ſiue ambę circulum tangant, vt in quarta figura). Dico parallelogrammum rectangulum, contentum ſub vnius ſegmentis A E. & E B, ęquale eſſe rectangulo, ſub alterius ſegmentis D E, & E C contento. Coniungantur rectæ A C, D B. Quoniam duo anguli E D B, & E A C, ęquales ſunt, quia aut a ſunt in eodem ſegmento C F B, vt in prima, & ſecunda figura, aut b angulus E D B continetur à tangente E D, & ſecante B D, reliquus verò angulus E A C in alterno ſegmẽto B F C exiſtit, vt in tertia figura, aut c ambo anguli à tangentibus, & eadem ſecante contenti, æquales ſunt ei, qui in alterno ſegmento B F C effici poteſt, vt in quarta figura; ſuntque anguli d A E C, & D E B ęquales ad verticem, vel vnus, & idem. e Ergo duo triangula A E C, & D E B ſimilia ſunt; & ideo, vt A E ad E C, ita eſt D E ad E B. Quapropter f parallelogramum rectangulum, ſub prima, & quarta proportionalium contentum, ideſt rectangulum A E B, æquale erit rectangulo D E C, quod à ſecũda, & tertia continetur.

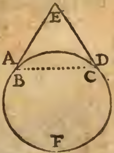






a prop. 14. lib. 2.
b prop. 24. lib. 2.
c prop. 24. lib. 2.
d cor prop. 5. l. 1.
e cor 1. propoſ. 4 huius
f cor. 1 propoſ 14. huius.

Secundo duę rectę A E B, & D E C, ſe ſecantes in E, efficiant rectangula A E B, & D E C ęqualia inter ſe; & per tria puncta A, C, B ducatur g circuli peripheria. Dico eam tranſire per punctum D. Si enim hoc verum non eſt, tranſeat per H citra, vel vltra punctum D. Ergo h rectangulum H E C ęquale erit rectangulo A E B; ſed erat rectangulum D E C ęquale eidem rectangulo A E B. Quare rectangula H E C, & D E C ęqualia ſunt inter ſe, pars, & totum; quod eſt impoſſibile. Non ergo circuli peripheria A C B tranſit per punctum H. Quapropter per puncta A, B, C, D tranſibit. Vt erat propoſitum.



g Sch. prop. 1. l. 2.
h ex prima part huius.

COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt in primo caſu, ſi A B fuerit diameter circuli, & C D perpendicularis ad A B, eſſe quadratum perpendicularis D E ęquale rectangulo A E B, ſub ſegmentis diametri contento. Nam *i* diameter A B ſecat perpendicularem C D bifariam in E; ideoque *k* quadratum D E ęquale erit rectangulo D E C: ſed ex hac propoſitione rectangulum A E B ęquale eſt rectangulo D E C. Ergo quadratum ipſius D E ęquale eſt parallelogrammo rectangulo A E B.

i prop. 3. l. 3. k prop. 34. lib. 1.

COROLLARIVM II.

Conſtat in tertio caſu, quod rectangulum A E B, ſub ſegmentis ſecantis contentum, ęquale eſt quadrato tangentis E D. Quia ſigna C, D exprimunt vnum punctum contactus; & ideo *l* rectangulum C E D ęquale eſt quadrato vnius ęqualium E D, vel E C.

l prop. 34. lib. 1.

COROLLARIVM III.

Similiter conſtat in quarto caſu, quod quadrata tangentium A E, & E D ab eodem puncto cadentium ęqualia ſunt, & tangentes A E, & E D ęquales ſunt, etiam; eo quod ſigna A, B vnum punctum contactus exprimunt, & ſic C, D. Quare rectangula *m* A E B, & C E D ęqualia ſunt quadratis A E, & D E; & propterea (ex coroll. 2. prop. 17. huius) tangentes A E, D E ęquales erunt.

m prop. 34. lib. 1.

COROLLARIVM IV.

Patet etiam, quod ſi quadratum E D ęquale fuerit rectangulo A E B, neceſſariò E D tanget circulum in D; eo quod recta E D non incidit in peripheriam circuli per A, B, & punctum C, ſeu D deſcripti, niſi in vno puncto tãtùm, quod *n* à ſignis D, C exprimitur. Quare *o* E D non ſecat, ſed tangit circulum.

n ex ſecunda parte huius propoſ. o cor. prop. 4. l. 2.

CO-

COROLLARIVM V.

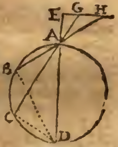
Similiter conſtat ab eodem puncto externo non plures, quàm duas rectas, tangentes circulum, duci poſſe, eo p quod ab externo puncto E duæ rectæ tantummodo æquales inter ſe duci poſſunt.

p prop. 6. lib. 2.

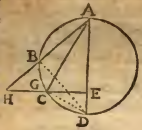
COROLLARIVM VI.

Patet etiam, quòd, ſi à puncto, extra circulum poſito, duæ rectæ çquales in circulum incidant, quarum vna ſit tangens, altera quoque tangens erit.

SCHOLIVM.



Si per verticem diametri circuli quotcunque rectæ lineæ ducantur, ſecantes circuli peripheriam, & rectam ad diametrum perpendicularem: erunt omnia rectangula, contenta ſub ſegmentis cuiuslibet ductarum inter ſummitatẽ, & peripheriam, atq; perpendicularem interceptis, æqualia inter ſe.



In circulo A B C, cuius diameter D A E ducatur a H E perpendicularis ad diametrum D A, eam ſecans in E; & per verticem A ducantur quotcunque rectę lineæ B A H, C A G, D A E, ſecantes circuli peripheriam in B, C, D, & perpendicularem in H, G, E. Dico rectangula D A E, C A G, & B A H æqualia eſſe inter ſe. Coniungantur rectę B D, & C D. Quoniam duo anguli E A G, & D A C ad verticem b æquales ſunt, aut vnum angulum efficiunt; pariterque angulus rectus E ęqualis eſt angulo D C A in c ſemicirculo recto. d Ergo duo triangula G A E, D A C ſimilia ſunt; ideoque D A ad A C eſt, vt G A ad A E. Quare e rectangulum C A G, ſub intermediis proportionalium contentum, æquale erit rectangulo D A E, ſub extremis comprehenſo. Eadem ratione triangula E A H, & B A D ſimilia erunt, & f rectangulum B A H

a prop. 10. lib. 1.

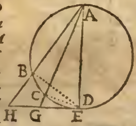
b cor. prop. 5 l 1.

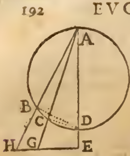
c prop 20. lib 2

d coroll. 1. prop 4 huius

e coroll. 1. prop 14. huius.

f cor 1. prop. 14. huius.



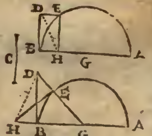


B A H ęquale erit rectangulo D A E. Et propterea omnia rectangula B A H, C A G, & D A E ęqualia erunt inter ſe. Quod erat probandum.

PROPOS. XXIII. PROBL. VI.

Datis duabus rectis lineis, in altera earum punctum intra, aut extra reperire, quod efficiat duo ſegmenta, inter quę reliqua ſit media proportionalis. Oportet autem medietatem rectę lineę, intra quam punctum ſignari debet, non minorem eſſe reliqua.

Sint duę rectę lineę A B, & C debet reperiri punctum intra rectam lineam A B, vt in primo caſu, vel extra eam in directum vt in ſecundo, ita vt recta linea C ſit media proportionalis inter facta ſegmenta; ſed in primo caſu oportet, vt ſemiſſis ipſius A B non minor ſit, quā C. Super diametro A E B
a prop. 10. lib. 1. fiat circulus A E B, cuius centrum G; & a à termino B ducatur B D perpendicularis ad A B, ſeceturque b B D ęqualis ipſi
b prop. 3. lib. 1. C. Poſtea à termino D (in primo caſu) ducatur c recta linea
c cor. prop. 16. lib. 1. D E parallela ipſi A B, quę non cadet extra circulum, eo quod ſemiſſis ipſius A B, ideſt radius, ſeu altitudo ſemicirculi A B ſupponitur ęqualis, aut maior quā C ſeu quā perpēdicularis B D, & propterea D E tanget, aut ſecabit circulū in E: at in ſecūdo caſu coniungatur recta D G ad centrum circuli, ſecans
d prop. 3. lib. 1. peripheriam eius in E. Deinde d ſecetur recta B H ęqualis ipſi D E, coniunganturque rectę E H, D H. Quoniam in duobus triangulis E D H, & B H D facta ſunt duo latera B H, & D E



ęqualia, atque latus H D eſt commune, & anguli comprehenſi E D H, & B H D ęquales ſunt inter ſe
e prop. 29. lib. 1. (eò quod in primo caſu e ſunt alterni in parallelis D E, & B A; in ſecun-
f prop. 6. lib. 1. do verò caſu f ſunt ad baſim trianguli iſoſcelij D G H; propterea quod radijs ęqualibus G B, G E adduntur
g prop. 4. lib. 1. ęquales B H, E D). Igitur g baſis E
h prop. 12. lib. 1. H ęqualis eſt B D, ſeu C; paſiterque angulus D E H ęqualis eſt angulo D B H recto; ideoque h H E perpendicularis eſt ad D E;

D E; & propterea in primo caſu i E H ſecat perpendiculariter quoque diametrum B A ęquidiſtantem ipſi D E; at in ſecundo caſu k H E continget circulum in puncto E. Igitur l parallelogrammum rectangulum A H B ęquale eſt quadrato rectę lineę H E;& ideo m H E, ſeu ei æqualis C media proportionalis erit inter ſegmenta A H, & H B. Vt propoſitum fuerat.

i prop 15. lib. 1. k coroll 1. prop 21 l. 2 lior 1. & 2. prop 22. huius. m coroll. 2. prop. 14. huius.

COROLLARIVM I.

Si datæ fuerint duę rectę lineæ, quarum vna ſit media, reliqua verò ęqualis ſit aggregato extremarum trium proportionalium; vtraque extrema reperiri poteſt ex primo caſu huius propoſitionis.

COROLLARIVM II.

Conſtat etiam, quòd data recta linea ſecari poteſt, vt rectangulum ſub eius ſegmentis contentum ęquale ſit dato quadrato; ſed oportet, vt latus dati quadrati non ſit maius, quàm ſemiſſis datę rectæ lineæ. Nam in primo caſu huius propoſitionis poſita fuit C non maior, quam ſemiſſis A B; & factum fuit rectangulum A H B ęquale quadrato ipſius C.

COROLLARIVM III.

Patet, quòd, ſi duarum linearum rectarum vna ſit media, reliqua verò ſit differentia extremarum trium proportionalium; vtraque extrema reperiri poteſt ex ſecundo caſu huius propoſitionis.

COROLLARIVM IV.

Conſtat etiam, quòd data recta linea produci poteſt, vt rectangulum, excedens ſub producta, & eius productione contentum, ęquale ſit cuilibet dato quadrato. Factum enim fuit rectangulum A H B ęquale quadrato cuiuslibet rectę C datę, in ſecundo caſu huius propoſitionis.

PROPOS. XXIV. PROBL. VII.

Eucl. 28. 29. VI.

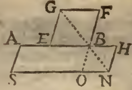
Ad datam rectam lineam dato rectilineo ſpatio, ęquale pa-

rallelogrammum applicare deficiens, aut excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit alteri dato: oportet autem quando parallelogrammum deficiens applicandum eſt, datum ſpatium maius non eſſe parallelogrammo, ſuper dimidia deſcripto, quod ſimile ſit parallelogrammo dato.

Sit datum quodlibet ſpatium rectilineum C, & parallelogrammum D, atque recta linea A B; & ſuper eius medietate E B fiat a parallelogrammum E F ſimile ipſi D. Debet ad rectam A B applicari parallelogrammum æquale ſpatio C, & deficiens (in primo caſu), aut excedens (in ſecundo caſu) parallelogrammo, quod ſimile ſit ipſi D: ſed neceſſe eſt, in primo caſu, vt ſpatium C non ſit maius parallelogrammo E F. Fiat b parallelogrammum R ſimile ipſi E F, & æquale ſpatio C, ſitque K S eius latus homologum ipſi E B: Et quia in



primo caſu, ponitur ſpatium C, ſeu ei æquale parallelogrammum R non maius parallelogrammo E F. c Ergo latus K S æquale, aut minus erit latere ei homologo E B, ſcilicet medietate ipſius A B. Quare recta A B d ſecari poteſt in H, ſicuti in ſecundo caſu e produci poteſt, vt rectangulum A H B æquale ſit quadrato rectæ K S. Poſtea à puncto H ducatur f H N parallela ipſi F B, quæ ſecabitur g à G B diametro parallelogrammi in N, & per N ducatur h O N S parallela ipſi A B, extendaturque quouſque conueniat i cum A S, parallela ipſi B O F, in S. Et quoniam k quadratum ex H B ad rectangulum B H A eſt, vt B H ad H A (cùm habeant communem altitudinem H B); eſtque l parallelogrammum H O ad parallelogrammum S H, vt baſis B H ad baſim H A. m Ergo



parallelogrammum H O ad parallelogrammum S H eſt, vt quadratum ex B H ad rectangulum B H A, ſeu n ad ei æquale quadratum rectæ K S. Eſt autem parallelogrammum E F ad parallelogrammum H O, ei o ſimile circa diametrum communem G B N, vt p quadratum ex E B ad quadratum ex B H. q Ergo ex compoſitione ordinata parallelogrammum E F ad parallelogrammum S H eſt, vt quadratum ex E B ad quadratum rectæ K S; ſed, r vt quadratum ex E B ad

qua-

a prop. 16. huius.
b prop. 21. huius.
c corell. 2. prop. 17. huius.
d corell. 2. prop. 23. huius.
e corell 4. prop 23. huius.
f cor. prop. 16. huius.
g cor prop. 29. lib. 1.
h cor. prop. 16. lib. 1.
i cor prop. 29 lib. 1.
k prop. 1. huius.
l prop. 1. huius.
m prop. 7. lib. 3.
n prop. 3. 3.
o prop. 19. huius.
p prop. 18. huius.
q prop. 19. lib. 3.
r prop. 18. huius.

quadratum rectę K S, ita eſt parallelogrammum E F ad parallelogrammum R, ſeu ſ ad huic ęquale ſpatium C. t Igitur parallelogrammum E F eandem rationem habet ad parallelogrammum S H, atque ad ſpatium C; ideoque u applicatum parallelogrammum S H ęquale eſt ſpatio dato C; x atque deficit in primo caſu, & excedit in ſecundo in figura H O, quę ſimilis eſt ipſi E F, ſeu z parallelogrammo dato D. Quod erat faciendum.

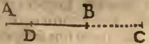
ſ prop. 3. l. 3
t prop 7 l. 5
u prop. 4. lib. 1.
x Def 2. buius.
z cor prop. 16 buius.

PROPOS. XXV. PROBL. XIII.

Eucl. 11. II & 30. VI.

Propoſitam rectam lineam terminatam ſecare in duo ſegmenta, quorum vnum medium proportionale ſit inter totam, & reliquum ſegmentum. Vocetur autem recta, ſic ſecta, ſecundum extremam, & mediam rationem diuiſa.

Data recta A B ſecari debet, vt proponitur. a producatur recta A B in C, vt ipſa A B ſit media proportionalis inter productam A C, eiuſque productionem B C; ſeceturque b B D ęqualis B C: erit C A ad A B vt A B ad B C, ſeu c ad ei ęqualem B D: & diuidendo d C B, ſeu e ei æqualis D B ad B A erit, vt A D ad D B; & propterea ſegmentum B D erit medium proportionale inter totam A B reliquumque eius ſegmentum A D. Quod erat faciendum. Vocetur recta A B hac ratione ſecta in D, diuiſa ſecundum mediam & extremam rationem.



a prop. 13. buius
b prop 3. lib. 1.
c prop. 3. lib. 3.
d prop 13. lib 3.
e prop. 3. lib. 3.

COROLLARIVM.

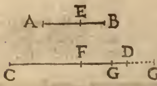
Patet, quòd ſi recta linea ſecta fuerit extrema, & media ratione, atq; ex maiori eius ſegmento detrahatur ſegmentum minus: erit maius ſegmentum ſectum extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius eſt illa, quę prioris lineę minus ſegmentum erat. facta enim fuit tota C A ad A B, vt A B ad B C. & ideo ex hac propoſitione recta A C ſecta erit in B extrema, & media ratione, cuius minus ſegmentum erit B C: poſtea ſecta fuit B D æqualis ipſi B C; & oſtenſa fuit recta A B ſecta extrema & media ratione in D.

Pappi 54. V.

PROPOS. XXVI. THEOR. XVIII.

Si duarum rectarum linearum, in eadem ratione diuiſarum, vna ſit ſecta extrema & media ratione; altera quoque ſimiliter ſecta erit. Et ſi duę rectę, ſingulę ſectę fuerint extrema, & media ratione ambę in eiſdem rationibus ſectę erunt.

Sit A B ſecta in E extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum A E; & vt B A ad A E, ita ſit D C ad C F. Dico C D in F ſectam quoque eſſe extrema, & media ratione. Quoniam B A ad A E eſt, vt D C ad C F: Ergo diuidendo *a* B E ad E A, eſt vt D F ad F C; & inuertendo *b* erit A E ad E B, vt C F ad F D. Et quia A B ſecta eſt in E extrema, & media ratione: Ergo *c* A E ad E B eſt, vt B A ad A E; ſed vt B A ad A E, ita erat D C ad C F. *d* Ergo D C ad C F eſt, vt A E ad E B; fuit autem, vt A E ad E B, ita C F ad F D: Ergo, *e* vt D C ad C F, ita eſt C F ad F D. ideoque C D in F ſecatur extrema, & media ratione.



a prop. 13. lib. 3. b prop. 9. lib. 3. c prop 25. huius. d prop 7. lib. 3. e prop. 7 l. 3

Secundò ſint ſectę duę rectę A B; & C D ambę extrema, & media ratione in E. & F. Dico eas ſecari proportionaliter. Si hoc verum non eſt, ſit C G (maior, vel minor, quam D C) ad C F, vt B A ad A E. Ergo, vt dictum *f* eſt, ſicuti A B in E, ita erit G C in F ſecta extrema, & media ratione; ideoque *g* rectangulum F G C æquale erit quadrato mediæ proportionalis C F; ſed ex hypotheſi C F erat media proportionalis inter F D, & C D. Ergo *h* parallelogrammum rectangulum F D C ęquale eſt quadrato eiuſdem C F. Quare parallerogramma rectangula F G C; & F D C ęqualia inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo aliqua G C maior, vel minor, quàm D C habere poteſt ad C F eandem rationem, quam B A ad A E, ideoque ipſamet D C ad C F erit, vt B A ad A E. Et diuidendo *i* B E ad E A erit, vt D F ad F C, & *k* inuertendo A E ad E B erit, vt C F ad F D. Quare patet propoſitum.

f prim. par. huius. g coroll. 2. prop. 14. huius. h coroll. 2. prop. 14. huius. i prop. 13. l. 3 k prop. 9. l. 3

CO-

COROLLARIVM.

Eucl. 5. XIII.

Ex his duabus propoſitionibus deducitur, quòd, ſi alicui rectę lineę ſecundum extremam, & mediam rationem diuiſe, addatur recta ęqualis maiori ſegmento: compoſita linea ſecundum extremam, & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principiò recta linea. nam in propoſitione 25. ſecta fuit A B in D extrema, & media ratione, & addita B C æquali maiori ſegmento B D, erat B D, ſeu ei æqualis C B ad B A vt A D ad D B: vnde tam A B in D, quàm C A in B in eadem ratione ſecantur; & propterea ex hac 26. propoſitione recta C A in B extremo, & media ratione ſecabitur, ſicuti A B in D extrema, & media ratione ſecta erat.

Finis Libri quarti.

LIBER QVINTVS.

Eucl. lib. IV. 11. & reſid. VI.

DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea inſcribi in circulo dicitur, cùm ſinguli eius anguli tangunt circuli peripheriam. Et circunſcribi dicitur circulo, cùm ſingula figurę latera tangunt circuli peripheriam.

II.

E contra circulus inſcribi dicitur in figura rectilinea, cùm circuli peripheria tangit ſingula latera figurę. Et circunſcribi dicitur, cùm circuli peripheria tangit omnes angulos figurę.



Vt rectilinea figura A B C D dicitur inſcripta circulo, cuius radius A E, quando ſinguli anguli A, B, C, D tangunt peripheriam circuli. Et figura F N dicitur circunſcripta eidem, quando ſingula eius latera F G, G N, N K, K F tangunt peripheriam circuli in punctis B, C, D, A.

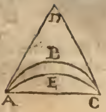
E contra iiſdem poſitis circulus, radij E A, erit inſcriptus in figura F G N K, & circunſcriptus figuræ A B C D.

AXIOMA.

Archimedis de ſphera, & cyl. l. 1.

Si à terminis rectę lineę, ſubtendentis arcum alicuius circuli, ducantur duę rectę lineę, concurrentes extra circulum, & totę extra ipſum poſitæ, vel ſimili modo ducatur vna curua linea: erunt lineæ cõprehendentes maiores peripheria comprehenſa; ſubtenſa verò recta linea minor erit eadem peripheria, ſeu curua.

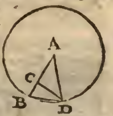
Sit enim circuli peripheria A E C, ſubtenſa verò recta A C, & curua A B C, atque duæ tangentes circulum A D, C D, concurrentes in D, & extra circulum cadentes. Manifeſtum eſt rectam A C minorē eſſe peripheria A E C, nec non curua A B C, cū recta ſit omnium breuiſſima: & A E C minorem eſſe quàm A B C, & A B C minorem eſſe, quàm A D C. eo quod A E C minùs recedit à rectitudine, quàm A B C, & hęc minùs, quàm A D C.



PROPOS. I. PROBL. I.

Ad datam rectam lineam, atque ad eius punctum, angulum deſcribere, qui quinta pars ſit quatuor rectorum.

Ad datam rectam A B, atque ad eius punctum B angulus ef-
fici debet, qui ſit quinta pars quatuor rectorum. Secetur *a* re- *a prop. 25.*
cta linea A B extrema, & media ratione in C, cuius maius ſeg- *lib. 4.*
mentum ſit A C; & centro A, interuallo A B circulus B D de-
ſcribatur, in quo applicetur, *b* recta B D ęqualis maiori ſeg- *b prop. 12.*
mento A C. Dico angulum A B D eſſe quæſitum. Iungantur *lib 2.*
rectę A D, & C D. Quoniam *c* tres rectæ B A, A C, & C B pro- *c prop. 29.*
portionales sūt, & eſt B D ęqualis A C, atq; radius A D ęqualis *lib. 4.*
A B. Ergo in triangulis A B D, & D B C circa *d* ęquales angu- *d prop. 6.*
los A D B, & B, ſubtenſos à radijs æqualibus, eſt A B, ſeu ei *lib. 1.*
æqualis A D ad D B, vt D B ad B C. Quare *e* angulus C D B æ- *e prop. 6.*
qualis eſt angulo A; & eſt A C ad C B, vt B A ad A C, ſeu vt *lib 4.*
A D ad D B: Ergo *f* angulus A D B, ſeu ei ęqualis B, duplus eſt *f prop. 3.*
anguli C D B, ſeu anguli A. Ergo qualium partium angulus *lib 4.*
A eſt vna, erit B duæ partes, & D pariter duę. Quare anguli
A, B, & D, ſimul ſumpti, (qui *g* ęquales ſunt duobus angulis *g prop. 18.*
rectis) æquales erunt quinque angulis, quo- *lib. 1.*
rum quilibet ęqualis eſt ipſi A; ideoque angu-
lus A quinta pars erit duorum rectorum. Sed
quam proportionem duplam habet angulus
B ad angulum A, eandem habent quatuor re-
cti ad duos rectos: Et permutando *h* angulus *h prop. 12.*
B ad quatuor rectos erit, vt angulus A ad *lib. 3.*
duos rectos; ſed angulus A quinta pars eſt
duorum rectorum. Ergo *i* angulus B quinta pars eſt quatuor *i Def 8 l 5*
rectorum. Vt erat propoſitum.



Eucl. 10. IV

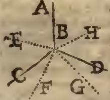
COROLLARIVM.

Hinc patet, qua ratione triangulum Iſoſcelium conſtitui debeat, in quo quilibet angulorum ad baſim duplus ſit anguli verticalis.

PROPOS. II. PROBL. II.

Angulum reperire, qui ſit quintadecima pars quatuor rectorum.

Effici debet angulus, qui ſit vna pars, earum, qualium quatuor recti in quindecim partes ęquales diuidũtur. Fiat *a* angulus A B C duplus vnius anguli trianguli ęquilateri. Et quia, vt duo recti ad quatuor rectos, ita eſt angulus vnius trianguli ęquilateri ad angulum A B C, vtręque enim rationes ſunt, ſubduplę; & permutando, *b* vt duo recti ad vnum angulum trianguli ęquilateri, ita ſunt quatuor recti ad angulum A B C: eſt *c* vero vnus angulus trianguli æquilateri tertia pars duorum rectorum: Ergo angulus A B C tertia pars eſt quatuor rectorum. Fiat rurſus angulus C B D tertia pars quatuor rectorum, ideſt *d* æqualis ipſi A B C. Et quia *e* anguli omnes A B C, C B D, & D B A circa punctum B æquales ſunt quatuor rectis, ſuntq; duo anguli A B C, C B D duę tertię partes quatuor rectorũ, ergo reliquus angulus A B D tertia pars quoque erit quatuor rectorũ. Poſtea fiant *f* anguli A B E, E B F, F B G, G B H qui ſinguli æquales ſint quintæ parti quatuor rectorum: erit, vt antea, quintus angulus H B A ęqualis prioribus, & quinta pars quatuor rectorum. Et quoniã angulus A B F æqualis eſt angulo A B G, cum vterq; ęqualis ſit duabus quintis quatuor rectorum: Suntque duo anguli A B C, & A B D æquales quoque. Ergo reſidui anguli C B F, & D B G ęquales erunt. Deinde quia ab ęqualibus angulis A C B, & C B D auferuntur ęquales anguli A B E, & F B G: Ergo reſiduus angulus E B C ęqualis eſt duobus reſiduis angulis C B F, & G B D; ſunt verò oſtenſi anguli C B F, & G B D ęquales inter ſe. Ergo angulus E B C duplus eſt anguli C B F; & totus angulus E B F triplus eſt anguli C B F. Eadem ratione tam angulus A B E,



a prop. 24. lib. 1.
b prop. 12. lib 3.
c Coroll. 5. prop. 18. lib. 1.
d prop. 24. lib 1.
e coroll. 2 prop. 13. l. 1.
f prop. 10. huius.

quàm

quàm A B H, quàm H B G, & quàm F B G æqualis eſt triplo anguli C B F. Quare omnes anguli F B E, E B A, A B H, H B G, G B F, ſimul ſumpti, quinquies ſummam trium angulorum æqualium vni C B F, ideſt decies & quinquies angulum C B F continebunt. Et propterea angulus C B F, decies & quinquies ſumptus, æquatur angulis omnibus circa punctum B, ideſt g quatuor rectis. Quod erat faciendum. g *coroll. 2. prop. 13. l. 1*

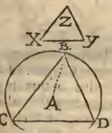
PROPOS. III. PROBL. III.

Eucl. 2. 6. 11. 15. 16. IV.

Intra datum circulum triangulum dato triangulo æquiangulum, & polygonum æquilaterum, & æquiangulum trium, quatuor, quinque, & quindecim laterum, & quodlibet aliud, quod ex continua duplicatione laterum eorundem polygonorum conſurgit, inſcribere. Vocentur autem huiuſmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ: figuræ Regulares.

In circulo B C D, cuius radius A B inſcribendæ ſunt figuræ imperatæ. Et primò triangulum, quod ſit æquiangulum dato triangulo Z X Y. Abſcindatur a circuli ſegmentum B D C, capiens angulum æqualem ipſi angulo Y, & iungatur recta B C, & in oppoſita parte abſcindatur b ſegmentum B C D, capiens angulum æqualem angulo X, & coniungantur rectæ B D, & C D. Patet angulum D æqualem eſſe angulo Y, & angulum C æqualem eſſe ipſi X; ideoque c triangulum inſcriptum circulo B C D æquiangulum erit triangulo dato Z X Y.

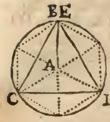
a *prop. 26. lib. 2.*
b *prop. 26. lib. 2.*
c *coroll. 1. prop. 4. l. 4.*



Secundò pro triangulo æquilatero, & æquiangulo diuidantur, (vt in præcedenti factum eſt) omnes anguli ad centrum, ideſt quatuor recti, in tres angulos B A C, C A D, & D A B qui ſinguli ſint æquales tertiæ parti quatuor rectorum; pro quadrato verò fiant d quatuor anguli ad centrum B A C, C A D, D A E, & E A B, ſinguli æquales quartæ parti quatuor rectorum, ſeu recti; Atque pro pentagono fiant e quinque anguli B A C, C A D, D A E, E A F, & F A B, ſinguli æquales quintæ parti quatuor rectorum; Tandem pro quintidecagono ad centrum fiant f quindecim anguli B A C, C A D, D A E, E A F, &c. ſinguli æquales decimæquintæ

d *prop. 10. lib. 1.*
e *prop. 1. huius.*
f *prop. 2. huius.*

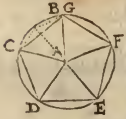
 parti



parti quatuor rectorum. Manifeſtum eſt in qualibet ex his diuiſionibus angulos circa centrum diſtribui in partes ęquales. At in omnibus producantur radij A B, A C, A D, &c. vſque ad circuli peripheriam in punctis B, C, D, &c. & coniungantur rectę B C, C D, D E, &c. quouſque compleantur figuræ. Oſtendendum eſt omnia prædicta polygona eſſe ęquilatera, & ęquiangula. Quoniam omnes anguli B A C, C A D, &c. verticales ad centrum A ęquales facti ſunt, & radij omnes ſunt pariter ęquales. Ergo [g] omnia triangula iſoſcelia B A C, C A D, D A E, &c. ſunt ſimiliter ęqualia, ęquè alta, & ęquiangula inter ſe, & eorum baſes B C, C D, D E, &c. ęquales erunt. Quare figura B C D E F &c. ęquilatera erit. Et quia anguli omnes ad baſes iſoſcelium, vt ſunt B C A, A C D, C D A, A D E, &c. ęquales oſtenſi ſunt: Ergo bini binis ęquales erunt; ideoque angulus B C D ęqualis erit angulo C D E, & ſic reliqui omnes. Quare quęlibet figura B C D E &c. circulo inſcripta, ęquiangula eſt, & æquilatera.

g prop. 4. lib. 1.





h prop. 8. lib. 1.

Poſtea patet, quod ſi in qualibet ex dictis figuris diuidantur omnes [h] anguli ad centrum bifariam, & rurſus bifariam, & ſic vlterius, atque in peripheria circuli rectæ, ſubtendentes æquales angulos ad centrum, ducantur quouſque figuræ compleantur, deſcriptæ erunt aliæ figuræ æquilateræ, & æquiangulæ; & ſic in triangulo æquilatero ex bibartita diuiſione trium angulorum B A C, C A D, D A B conſurget figura hexagona, ſecundò figura duodecim laterum, tertiò figura viginti quatuor laterũ, & ſic vlterius. In quadrato verò ex bipartita diuiſione angulorum ad centrũ cõſurgit figura octo laterum, poſtea ſexdecim, poſtea duorum & triginta, &c. At in pentagono conſurgit primò figura decem laterum, poſtea viginti,



poſtea quadraginta laterum,&c. Tandem in quintidecagono conſurgit figura triginta laterum, poſtea ſexaginta, &c. quæ omnes, vt prius oſtendentur æquilateræ, & æquiangulæ, vt eſt imperatum. Vocentur autem huiuſmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ, Regulares figuræ.

COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt rectas lineas omnes, quæ ducuntur à centro circuli ad angulos polygoni regularis, circulo inſcripti, æquales eſſe inter ſe, & bifariam ſecare angulos figuræ; eo quod radij ſunt eiuſdem circuli.

COROLLARIVM II.

Rurſus rectę omnes, quæ à circuli centro perpendiculariter ad latera polygoni ducuntur, ęquales ſunt inter ſe; eo quod in circulo polygoni latera, ęqualia inter ſe, *i* diſtant ęqualiter à centro; & propterea centrum circuli erit quoque centrum polygoni inſcripti. Vocentur autem huiuſmodi perpendiculares Radij figurę regularis. *i prop. 10. lib. 2.*

COROLLARIVM III.

Conſtat etiam polygonum regulare diſtribui in tot triangula iſoſcelia æquiangula, & æquilatera inter ſe, verticem habentia in centro circuli quot ſunt polygoni latera.

COROLLARIVM IV.

Manifeſtum eſt etiam quodlibet polygonum ęquilaterum, circulo inſcriptum, eſſe quoque ęquiangulum. Nam *k* latera ęqualia auferunt peripherias ęquales ideoque, *l* ſubtendunt angulos ęquales ad centrum & propterea, vt in hac propoſitione dictum eſt, efficiunt figuram ęquiangulam. *k coroll. 1. prop 18. l. 2. l coroll. 1. prop. 17. lib. 2.*

SCHOLIVM.

Facilè deducitur, quòd latus hexagoni regularis æquale eſt radio circuli, in quo figura in cripta eſt. Nam hexagonum diuiditur m *in ſex triangula iſoſcelia, verticem habentia in centro circuli, & figuræ, & eſt quilibet* *m coroll. 3. huius prop.*

libet angulus ad centrum tertia pars duorum rectorum: eo quod ſex ęqua-
n prop. 18. lib 1. *les anguli ad centrum quatuor rectis ſunt æquales. Ergo n reliqui duo an-*
guli ad baſim cuiuslibet trianguli iſoſcelis æquales ſunt duabus tertijs
o prop. 6. lib. 1. *duorum rectorum. Et propterea o quilibet eorum tertia pars erit duorum*
rectorum. Quare triangulum quodlibet eorum, in quæ diſtribuitur he-
p prop 20. lib. 1. *xagonum eſt ęquiangulum; ideoque p ęquilaterum erit. & propterea la-*
tus trianguli, ſeu circuli radius, æqualis erit baſi, ſeu lateri hexagoni.

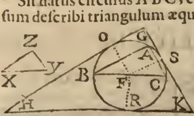
Notandum eſt non eſſe adhuc repertam artem deſcribendi intra circu-lum polygonum regulare cuiuſcunque multitudinis laterum, vt heptago-ni, nonecagoni, vndecagoni, &c. & propterea vocabimus polygona re-gularia, ſuperius expoſita (breuitatis gratia): Polygona regularia notæ deſcriptionis.

Eucl 7.12. IV.

PROPOS. IV. PROBL. IV.

Circulo dato triangulum dato triangulo æquiangulum, & quodlibet polygonum regulare notę deſcriptionis circunſcribere.

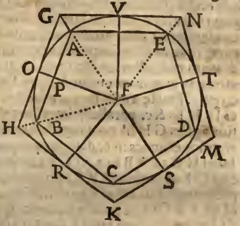
Sit datus circulus A B C, cuius centrum F. debet circa ipſum deſcribi triangulum æquiãgulum dato triangulo Z X Y,



& quodlibet polygonum regulare notę deſcriptionis. In-
a prop. 3. huius. ſcribatur a triangulum A B C ęquiangulum ipſi triangulo Z X Y, aut polygonum tot laterum, quot petuntur; & à cen-
b prop. 11. lib. 1. tro F ducantur b perpendiculares F O, F R, F S &c. ſuper latera A B, B C, &c. quę ſecent peripheriam in punctis O, R,
c Coroll. 2. prop 11. lib 2 S, &c. & per hęc puncta ducantur c circulum tangentes, H G, G K. &c. quouſque compleantur figurę circunſcriptę; cumq;
eiſdem tangentibus d perpendiculares ſint ijdem radij, e ergo
d prop. 23. lib 2. A B, & G H parallelæ erunt, pariterque B C, H K, & ſic reliquæ ęquidiſtabunt: ideoque f efficient angulum G H K ęqua-
e prop. 16. lib. 1. lem angulo A B C. Et ſimiliter angulus G oſtendetur ęqualis
f cor 1. prop. 7 l. 4. angulo A, & angulus K ęqualis oſtendetur angulo C, & ſic reliqui. Quare triangulum, circunſcriptum circulo G H K, ęquiangulum eſt triangulo dato Z X Y, & figura circunſcripta G H K N ęquiangula eſt; cùm eius anguli ęquales ſint angulis figurę regularis inſcriptæ A B C E.

Poſtea in polygonis, ductis rectis F G, & F A, quia in triangulis

gulis G O F, & V G F duo g latera G O, & G V æqualia ſunt, cùm ſint latera ęqualium quadratorum ex tangentibus, ab eodem puncto ductis, & radij F O, F V, inter ſe ęquales, atque latus F G commune: Ergo h anguli O G F, & V G F ſunt inter ſe ęquales; Sed i recta F A diuidit quoque bifariam figurę inſcriptę angulum B A E, & eſt angulus B A E ęqualis oſtenſus angulo H G N: Ergo eorum ſemiſſes, ſcilicet anguli H G F, & B A F ęquales ſunt; eſtque H G parallela ipſi B A; Ergo k G F parallela eſt ipſi A F, & conueniunt in F: l Ergo vna, & eadem recta linea eſt F A G, ex centro per angulos vtriuſque figuræ tranſiens. Eadem ratione rectę lineę erunt F B H, F C K, F D M, & F E N, quę à centro per angulos vtriuſque figurę extenduntur. Deinde quia B A parallela eſt H G, baſi trianguli H F G: Ergo m A B ad G H eſt, vt B F ad F H. Eadem ratione B C ad H K eſt, vt eadem B F ad eandem F H; ideoque, n vt B A ad H G, ita eſt B C ad H K: & ſunt antecedentes B A, & B C ęquales in polygono inſcripto regulari. Ergo o & conſequentes H G & H K ęquales ſunt inter ſe. Eadem ratione reliqua latera K M, M N, N G equalia erunt inter ſe, & ipſis G H, H K. Quare figura G H K N ęquilatera eſt; ſed prius erat ęquiangula. Ergo p figura circunſcripta G H K N regularis eſt. Quod erat faciendum.



g corol. 3. prop. 22. l. 4
h prop. 7. lib. 1.
i coroll. 2. prop. 3. huius.
k coroll. 2. prop. 7 l. 4.
l cor. prop. 17. l. 1.
m coroll. 1. prop 6. l. 4.
n prop 7. l. 3
o coroll. 1. prop. 10. l. 3
p prop. 3. huius.

COROLLARIVM I.

Patet etiam, quòd rectę omnes extenſę à centro circuli ad angulos figurę regularis circunſcriptę, diuidunt angulos figurę bifariam. Oſtenſum enim fuit rectam F G ſecare angulum figurę H G N bifariam.

COROLLARIVM II.

Patet, quod, ſi omnes anguli ad centrum circuli, vel eius peripheria diſtributa fuerit in quotlibet partes ęquales ternario plures, & rectę puncta diuiſionum coniungentes, intra circulum ducantur, nec non rectę circulum tangentes parallelę rectis coniunctis producantur: deſcripta erunt duo polygona regularia parium laterum ſimilia inter ſe, alterum circunſcriptum, alterum verò circulo inſcriptum. Eritque circunſcriptum ad inſcriptum, vt quadratum radij vnius ad quadratum radij alterius; & vt quadratum rectę lineę ex centro, vſque ad angulum circunſcriptę figurę ad quadratum radij circuli. Ductę enim fuerunt in hac propoſitione tangentes G H, H K, &c. parallelę lateribus A B, B C, &c. & oſtenſa fuit figura G H M ęquiangula figurę A B C D, & latera circa angulos ęquales in eadem proportione ęqualitatis; & rurſus latus H G ad A B fuit, vt G F ad circuli radium F A, vel vt radius O F ad radium F P. Et propterea ſ ſuper his lateribus proporttionalibus erunt figurę ſimiles, & ſimiliter poſitę G H K M ad A B C D, in eadem ratione, quam habet quadratum ex F G ad quadratum radij F A, vel vt quadratum ex O F ad quadratum ex F P. Vocentur autem huiuſmodi figurę (breuitatis gratia) circulo adſcriptę.

ſ prop. 18. lib. 4.

S C H O L I V M.

Duo polygona regularia parium laterum ſimilia ſunt inter ſe.

Habeant duo polygona regularia A B D, & G H N ęquales multitudines laterum. Dico polygona eſſe inter ſe ſimilia. Quia t omnes anguli interni, tam polygoni A B D, quàm polygoni G H N ſunt æquales tot binis rectis (demptis quatuor) quot ſunt eius latera: Suntque ex hypotheſi tot latera in vno, quot in altero polygono. Ergo u omnes anguli polygoni A B D, ſimul ſumpti: ęquales ſunt omnibus angulis polygoni G H N, ſimul ſumptis: ſummę verò prædictorum angulorum, in vnoquoque polygono regulari diſtributæ ſunt in angulos æquales (cùm regulare polygonum ſit ęquiangulum): Ergo quilibet angulus A polygoni A B D ęqualis eſt cuilibet angulo G polygoni G H N. Cumque circa prædictos angulos ęquales latera habeant eandem rationem ęqualitatis (cùm regulare polygonum ſit ęquilaterum). Ergo x polygona regularia A B D, G H N ſimilia inter ſe ſunt.

t Schol. 2. prop. 8. l. 1.

u coroll. 9. prop. 18 l. 1

x prop. 16. lib. 4.

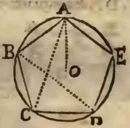
PRO-

PROPOS. V. PROBL. V.

Eucl 9.14. IV.

Circa quodlibet polygonum regulare circulum deſcribere.

Sit quodlibet polygonum regulare A B D. Debet circa ipſum deſcribi circulus. Ducta recta A C, circa triangulum A B C, deſcribatur a circulus, cuius centrum O;& coniungatur recta linea B D. Et quia in duobus triangulis A B C, & D C B duo latera A B,& D C ęqualia ſunt, cùm ſint latera regularis figuræ, & latus B C eſt commune, atque anguli A B C & D C B ęquales ſunt inter ſe: Ergo b anguli B A C, & C D B æquales ſunt inter ſe, & inſiſtunt ſuper eadem recta B C, ad eaſdem partes conſtituti: Ergo c circunferentia circuli, cuius centrum O, per tria puncta A, B & C ducta, tranſibit quoque per quartum punctum D. Eadem ratione peripheria circuli, cuius centrum O, quę tranſit per tria puncta B, C & D, tranſibit quoq; per punctum E, & ſic per reliqua. Quare d circulus, radio O A deſcriptus, circunſcriptus erit polygono A B C D E. Quod erat faciendum.



a Sch prop. 1. lib. 2.
b prop. 4. lib. 1.
c prop. 14. lib. 2.
d Def 2. huius.

COROLLARIVM.

Patet idem punctum O eſſe centrum circuli, & polygoni regularis, in eo inſcripti, punctum intermedium ęquè remotum ab omnibus angulis eius.

PROPOS. VI. PROBL. VI.

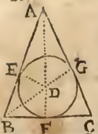
Eucl. 4. 8. 13 IV.

Intra triangulum, & intra quodlibet polygonum regulare circulum inſcribere.

Sit quodlibet triangulum, aut polygonum regulare A BC. Debet inſcribi circulus in his figuris. Et primò in triangulo ſecentur a anguli A, & B biſariam à rectis A D, & B D, quæ con-

a prop. 8. l. 1

b prop 11. lib. 1.



concurrent intra triangulum, vt in D, *b* à quo cadant perpendiculares D E, D F, & D G ſuper trianguli latera. Quoniam in triangulis D B F, & D B E duo anguli ad B ęquales facti ſunt, & duo anguli ad E & F ſunt recti ęquales quoque, atque latus D B eſt commune, & oppoſitum rectis angulis: Ergo *c* D F æqualis eſt ipſi D E. Eadem ratione in triangulis D E A, & D G A, erunt latera D G, & D E ęqualia inter ſe. Quare ęquales erunt tres perpendiculares D F, D E, & D G inter ſe, quę ſunt diſtantię puncti D à lateribus trianguli.

c prop. 25. lib. 1.

d prop. 5. huius. *e prop. 10. lib. 2.*

Secundò in polygono regulari circumſcribatur *d* circulus, cuius centrum D. Et quia in circulo A B N rectæ lineæ applicatę A B, B C, C N, &c. ſunt inter ſe ęquales: ergo *e* æqualiter diſtant à centro D; ideoque ductę perpendiculares D G, D E, D F, &c. ęquales erunt inter ſe, vt æquales erant in triangulo.



Et centro D radio D E, deſcripto circulo E F G, tranſibit neceſſariò per puncta F, G, &c. & continget *f* latera figurarum in punctis E, F, G, &c. eo quod radij D E, D F, D G, &c. perpendiculares ſunt ad latera A B, B C, &c. Quare *g* circulus E F G inſcriptus eſt figuræ A B C. Quod erat faciendum.

f prop. 23. lib. 2.

g Def. 2. huius.

COROLLARIVM.

Patet idem punctum D eſſe centrum circuli, atque punctum æquè remotum à lateribus polygoni regularis circulo inſcripti.

PROPOS. VII. THEOR. I.

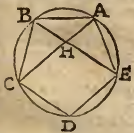
Eucl 8. XIII.

In pentagono regulari duæ rectę lineæ ſubtendentes angulos figurę ſe mutuò ſecant extremà, & media ratione; & maiora illarum ſegmenta ęqualia erunt pentagoni lateri.

Sit pentagonum regulare A B D, & duę rectæ lineæ A C, B E ſubtendant angulos figurę A B C & B A E, & ſe ſecent in H. Dico tam C A, quàm E B ſecari in H extrema, & media ratione, & earum maiora ſegmenta C H, & E H æqualia eſſe

cuili-

cuilibet lateri pentagoni B A. Deſcribatur [a] circulus A B D circa pentagonum. Quoniam [b] in quadrilatero B E D C, circulo inſcripto duo oppoſiti anguli C B E, & D, ſimul ſumpti, ęquales ſunt duobus rectis: eſtque [c] angulus B C D ęqualis angulo D in regulari pentagono: Ergo duo anguli E B C, & B C D, ſimul ſumpti, ęquales ſunt duobus rectis; ideoque [d] duę rectę B E, & C D ſunt inter ſe parallelę. Eadem ratione C A, & D E parallelę ſunt. Quare [e] C H E D parallelogrammum erit, in quo latera oppoſita C H, & D E ęqualia erunt, & ſic H E ipſi C D, vel cuilibet B A ęquale erit. Poſtea quia anguli B A C, & A E B inſiſtunt peripherijs æqualibus B C, & A B: ergo [f] anguli B A C, & A E B ęquales ſunt; eſtque angulus A B E communis: Ergo [g] triangula E B A, & A B H ſimilia ſunt; ideoque E B ad B A erit, vt A B ad B H: fuit autem oſtenſa H E ęqualis ipſi B A. Ergo [h] tota B E ad H E eſt, vt H E ad H B; ideoque [i] B E ſecta eſt in H extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum H E ęquale eſt ipſi B A lateri pentagoni. idem concludetur de ſubtenſa C A. Quare patet propoſitum.

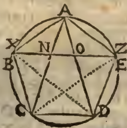


a prop. 5. huius.
b prop. 15. lib. 2.
c prop. 3. huius.
d prop. 16. lib. 1.
e prop. 26. lib. 1.
f coroll. 1. prop. 17. lib. 2.
g coroll. 1. prop. 4. lib. 4.
h prop. 3. et 7. l. 3.
i prop. 25. lib. 4.

S C H O L I V M.

Si in pentagono tres rectę, angulos ſubtendentes, ęquales fuerint, et intermedia ſecuerit collaterales extrema, et media ratione, quarum maiora ſegmenta ad eaſdem partes aqualia ſint baſi, atque vtrinque relinquat portiones ęquales: erit tale pentagonum regulare.

In pentagono A B C D E ſint tres ſubtenſę C A, B E, A D aquales, et ſubtenſa B E ſecet A C, A D in N, O extrema et media ratione, vt maiora ſegmenta C N, D O ęqualia ſint C D, atque E O, B N ſint ęquales. Dico pentagonum A B D regulare eſſe. Quoniam in triangulo A C D [a] Iſoſcelio propter ęqualitatem laterum A C, A D eſt baſis C D ęqualis maiori ſegmento C N lateris A C extrema, et media ratione diuiſi. Ergo, vt in propoſitione prima huius oſtenſum eſt, erit angulus A C D duplus anguli verticalis C A D. Eadem ratione angulus A D C duplus erit anguli C A D. Circunſcribatur [b] iam circulus triangulo A C D, et [c] ſecentur anguli A C D, A D C biſariam à rectis C Z, D X, quæ ſecent



a prop. 6. lib. 1.
b Sch. prop. 1. l. 2.
c prop. 8. lib. 1.

peripheriã in punctis Z, X; & coniungantur rectæ A X, X C, D Z, Z A, & X Z, patet angulos C A D, C D X, X D A, A C Z, Z C D ad peripheriam circuli æquales eſſe, & ideo d peripheriç abſciſſæ, & e rectæ ſubtenſæ æquales erunt: vnde f pentagonum A X C D Z regulare erit, g & ſubtenſa X Z æqualis erit ipſis A C, A D, ideoque ipſi B E; h ſecabitque ſubtenſas A C, A D, & viciſſim ab eis ſecabitur extrema, & media ratione, & maiora ſegmenta ęqualia erunt ipſi C D, & inter ſe; & i ideo minora ſegmenta X N, O Z ęqualia erunt; ſed ex hypotheſi B E ſimiliter ſecabat eaſdem ſubtenſas A C, A D in N, O. Ergo X Z tranſit per puncta N, O; & propterea ablata portione N O communiter ab ęqualibus B E, X Z erunt duæ reſiduę B N, O E ęquales duabus reſiduis X N, O Z ſimul ſumptis, & B N ſemiſſis priorum ęqualis erit X N ſemiſſi poſteriorum: quare punctum B cadet in X. Et eadem ratione punctum E cadet in Z: vnde figuræ A B D E, & A X D Z ſibi mutuò congruent; & ideo figura A B C D E regularis quoque erit. Quod erat, &c.

d corоll 1. prop 16. l 2. — e cor. prop. 18 l. 2. — f cor 4. prop. 3. huius. — g cor. prop. 18. lib. 2. — h prop. 7. huius. — i prop. 26. l 4 & cor 1 prop 16. l. 3

Eucl. 9. XIII.

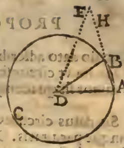
PROPOS. VIII. THEOR. II.

Si figurarum regularium eodem circulo inſcriptarum lateri hexagoni addatur, vel tollatur, latus decagoni: efficietur recta linea extrema, & media ratione ſecta, maiuſque compoſitę ſegmentum erit hexagoni latus, & maius ſegmentum diminutę erit latus decagoni.

In circulo A B C ſit recta linea A B latus decagoni regularis, & ei in directum addatur B E ęqualis radio eiuſdem circuli, & proinde a ęqualis lateri hexagoni regularis eidem circulo incriptibilis. Dico rectam A E ſecari in B extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit E B. Ducantur rectę ex centro D A, D B, & D E. Quoniam b angulus ad centrum A D B, cui ſubtenditur A B latus decagoni regularis, decima pars eſt quatuor rectorum, ſiue quinta pars duorum rectorum; ſuntque c tres anguli trianguli iſoſcelij A D B ęquales duobus rectis: Ergo quilibet angulus D B A ad baſim ęqualis eſt duabus quintis duorum rectorum; & propterea angulus D B A duplus eſt anguli A D B. ſed d angulus A B D externus in triangulo D B E ęqualis eſt duobus internis, & oppoſitis angulis B D E, & E (qui e ſunt ęquales, cùm ſubtenſa latera E B, D B ęqualia ſint, facta enim fuit E B ęqualis radio circuli). Ergo angulus A B D duplus eſt anguli E, vti prius duplus erat anguli A D B & propterea anguli E, & B D A æquales inter ſe

a Sch prop. 3. huius. — b prop. 3. huius. — c prop 18. lib. 1. — d prop. 18. lib. 1. — e prop. 6. l. 1

ſunt, & eſt angulus A communis: f Ergo duo triangula E D A, & D B A ſimilia ſunt, ideoque E A ad A D eſt, vt D A ad A B; eſtque E B æqualis radio D A: Ergo ſicut prius A D, ita nunc E B media proportionalis erit inter E A, & B A; proptereaque g E A ſecta erit in B extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit E B latus hexagoni, & B A minus ſegmentum latus decagoni regularium in eodem circulo inſcriptorum. f cor. 1. prop. 4. lib. 4. g prop. 25. lib. 4.

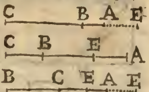


Secundò ex latere hexagoni E B, ſiue ex radio circuli auferatur recta B H æqualis ipſi B A lateri decagoni eiuſdem circuli. Dico E B ſecari in H extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit B H latus decagoni. Nam ex E B maiori ſegmento ipſius E A, ſectæ extrema, & media ratione, tollitur B H ſegmento minori B A æqualis. Ergo h ipſa B E ſecatur quoque extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius erit B H. Quod erat oſtendendum. h cor. prop. 25 l. 4.

SCHOLIVM.

Si lineæ rectæ diuiſæ extrema, & media ratione fuerit maius ſegmentum latus hexagoni, erit reliquum ſegmentum latus decagoni regularium, ab eodem circulo comprehenſorum; & ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni, erit reliquum latus hexagoni: Et ſi maius ſegmentum fuerit latus decagoni, erit tota latus hexagoni.

Sit recta C A B ſecta extrema, & media ratione. Et primò C B ſegmentum maius ſit latus hexagoni: Secundò C B ſegmentum minus ſit latus decagoni: Tertiò B C ſegmentum maius ſit latus decagoni: Dico in primo caſu B A eſſe latus decagoni; in ſecundo verò, & tertio B A erit latus hexagoni. Si hoc verum non eſt ſit B E latus decagoni in primo caſu, & latus hexagoni in ſecundo, & tertio caſu: erit i *recta C B E ſecta extrema, & media ratione; ſed ex hypotheſi C B A ſecatur extrema, & media ratione:* k *Ergo ambæ ſecantur in eadem ratione: Ideoque C B ad B E erit, vt C B ad B A. Quare* l *B E, & B A æquales ſunt, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Quare patet propoſitum.* i prop. 8. huius. k prop. 26. lib. 4. l prop. 4 l. 3

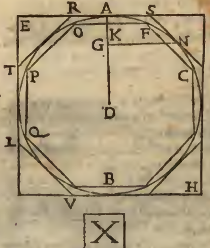


PROPOS. IX. PROBL. VII.

Archim. prop. 2. l. 1. de ſphær. & cylindro.

Circulo dato adſcribere duas figuras regulares inter ſe ſimiles, ita vt circunſcriptę, vel inſcriptæ differentia à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita.

Sit datus circulus A B C, & quęlibet ſuperficies X cuiuſcunque paruitatis. Debent circulo adſcribi imperatę figurę. Circunſcribatur *a* circulo A B C quadratum E H, & ad contactum A coniungatur radius D A; & vt factum *b* quadratum ęquale ſpatio X vna cum quadrato E H eſt ad quadratum E H. ita *c* fiat quadratum radij A D ad quadratum rectæ lineę D G, & ducatur *d* à puncto G recta G N perpendicularis ad diametrum, ſecans peripheriam in N. ſeceturque *e* ſemicirculi peripheria A C B bifariam, & rurſus bifariam. & ſic ſemper, quouſque *f* arcus A F minor ſit, quàm A N; et ſecetur *g* arcus A O ęqualis A F, coniunganturque recta F O, quę *h* ſecabitur à radio A D in K bifariam, & perpendiculariter. Et quia tres rectę S A, F K, N G perpendiculares ſunt ad radium D A, erunt *i* inter ſe parallelę: cadit verò punctum F inter extremas parallelas A S, G N, eo quod arcus N A maior eſt, quã F A: Ergo punctum K cadit inter puncta A, & G; & propterea recta D K maior erit, quàm D G; & ſicut A F metitur ſemiperipheriam A F B, ita *k* O F duplum ipſius A F metietur totam circuli peripheriam. Diſtribuatur iam tota circuli peripheria in partes C F, F O, O P, P Q, &c. inter ſe equales; & coniungantur rectæ lineę C F, F O, O P, P Q, &c. atque *l* ijs parallelę ducantur tangentes S R, R S, T L, &c. quouſque compleantur figurę *m* regulares ſimiles, circunſcripta S R T V, inſcripta verò C F O P B. Patet figuram S R T V ad figuram C F O P B eſſe, vt quadratum radij illius D A ad quadratum radij D K huius;



a prop. 4. huius.
b prop. 21. l. 4.
c cor. 1. prop. 18. l. 4.
d prop. 10. l. 1.
e cor. prop. 19. l. 2.
f ſch. prop. 27. l. 2.
g cor. 4. prop. 16. l. 2.
h prop. 19. l. 2.
i prop. 14. l. 1.
k Ax. 1. l. 3.
l cor. prop. 16. l. 2.
m coroll. 2 prop. 4. huius.

huius; ſed *n* idem quadratum ex D A ad quadratum ex maiori D K minorem rationem habet, quàm ad quadratum ex minori D G, & vt quadratum ex D A ad quadratum ex D G, ita erat ſumma ſpatii X, & quadrati E H ad quadratum E H: Ergo *o* figura S R T V ad figuram C F O P B minorem proportionem habet, quàm ſumma ſpatij X & quadrati E H ad quadratum E H; Et diuidendo *p* differentia figurarum S R T V, & C F O B, ad figuram C F O B minorem proportionem habet, quàm ſpatium X habet ad quadratum E H; habet *q* verò idem ſpatium X ad inſcriptam figuram C F O B maiorem proportionem, quàm ad circunſcriptum quadratum E H, (cùm hoc maius ſit illo): Ergo differentia figurarum S R T V, & C F O B ad figuram C F O B minorem proportionem habet, quàm ſpatium X ad eandem figuram inſcriptam C F O B; & propterea *r* differentia figurarum S R T V, & C F O B minor erit ſpatio X. Cùmque *ſ* circulus A B C maior ſit figura inſcripta C F O B, & minor figura circunſcripta S R T V: erit exceſſus figurę circunſcriptę ſupra circulum, vel defectus figurę inſcriptę ab eodem circulo, minor, quàm ſit differentia figurę circunſcriptę S R T V, & inſcriptę C F O B; Sed differentia harum figurarum adſcriptarum minor oſtenſa eſt magnitudine X. Igitur differentia circunſcriptę figurę S R T V, vel inſcriptę C F O B ab eodem circulo A B C, minor eſt quacunque magnitudine propoſita X. Quod erat faciendum.

n prop. 2. l. 3.
o prop. 6. l. 3
p cor prop. 14 l. 3.
q prop. 2. l. 3.
r prop 5. l. 3
ſ Axio. huius.

PROPOS. X. THEOR. III.

Eucl. 1. XII.

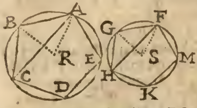
Quę in circulis polygona ſimilia, ſiue circunſcripta inter ſe, ſiue inſcripta inter ſe, ſunt in duplicata ratione radiorum.

Sint duo polygona ſimilia A B D, & F G K inſcripta, ſiue circunſcripta circulis, quorum centra R, & S. Dico inſcripta inter ſe, ſiue circunſcripta inter ſe habere proportionem duplicatam radiorum eorundem circulorum. Et primò in inſcriptis ducantur rectę A C, H F ſubtendentes angulos æquales B & G, & coniungantur radij R A, R B, S F, & S G. Quoniam circa angulos æquales B, & G latera A B ad B C, & F G ad G H ſunt proportionalia (propter ſimilitudinem figurarum. Ergo *a* triangula A B C, & F G H ſimilia ſunt, ideoque anguli A C B, & F H G ęquales ſunt; ſed *b* anguli ad centrum R, &

a prop. 6. lib
b prop 15. lib. 2.

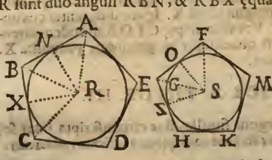
R, & S dupli ſunt angulorum ad peripheriam A C B, & F H G: Ergo anguli R, & S ęquales ſunt, & circa eos latera, ſeu radij circuli ſunt in eadem ratione ęqualitatis. Ergo [c] triangula A B R, & F G S ſimilia ſunt; propterea que, [d] vt A B ad G F, ita erit radius A R ad F S: & [e] eorum duplicatę proportiones eędem quoque erunt: habet [f] verò polygonum A B D ad polygonum F G K duplicatam rationem lateris A B ad eius homologum F G. Ergo [g] proportio polygoni A B D ad polygonum F G K duplicata eſt proportionis radij A R ad radium F S.

c prop. 6. l. 4
d cor. 2. p. 4. l. ..
e cor. 3. prop. 19 l. 3.
f prop. 17. lib. 4.
g prop 7. l. 3



Secundo in figuris circunſcriptis ab angulis ęqualibus A, & F, atque ab ęqualibus B, & G ad centra iungantur rectę A R, F S, B R, G S, & ad contactus N O, X, Z radij coniungantur N R, O S, X R, Z S. Quoniam [h] duę B N, B X ęquales ſunt, cum ſint latera ęqualium quadratorum ex tangentibus ab eodem puncto ductis, & duo radij N R, X R ęquales quoque, atque R B communis: Ergo [i] in duobus triangulis B N R, & B X R ſunt duo anguli R B N, & R B X ęquales, ideoque angulus R B N ſemiſſis erit anguli A B C. Eadē ratione angulus R A N ſemiſſis erit anguli B A E: pariterque in reliqua figura angulus S G O ſemiſſis anguli polygoni F G H; nec non angulus S F O ſemiſſis erit anguli G F M. Et quoniam duo anguli R A N & S F O ęquales ſunt, cùm ſint ſemiſſes angulorum ęqualium B A E, & G F M; & [k] ſunt duo anguli recti ad N, & O ęquales Ergo [l] duo triangula A N R, & F O S ſimilia ſunt, ideoque [m] A N ad F O erit vt N R ad O S. Eadem ratione duo triangula B N R, & G O S ſimilia erunt, ideoque [n] B N ad G O erit, vt eadem N R ad eandem O S: Quapropter [o] duę A N, & N B ſimul ad duas F O, & O G, ideſt latus A B ad F G: erit vt radius N R ad radium O S, [p] & eorum duplicatę proportiones eędem quoque erunt. Quare, vt prius, polygonum A B D ad polygonum F G K habebit pro-

h coroll. 3. prop 22. l. ..
i prop 7. l. 1



k prop 23. l. 2.
l cor'i prop. 4 l. 4
m coroll 2 prop. 4. l. 4
n coroll 2. prop. 4 l. 4
o prop. 15. l. 3.
p coroll 3. prop. 19. l. 3.

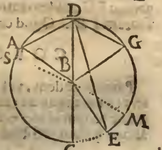
proportionem duplicatam eius, quam habet radius N R ad radium O S. Quod erat propoſitum.

PROPOS. XI. THEOR. IV.

Eucl. 33. VI.

In eodem, vel ęqualibus circulis anguli ad centrum, ſiue ad peripherias, & ſectores eandem rationem habent cum peripheri js, quibus inſiſtunt.

In eodem, vel in circulis ęqualibus ſint primò duo anguli ad centrum A B C, & E B G, inſiſtentes peripherijs A C, & E G. Dico eandem rationem habere arcum A C ad E G, quam habet angulus A B C ad angulum E B G. Secetur *a* arcus E G bifariam, & rurſus bifariam, & ſic ſucceſſiuè ſubdiuidantur arcus intercepti *b* quouſque perueniatur ad arcum E M, qui minor ſit quocunque arcu aſſignabili; Et *c* in arcu C A ſumatur arcus C S multiplex ipſius E M, ita vt eius exceſſus, vel defectus S A ab ipſa A C ſit ęqualis, aut minor, quàm E M, & ideo minor quacunque data magnitudine; Et coniungantur radij B M, B S. Quoniam *d* quoties arcus E M metitur arcum E G, toties angulus E B M menſurat angulum E B G; pariterque quoties arcus E M menſurat arcum C S, toties angulus E B M menſurat angulum S B C: Igitur *e* arcus S C eædē partes erit arcus E G, quemadmodū angulus S B C eſt partes anguli E B G. Et *f* quoniam, ſi arcus S C ęqualis eſt ipſi A C, neceſſariò angulus S B C ęqualis eſt angulo A B C (Et tunc patet propoſitum). At ſi *g* arcus S C maior eſt, quam A C, neceſſariò angulus S B C, maiori peripherię inſiſtens, erit maior, quàm angulus A B C; Et ſi arcus S C minor fuerit, quàm A C, erit angulus S B C minor angulo A B C. Quare ſunt quatuor magnitudines arcus A C prima, at ſecunda eſt arcus E G; & angulus A B C eſt tertia, & angulus E B G eſt quarta; & inſuper duę aliæ magnitudines, ſcilicet arcus S C, & angulus S B C ſunt eędem partes conſequentium, ideſt ad eas habent eandem proportionem; & ſunt vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus, ita vt exceſſus, aut defectus à prima minor ſit quacunque aſſignabili quantitate. Ergo *h* arcus A C



a cor prop. 19. l. 2.
b ſchol. prop 2. l. 2.
c coroll. 4. prop. 16. l. 2.
d coroll. 4. prop. 17. l. 2.
e def. 6. l. 3.
f coroll. 1. prop 17. l. 2.
g coroll 2. prop. 17. l. 2.
h prop 24. l. 3.

A C ad arcum E G eſt, vt angulus A B C ad angulum E B G; quod erat oſtendendum.

Secundò ſint ad peripheriam duo anguli A D C, & E D G inſiſtentes peripherijs A C, & E G eiuſdem, vel ęqualium circulorum. Dico angulum A D C ad angulum E D G eſſe, vt arcus A C eſt ad arcum E G. Fiant anguli ad centrum A B C, & E B G. Quia [i] angulus A D C ſemiſſis eſt anguli ad centrum A B C, & angulus E D G ſemiſſis eſt anguli E B G. Ergo, [k] vt angulus A B C ad angulum E B G, ita eſt angulus A D C ad angulum E D G; ſed, vt angulus A B C ad angulum E B G, ita eſt peripheria A C ad peripheriam E G (ex prima parte huius) Ergo, [l] vt angulus A D C ad angulum E D G, ita eſt peripheria A C ad perpheriam E G. quod erat ſecundum.

[i prop. 13. lib. 2]
[k prop. 11. lib. 3.]
[l prop. 7. lib. 3.]

Tertiò in eodē, vel ęqualibus circulis dico ſectorem A B C ad ſectorem E B G habere eandem rationem, quam arcus A C, quę eſt baſis illius, ad arcum E G, quę eſt baſis alterius ſectoris. facta ſuperiori conſtructione, ea omnia, quę dicta ſunt de angulis ad centrum intelligantur dicta de ſectoribus. Quapropter [m] ſector S B C erit eędē partes ſectoris E B G, quemadmodum angulus S B C partes eſt anguli E B G, ſeu arcus S C eſt partes arcus E G. Inſuper [n] arcus SC arcu AC, atq; ſector S BC ſectore ABE vnà maiores, aut vnà minores erunt. Quare ſunt quatuor magnitudines arcus A C, arcus E G, ſector A B C, & ſector E B G, atque duę alię ſcilicet arcus S C, & ſector S B C ſunt eędem partes conſequentium, ſcilicet ipſius arcus E G, & ſectoris E B G, quę denominantur à numero ex continua bipartitione conſequentium orto, & ſunt vnà excedentes, vel vnà deficientes à prima, & tertia, ſcilicet ab arcu A C, & à ſectore A B C. eſtque exceſſus ipſius S C à prima A C, vel defectus minor quolibet dato. Ergo [o] arcus A C ad arcum EG eandem rationem habet, quam ſector A B C ad ſectorem E B G. Quod erat poſtremo loco oſtendendum.

[m Def 6. lib. 3.]
[n coroll. 2. prop. 17 l. 2]
[o prop. 14. lib. 3.]

COROLLARIVM I.

Patet in eodem, vel ęqualibus circulis ſectores eſſe inter ſe, vt ſunt anguli ad centrum, ſectores continentes. [p] Nam ambę proportiones eędem ſunt, proportioni, quam habent arcus, quibus inſiſtunt.

[p prop. 7. lib. 3.]

CO-

COROLLARIVM II.

Manifeſtum quoque eſt, vt ſunt quatuor recti ad angulum in cẽtro circuli, ita eſſe totam circuli peripheriam ad arcum illi angulo ſubtenſum; & ita eſſe circulum ad ſectorem ab illo angulo contentum. Nam, vt angulus rectus in centro ad quemlibet angulum in centro, *q* ita eſt quarta pars peripheriç totius ad arcum ſubtẽſum reliquo angulo, & *r* ita eſt quoque ſector, qui quarta pars eſt circuli ad ſectorem à reliquo angulo contentum. Et *ſ* antecedentium quadrupla ad eadem conſequentia proportionalia erunt, ſcilicet tota circuli peripheria ad arcum reliquo angulo ſubtenſum, & circulus totus ad ſectorem à reliquo angulo contentum eandem rationem habebunt, quam quatuor recti ad angulum ad centrum.

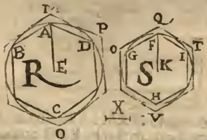
q ex prima part. huius.
r tertia par. huius.
ſ coroll. 1. prop. 19. l. 3

PROPOS. XII. THEOR. V.

Eucl. 2. XII.

Circuli inter ſe ſunt in duplicata ratione radiorum.

Sint duo circuli R & S, eorumque radij A E & F K, quorum tertius proportionalis ſit X. Dico circulum R ad circulum S habere duplicatam proportionẽ eius, quam habet radius A E ad radium F K, ſeu eandem, quam A E habet ad X. Adſcribantur *a* circulo R duo polygona regularia ſimilia A B C D, & M N O P, ita vt exceſſus figurç M N O P circũſcriptç ſupra circulũ, & defectus figurç A B C D inſcriptç ab eodem circulo R minor ſit quacunque magnitudine propoſita; Poſtea *b* adſcribantur circulo S duç figurç F G H I, & Q O V T ſimiles ipſis figuris A B C D, & M N O P: erunt *c* ſimiles figurç circunſcriptç M N O P, & Q O V T inter ſe, nec non ſimiles figurç inſcriptæ A B C D, & F G H I inter ſe in duplicata ratione radij E A ad radium K F, ſeu *d* vt A E ad X. Et quoniam circulus S minor eſt polygono T O V ei circunſcripto. Ergo polygonum



a prop. 9. huius.
b coroll. 2. prop 4. huius
c prop. 10. huius.
d prop. 7. lib. 3.

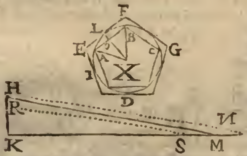
Ee

e prop. 2. l. 3. num *e* M N O ad circulum S maiorem proportionem habet, quàm ad polygonum T O V; habet verò polygonum M N O *f prop. 6. l. 3.* ad polygonum Q O V eandem proportionem, quam A E ad X. Ergo *f* polygonum M N O, (ideſt quantitas excedens circulum R exceſſu minore quocunque dato) maiorem proportionem habet ad circulum S, quàm A E ad X. Similiter quia circulus S maior eſt polygono ei inſcripto F G H; Ergo *g* polygonum A B C ad circulum S minorem proportionem habet, quàm ad polygonum F G H: *g prop. 2. lib. 3.* Habet autem polygonum A B C ad polygonum F G H proportionem eandem, *h prop. 6. lib. 3.* quam A E ad X. Ergo *h* polygonum inſcriptum A B C (minor circulo R defectu minori quocunque dato) minorem proportionem habet ad circulum S, quàm A E ad X; ideoque *i* circulus R ad circulum S eandem duplicatam proportionem habebit radij A E ad radium F K. *i ſchol. prop. 24. l. 3.* Quod erat oſtendendum.

PROPOS. XIII. THEOR. VI.

Archim. de circul. menſura prop. 1.

Circulus æqualis eſt triangulo, cuius baſis æqualis eſt peripheriæ circuli, altitudo verò æqualis radio circuli.



Sit circulus X, cuius radius X B, & triangulum H K M, cuius baſis K M æqualis ſit integræ peripheriæ A B D, & altitudo, ſeu perpendicularis H K æqualis ſit radio circuli X B. Dico circulum æqualem eſſe triangulo H K M. *a prop. 9. huius.* Adſcribantur *a* circulo X duo polygona regularia, & ſimilia E F G extra, & A B C intra ipſum, ita vt differentia eorum à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita. *b prop. 11. lib. 1.* Poſtea *b* ducta X O perpendiculari à centro ad latus figuræ inſcriptæ, & coniungantur rectæ X F, X E & *c prop. 3. lib. 1.* X A, & *c* fiat K N æqualis perimetro circunſcripti polygoni E F G I, & k S æqualis perimetro figuræ A B C D, & R k æqualis perpendiculari X O, & coniungantur rectæ H N, & R S. *d coroll. 3. prop. 3. huius.* Quoniam *d* polygonum regulare E F G I diuiditur in tot

trian

triangula iſoſcelia æqualia inter ſe, verticem in centro X ha-
bentia, quot ſunt eius latera: ſunt verò dicta triangula æquè
alta, quia eorum altitudines ſunt radij æquales ipſi X L, ſeu
H K. Ergo *e* polygonum E F G I eſt tam multiplex trianguli *e def. 5. l. 3.*
E X F, quàm perimeter eiuſdem polygoni eſt multiplex vnius
lateris E F; ſed K N eſt æqualis perimetro E F G I dicti poly-
goni. Ergo, *f* vt K N ad E F, ita eſt polygonum E F G I ad *f prop. 3. l. 3*
triangulum E X F; ſed *g* triangulum K H N ad triangulum E *g prop. 1. l. 4*
F X (cùm habeant æquales altitudines, ſcilicet perpendicu-
lares X L, & H k) eſt, vt baſis k N ad baſim E F. Ergo *h* poly- *h prop. 7. l. 3*
gonum E F G I, & triangulum H k N eandem rationem ha-
bent ad triangulum E X F, ideoque *i* illa æqualia ſunt inter
ſe. Deinde *k* quia rectæ lineæ inflexæ I E L, extra circulum *i prop. 4. l. 3*
cadentes, maiores ſunt, quàm arcus I A L: Ergo perimeter *k Ax. huius*
figuræ F G I maior erit, quàm tota peripheria circuli X com-
prehenſi; ſed k N æqualis poſita fuit perimetro E F G I, & K
M æqualis peripheriæ circuli X. Ergo k N maior eſt, quàm k
M. Sed triangula H k N, & H k M ſunt æquè alta. Ergo *l* trian-
gulum H k N maius erit triangulo H k M, ſicuti polygonum *l coroll. 2.*
E F G I maius eſt circulo X. Similiter oſtendetur polygonum *prop. 3 l. 1*
A B C D æquale triangulo R k S, *m* eo quod baſis K S æqualis *m prop. 1.*
ponitur perimetro dicti polygoni, & altitudines R k, & X O *l. 4.*
ſunt etiam æquales; eſtque *n* perimeter polygoni A B C D *n Ax. huius*
inſcripti, ſeu ei æqualis k S minor peripheria circuli X, ſeu ei
æquali k M, & altitudo R k, ſeu X O minor altitudine H k,
ſeu radio X L. Ergo triangulum R k S minus eſt triangulo H
k M, ſicuti polygonum A B C D minus eſt circulo X. Iam
cùm polygonum F E G æquale ſit triangulo H k N, & trian-
gulum H k N maius ſit triangulo H k M. Ergo circunſcripta
figura F E G (quæ eſt maior circulo X exceſſu minori quo-
cunque dato) eſt quoque maior triangulo H k M. Similiter
cum figura A B D æqualis ſit triangulo R K S, & triangulum
R k S minus ſit triangulo H k M. Ergo inſcripta figura A B
D (quæ minor eſt circulo X defectu minori quocunque da-
to) eſt quoque minor triangulo H k M. Et propterea *o* circu- *o ſcho. prop.*
lus X æqualis eſt triangulo H k M. Quod erat oſtendendum. *24. l. 3*

COROLLARIVM.

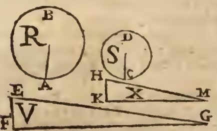
Patet triangulum, cuius baſis æqualis ſit perimetro cuiuſli-
bet figuræ regularis, & altitudo æqualis ſit perpendiculari à

centro figurę ad eius latus ductę ęquale eſſe eidem regulari figurę. Oſtenſum enim fuit triangulum H K N, habens dictas conditiones, æquale polygono regulari E F G I.

Pappi 11. lib. V.

PROPOS. XIV. THEOR. VII.

Peripherię inter ſe eandem rationem habent, quam radij eorundem circulorum.



Sint circuli R, & S, quorum radij R A, S C. Dico, vt radium R A ad radium S C, ita eſſe peripheriam A B A ad peripheriam C D C. Intelligatur triangulum V, cuius baſis F G æqualis ſit peripheriæ A B A, & altitudo E F æqualis ſit radio R A. Similiter intelligatur triangulum X, cuius baſis K M ęqualis ſit peripherię C D C, & altitudo H K ęqualis ſit radio S C. Patet a triangulum V ęqualem eſſe circulo R, atque triangulum X eſſe ęqualem circulo S, ideoque triangulum V ad triangulum X erit, vt circulus R ad circulum S. Et quia circulus c R ad circulum S duplicatam rationem habet eius, quam habet radius R A ad radium S C: Ergo d triangulum V ad triangulum X duplicatam rationem habet eius, quam habet R A ad S C, ſeu e duplicatam rationem eius quam habet altitudo E F ad altitudinem H K (cùm R A, E F inter ſe, & S C, H K inter ſe ęquales factæ ſint) cumque f proportio trianguli V ad triangulum X ſit compoſita ex ratione lateris E F ad latus H K, & ex ratione baſis F G ad baſim K M, cùm ſint circa angulos rectos F, K, ęquales: Ergo g proportio baſis F G ad baſim K M eadem eſt, quam E F habet ad H K, h ſeu quam R A habet ad S C. Eſtque F G ęqualis peripherię A B A, & K M ęqualis peripherię C D C. Ergo i peripheria A B A ad peripheriam C D C eandem rationem habet, quam radius R A ad radium S C. Vt erat propoſitum.

a prop. 13. huius.
b prop. 3. lib. 3.
c prop. 12. huius.
d prop. 7. lib. 3.
e prop 3. l. 3
f prop. 13. lib. 4.
g coroll. 3. prop. 19. l. 3
h prop. 3 l. 3
i prop. 7. l. 3

SCHOLIVM.

Si R, & S fuerint duo polygona regularia ſimilia, conſtat, quod eorum perimetri

perimetri ſunt proportionales rectis perpendicularibus ex centris ad eorum latera ductis. Hoc enim ex hac, & præcedenti demonſtratione, atque eius corollario facilè concluditur.

PROPOS. XV. THEOR. VIII.

Pappi 13. lib. V.

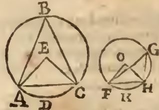
Si duorum circulorum ſegmenta comprehendant angulos æquales, erunt ſuis circulis proportionalia, & inter ſe rationem habebunt duplicatam ſubtenſarum, vel radiorum, & eorum peripheriæ erunt inter ſe, vt ſubtenſæ, vel vt Radij, Vocentur autem huiuſmodi ſegmenta ſimilia.

Sint duo circulorum ſegmenta A B C, & F G H, in quibus anguli B, & G ſint æquales. Ductis radijs E A, E C, O F & O H. Dico ſegmentum A B C ad circulum A B C D eſſe, vt ſegmentum F G H ad circulum F G H K, & ſegmenta A B C, & F G H eſſe in duplicata ratione radiorum E A, & O F, vel ſubtenſarum A C, & F H; & peripherias A B C, F G H eſſe, vt A C ad F H. Quoniam anguli B, & G ponuntur æquales: Ergo *a* eorum dupli ad centrum E, & O æquales erunt, ideoque *b* quatuor recti ad angulos æquales E, & O eandem rationem habebunt; ſed, *c* vt quatuor recti ad angulum E, ita eſt circulus B A C ad ſectorem A E C A, atque etiam, vt quatuor recti ad angulum O, ita eſt circulus G F H ad ſectorem F O H F. Ergo, *d* vt circulus B A C ad ſectorem A E C A ita erit circulus G F H ad ſectorem F O H F: Et *e* permutando vt circulus A B D ad circulum F G K, ita erit ſector A E C D ad ſectorem F O H k: ſed *f* circuli ſunt inter ſe in duplicata ratione radiorum E A ad O F. Ergo *g* ſectores in eadem duplicata ratione radij B A ad O F erunt. Sunt *h* verò triangula A E C, & F O H ſimilia (cum ſint iſoſcelia, & habeant verticales angulos E, & O æquales): Ergo *i* triangulum E A C ad triangulum O F H duplicatam rationem habet eius, quam habet radius E A ad O F, vel ſubtenſa A C ad F H. Quare, *k* vt ſector E A D C ad ſectorem O F K H, ita eſt triangulum E A C ad triangulum O F H: Vnde *l* reſiduum ſegmentum A C D ad ſegmentum F K H erit in eadem ratione ſectorum, vel circulorum; & propterea *m* reliquum ſegmentum A B C ad ſegmentum F G H erit quoque in eadem ratione circuli A B D ad circulum F G H, *n* ſeu in duplicata proportione radij E A ad radium O F, vel ſubtenſæ A C ad ſubtenſam F H.

a prop. 13. lib. 2.
b prop. 3. l. 3.
c coroll. 2. prop 11. huius.
d prop. 7. l. 3.
e prop. 12. lib. 3.
f prop. 12. huius.
g prop. 7. l. 3
h prop 4. l. 4
i prop. 15. l. 4.
k prop. 7. l. 3
l prop. 15. l. 3.
m prop. 15. l. 3.
n prop. 7. l. 3

Tan-

Tandem quoniam anguli ad centra A E C, & F O H æquales ſunt. Ergo ° tota circuli peripheria A B C A eſt ad arcum A D C vt ſunt quatuor recti ad angulum A E C, ſiue ᵖ ei æqualem angulum F O H: pariterque tota circuli peripheria F G H F ad arcum F K H eſt in eadem ratione, ac ſunt quatuor recti ad angulum F O H. ᑫ Ergo vt circuli peripheria A B C A ad arcum A D C ita erit peripheria circuli F G H F ad arcum F K H. Et ʳ permutando circuli peripheria A B D ad circuli peripheriam F G K eſt, vt arcus A D C ad arcum F K H, ˢ ideoque reſidua peripheria A B C ad reſiduam F G H erit, vt tota ad totam; ſed ᵗ tota peripheria A B D ad totam peripheriam F G K eſt, vt radius E A ad radium O F, ſiue vt ſubtenſa A C ad ſubtenſam F H (eo quod fuit A C ad F H, vt E A ad O F) Ergo ᵘ peripheria A B C ad peripheriam F G H eſt vt ſubtenſa A C ad rectam ſubtenſam F H ſiue vt radius A E ad radium F O, vt fuit propoſitum. Vocentur autem ſegmenta A B C, & F G H capientia angulos æquales B, & G inter ſe Similia.



o corol. 2. prop. 11 huius. p prop. 3. l. 3 q prop. 7. l. 3 r prop. 12. l. 3. ſ prop. 15. l. 3. t prop. 14. huius. u prop. 7. l. 3

COROLLARIVM.

Patet ex hac propoſitione, quod in circulis inæqualibus, vt ſunt peripheriæ, quæ ſunt baſes angulorum æqualium ad centrum, ſiue ad peripheriam ita ſunt circulorum integræ peripheriæ inter ſe. Inſuper circuli ſunt inter ſe, vt ſectores ab æqualibus angulis comprehenſi.

Ptol. Alm. l. 1. c. 9.

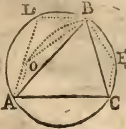
PROPOS. XVI. THEOR. IX.

In quolibet triangulo maior angulus ad minorem habet maiorem rationem, quàm latus maiori angulo oppoſitum ad latus oppoſitum angulo minori.

In triangulo A B C ſit angulus C maior, & angulus A minor. Dico angulum C habere maiorem proportionem ad angulum A, quàm latus A B habet ad latus B C ᵃ Deſcribatur circa triangulum circulus A B C, & ſecetur arcus B C vtcunque in E; Et ᵇ fiat arcus B D æqualis B E; iunganturque rectæ lineæ

a ſch. prop. 1 lib. 2. b coroll. 4. prop. 16 l. 3

nec C E, B E, A D, B D. Et quia *c* arcus A D B, cui maior an- *c cor. 2. prop.*
gulus C inſiſtit, maior eſt, quàm B E C, & arcus B D, & B E *16. l. 2.*
ſunt çquales: Ergo reſiduus arcus A D maior erit reſiduo arcu *d coroll. 2.*
C E, & ideo *d* angulus A B D maior erit angulo C B E. Fiat *e* iã *prop. 17. l. 2.*
angulus A B O çqualis minori angulo E B C: Igitur angulus *e prop. 24. l. 1.*
A B D maior erit angulo A B O, & ideo
recta B O ſecabit rectam A D in pun-
cto O, poſito inter A, & D, & ideo pun-
ctum O erit intra circuli ſegmentum A *f ſchol. prop. 1. l. 2.*
D B. Deſcribatur *f* iam per tria puncta
A, O, & B circuli peripheria A O B, ca-
det illa intra ſegmentum A D B; Et
quoniam in triangulis A O B, & C E B
duo *g* anguli O A B, E C B çquales ſunt *g coroll. 1.*



(cùm peripherijs æqualibus B D, & B E inſiſtant); pariter- *prop. 7. l. 2.*
que duo anguli O B A, E B C ſunt æquales: Ergo *h* reliqui *h coroll 10.*
anguli A O B, & C E B çquales erunt; proptereaque *i* peri- *prop. 18. l. 1.*
pheria A O B ad peripheriam B E C erit, vt ſubtenſa A B ad *i prop. 15. huius.*
rectam lineam B C; eſt verò *k* arcus A D B maior, quàm ar- *k Axio. 10.*
cus A O B, eo quod hic ab illo comprehenditur. Igitur *l* ar- *huius.*
cus A D B maiorem rationem habet ad eũndem arcum B C, *l prop. 2. l. 3*
quàm arcus A O B; & ideo *m* arcus A D B ad arcum B E C *m prop. 6.*
maiorem rationem habebit, quam recta linea A B ad rectam *l. 3.*
B C. Et eſt *n* angulus B C A ad angulum B A C, vt arcus A D *n prop. 11.*
B ad arcum B E. Ergo *o* angulus B C A maiorẽ rationem ha- *huius.*
bet ad angulum B A C, quàm ſubtenſa A B habeat ad rectam *o prop. 6.*
lineam ſubtenſam B C. Quod erat oſtendendum. *lib. 3.*

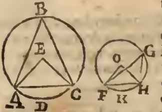
PROPOS. XVII. THEOR. X.

Inter duas figuras ſimiles regulares, vel circulos, aut ſectores ſimiles, medium proportionale eſt triangulum, cuius altitudo çqualis eſt radio vnius, baſis verò çqualis eſt perimetro alterius.

Sint duç quçlibet figurç regulares ſimiles inter ſe, vel duo
ſectores ſimiles, aut duo circuli R, & S, quorum radij R B, &
S E; Sitq; triangulum rectangulũ G H M cuius altitudo G H
æqualis ſit radio S E vnius figurç S, & baſis H M çqualis ſit B
A C perimetro figurç R. Dico triangulum G H M medium
proportionale eſſe inter figuras R, & S. *a* Fiat altitudo N H *a prop. 3. l. 1*
çqualis

Tandem quoniam anguli ad centra A E C, & F O H ęquales ſunt. Ergo *o* tota circuli peripheria A B C A eſt ad arcum A D C vt ſunt quatuor recti ad angulum A E C, ſiue *p* ei æqualem angulum F O H: pariterque tota circuli peripheria F G H F ad arcum F K H eſt in eadem ratione, ac ſunt quatuor recti ad angulum F O H. *q* Ergo vt circuli peripheria A B C A ad arcum A D C ita erit peripheria circuli F G H F ad arcum F K H. Et *r* permutando circuli peripheria A B D ad circuli peripheriam F G K eſt, vt arcus A D C ad arcum F K H; *s* ideoque reſidua peripheria A B C ad reſiduam F G H erit, vt tota ad totam; ſed *t* tota peripheria A B D ad totam peripheriam F G K eſt, vt radius E A ad radium O F, ſiue vt ſubtenſa A C ad ſubtenſam F H (eo quod fuit A C ad F H, vt E A ad O F) Ergo *u* peripheria A B C ad peripheriam F G H eſt vt ſubtenſa A C ad rectam ſubtenſam F H ſiue vt radius A E ad radium F O, vt fuit propoſitum. Vocentur autem ſegmenta A B C, & F G H capientia angulos ęquales B, & G inter ſe Similia.

o corol. 2. prop. 11 huius. *p prop. 3. l. 3* *q prop. 7. l. 3* *r prop. 12. l. 3.* *s prop. 15. l. 3.* *t prop. 14. huius.* *u prop. 7. l. 3*



COROLLARIVM.

Patet ex hac propoſitione, quod in circulis inęqualibus, vt ſunt peripherię, quę ſunt baſes angulorum ęqualium ad centrum, ſiue ad peripheriam ita ſunt circulorum integrę peripherię inter ſe. Inſuper circuli ſunt inter ſe, vt ſectores ab æqualibus angulis comprehenſi.

PROPOS. XVI. THEOR. IX.

Ptol. Alm. l. 1. c. 9.

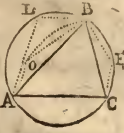
In quolibet triangulo maior angulus ad minorem habet maiorem rationem, quàm latus maiori angulo oppoſitum ad latus oppoſitum angulo minori.

In triangulo A B C ſit angulus C maior, & angulus A minor. Dico angulum C habere maiorem proportionem ad angulum A, quàm latus A B habet ad latus B C *a* Deſcribatur circa triangulum circulus A B C, & ſecetur arcus B C vtcunque in E; Et *b* fiat arcus B D ęqualis B E; iunganturque rectę li-

a ſch. prop. 1 lib. 2. *b coroll. 4. prop. 16 l. 2*

nec

nec C E, B E, A D, B D. Et quia *c* arcus A D B, cui maior angulus C inſiſtit, maior eſt, quàm B E C, & arcus B D, & B E ſunt equales: Ergo reſiduus arcus A D maior erit reſiduo arcu C E, & ideo *d* angulus A B D maior erit angulo C B E. Fiat *e* iã angulus A B O ęqualis minori angulo E B C: Igitur angulus A B D maior erit angulo A B O, & ideo recta B O ſecabit rectam A D in puncto O, poſito inter A, & D, & ideo punctum O erit intra circuli ſegmentum A D B. Deſcribatur *f* iam per tria puncta A, O, & B circuli peripheria A O B, cadet illa intra ſegmentum A D B; Et quoniam in triangulis A O B, & C E B duo *g* anguli O A B, E C B ęquales ſunt (cùm peripherijs æqualibus B D, & B E inſiſtant); pariterque duo anguli O B A, E B C ſunt æquales: Ergo *h* reliqui anguli A O B, & C E B ęquales erunt; proptereaque *i* peripheria A O B ad peripheriam B E C erit, vt ſubtenſa A B ad rectam lineam B C; eſt verò *k* arcus A D B maior, quàm arcus A O B, eo quod hic ab illo comprehenditur. Igitur *l* arcus A D B maiorem rationem habet ad eundem arcum B C, quàm arcus A O B; & ideo *m* arcus A D B ad arcum B E C maiorem rationem habebit, quam recta linea A B ad rectam B C. Et eſt *n* angulus B C A ad angulum B A C, vt arcus A D B ad arcum B E. Ergo *o* angulus B C A maiorẽ rationem habet ad angulum B A C, quàm ſubtenſa A B habeat ad rectam lineam ſubtenſam B C. Quod erat oſtendendum.



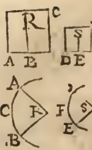
c coroll. 2. prop. 16. l. 2. *d coroll. 2. prop. 17. l. 2.* *e prop. 24. l. 1.* *f ſchol. prop. 1. l. 2.* *g coroll. 1. prop. 7. l. 2.* *h coroll 10. prop. 18. l. 1.* *i prop. 15. huius.* *k Axio. 10. huius.* *l prop. 2 l. 3* *m prop. 6. l. 3.* *n prop. 11. huius.* *o prop. 6. lib. 3.*

PROPOS. XVII. THEOR. X.

Inter duas figuras ſimiles regulares, vel circulos, aut ſectores ſimiles, medium proportionale eſt triangulum, cuius altitudo ęqualis eſt radio vnius, baſis verò ęqualis eſt perimetro alterius.

Sint duę quęlibet figurę regulares ſimiles inter ſe, vel duo ſectores ſimiles, aut duo circuli R, & S, quorum radij R B, & S E; Sitq; triangulum rectangulũ G H M cuius altitudo G H æqualis ſit radio S E vnius figurę S, & baſis H M ęqualis ſit B A C perimetro figurę R. Dico triangulum G H M medium proportionale eſſe inter figuras R, & S. *a* Fiat altitudo N H *a prop. 3. l. 1*

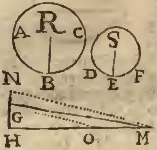
ęqualis



b ex prop. 14. huius.
c prop.3.l.3
d cor 1.prop. 1.l.4.

çqualis radio R B,& baſis HO çqualis perimetro E D F, & iũgantur rectę N M, & G O. Quoniam in ſimilibus figuris regularibus vel in ſectoribus ſimilibus, aut circulis R, & S, b vt radius R B ad radium S E, ita eſt perimeter A B C ad perimetrum D E F: eſtque N H çqualis R B, & G H çqualis S E; atque H M çqualis perimetro A B C nec non H O æqualis D E F. c Ergo vt N H ad H, ita eſt M H ad H O; ſed d vt altitudo N H ad G H, ita eſt triangulũ N H M ad G H M (cùm habeant eandem baſim H M); &, e vt baſis M H ad baſim H O, ſeu f vt N H ad G H, ita eſt triangulum G HM ad triangulum G H O. Ergo triangulum G H M medium proportionale eſt inter duo triangula N H M, & G H O; eſt g verò triangulum rectangulum N H M æquale figuræ R, cùm contineatur à radio. & perimetro dictę figurç R: pariterque triangulum G H O eſt çquale figuræ S: Igitur h vt figura R ad triangulum G H M, ita eſt triangulum G H M ad figuram S: & propterea triangulum G H M medium proportionale eſt inter figuras R, & S. Quod erat oſtendendum.

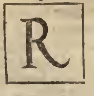
e prop.1.l.4
f prop 7.l.3
g prop.13. huius eius 9. coroll.
h prop.3.l.3



S C H O L I V M.



Hic demonſtrari poteſt pulcherrimum theorema, cuius prima pars ex Snellio, ſecunda verò ex Galileo deſumpta eſt. Inter figuras regulares circulo adſcriptas, inſcripta duplo laterum numero media proportionalis eſt. Et circulus medius proportionalis eſt inter duas regulares ſimiles figuras, quarum vna ſit circunſcripta circulo; altera verò ei iſoperimetra.



a coroll.1. prop.4. huius.
b prop 3. huius.

In circulo B G F primò a adſcribantur duæ figuræ regulares ſimiles C D, & E H, vt latera homologa ſint parallela; & b ſectis peripherijs intermedijs bifariam inſcribatur figura regularis B E G F duplo laterum numero. Dico figuram regularem B E G F mediam proportionalem eſſe inter adſcriptas figuras C D, & E H. Dicatur

radius

radius A B, ſecans latera parallela adſcriptarum figurarum perpendiculariter, & bifariam (vt in prop. 3. & 4. huius dictum eſt) in B, & O; coniungaturque recta A C, quæ, c vt dictum eſt, tranſibit per angulum E. Et quia d triangulum C B A ad triangulum ęquè altum E B A eſt, vt baſis C A ad baſim E A; ſed e polygonum C D ipſius trianguli C B A, atque polygonum B E G F ipſius trianguli E B A ęquè multiplicia ſunt; Igitur f polygonum C D ad B E G F eſt, vt C A ad radium circuli E A; ſed g figura circunſcripta C D ad inſcriptam ei ſimilem E H eſt, vt quadratum ex C A ad quadratum ex radio circuli E A, ſeu h in duplicata ratione lateris C A ad A E. Ergo i figura B E G F media proportionalis eſt inter figuras adſcriptas C D, & E H.

c prop. 4. huius. *d prop. 1. l. 4* *e def 5 l. 3.* *f prop. 11. & 7. l 3.* *g coroll. 2. prop. 4. huius.* *h prop. 17. lib. 4.* *i coroll. 3. prop. 19. l. 3*

Secundò habeat polygonum regulare R perimetrum æqualem circunferentię circuli B G F, & ſit R ſimile circunſcripto polygono C D. Dico circulum B G F medium proportionalem eſſe inter figuras C D, & R. Quia figurę regulares C D, & R ſunt ſimiles: erit k triangulũ rectangulũ à B A radio circuli, ſeu figuræ C D, & à perimetro figuræ R, ſeu circunferentia B G F ei ęquali contentum, medium proportionale inter dictas figuras; ſed l hoc triangulum ęquale eſt circulo B G F. Ergo circulus B G F medius proportionalis eſt inter figuras C D, & R. Quod erat oſtendendũ.

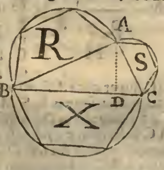
k prop. 17. huius. *l prop. 13. huius.*

PROPOS. XVIII. THEOR. XI.

Eucl. 47. 1. 31. VI.

In triangulis rectangulis quęlibet figura rectilinea, vel circularis ſuper hypothenuſa deſcripta ęqualis eſt duabus figuris ſuper lateribus, rectum angulum continentibus, deſcriptis, quæ illæ ſimiles ſint, & ſimiliter poſitæ.

Sit triangulum A B C rectangulum in A, & ſuper tribus eius lateribus deſcribantur quęlibet tres figuræ X, R, & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ, ſiue ſint circuli, ſiue ſectores, ſiue ſegmenta, ſiue zonæ, ſiue figuræ rectilineæ. Oſtendendum eſt figuram X ſuper hypothenuſam B C deſcriptam ęqualem eſſe duabus figuris R, & S illis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ſuper lateribus B A, & A C. Ducatur a ab angulo recto A perpendicularis A D ſuper B C. Manifeſtum eſt b C B ad B D duplicatam rationem habere eius, quam habet C B ad



a prop. 11. lib. 1. *b prop 9. l. 4. & prop. 19. l. 3.*

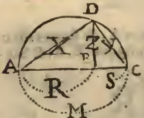
B A; pariterque B C ad C D duplicatam rationem habet eius, quam habet B C ad C A. Et quoniam c X ad R, cùm ſint figu-
c prop. 17. l. 4
rę ſimiles, & ſimiliter poſitæ, duplicatam rationem habet lateris B C ad eius homologum B A: Ergo d X ad R eſt, vt C B ad B D. Eadem ratione figura X ad figuram S eandem rationem habebit, quam B C ad C D: Ergo e figura X ad duas figuras R, & S eandem rationem habebit, quam B C ad duas B D, & D C ſimul ſumptas; ſed B C ęqualis eſt duabus B D, & D C. Ergo f figura X ęqualis eſt duabus figuris R, & S ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

d coroll. 3. prop 19. l. 3.
e cor prop. 22. l. 3.
f coroll 1. prop. 16. l. 3

PROPOS. XIX. THEOR. XII.

Si ſuper duabus rectis lineis ſuper earum aggregato, atque media proportionali inter eas deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex aggregato ęqualis aggregato ambarū figurarum ex illis rectis cū duplo figurę ex media proportionali inter eaſdem.

Inter rectas lineas A B, B C ſit media proportionalis D B, quæ perpendicularis ſit ad eas in directum poſitas, & A B, B C, eorunque aggregatum A C, atque B D ſint radij circulorum R, S, M, & Z, aut ſectorum, aut zonarum ſimilium, aut figurarum regularium, vel certè ſint ſubtenſæ, vel latera homologa figurarum circularium, vel rectilinearum ſimilium.



Dico figuram M ex aggregato deſcriptam æqualem eſſe aggregato duarum figurarum R, & S, cum duplo figuræ Z. Super diametro A C deſcribatur ſemicirculus A D C; & quia D B perpendicularis eſt ad A C, & eſt media proportionalis inter A B, & B C: Ergo a punctum D in peripheriam cadit; coniunganturque rectę A D, & D C, ſuper quas deſcribantur figuræ X, & Y ſimiles, & ſimiliter poſitæ figuris R, S M, & Z. Quoniam in triangulo A D C b rectangulo in D c quęlibet figura M, ſuper hypothenuſa A C deſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus X, & Y ſuper lateribus A D, & D C ſimiliter deſcriptis; ſed d in triangulo A B D rectangulo in B figura X ſuper hypothenuſa A D deſcripta ęqualis eſt duabus figuris R, & Z illi ſimilibus, & ſimiliter

a ſchol prop. 9. l. 4.
b prop. 20. lib 2.
c prop. 18. huius
d prop. 18 huius.

militer poſitis ſuper lateribus A B, & D B: pariterque in triangulo D B C rectangulo in B figura Y ſuper D C deſcripta æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus S, & Z, & ſimiliter poſitis ſuper C B, & D B. Ergo figura M æqualis eſt figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis R, & S, & duplo figurę Z. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt, quòd, ſi duę rectę lineę datę fuerint ęquales inter ſe: erit figura, ſuper aggregato earum deſcripta, quadrupla figurę ex vna datarũ, quę ſit illi ſimilis, & ſimiliter deſcripta. Nam, quando A B, & B C ſunt inter ſe ęquales; erit B D, media proportionalis inter eas, ęqualis ipſi A B, vel B C, & propterea *e* figura Z ęqualis erit figuræ R, vel S. Vnde figurę R, S, cum duplo figurę Z ſimul ſumptę, ęquales erunt quadruplo figurę R; eſt verò in hac propoſitione oſtenſa figura M ęqualis figuris R, S, & duplo figurę Z. Ergò figura M quadrupla eſt figurę R, vel S. *e coroll. 2. prop. 17 l. 4.*

COROLLARIVM II. *Eucl. 4. II.*

Et, ſi duę figurę fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato ęquale duobus quadratis ex datis rectis, & duplo parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis contenti. Nam *f* quadrata ſunt figurę ſimiles, cum ſint regulares: vnde ex hac propoſitione, quadratum M æquale erit duobus quadratis R, & S vnà cum duplo quadrati Z; ſed *g* quadratum Z ęquale eſt rectangulo parallelogrammo A B C (eò quod perpendicularis B D media proportionalis eſt inter A B, & B C). Ergò quadratum M ex aggregato ęquale eſt duobus quadratis R, & S ex rectis datis vnà cum duplo rectanguli A B C ſub rectis datis contenti. *f prop. 3. huius.* *g coroll. 1. prop. 14. l. 4*

COROLLARIVM III.

Et ſi dictę figurę fuerint circuli, ſectores, aut rectilineę regulares ſimiles, figura ex aggregato ęqualis erit duabus figuris ex datis rectis ſimilibus illi vna cum duplo trianguli rectãguli contenti à radio vnius, & perimetro alterius figurarũ ex datis rectis deſcriptarũ. Nam *h* triangulũ rectangulũ contentũ *h prop 17. huius.*

 à ra-

à radio figurę S, & perimetro figurę R eſt medium proportionale inter figuras ſimiles R, & S; eſt vero i figura Z media proportionalis inter figuras R, S, eo quod A B, B D, B C proportionales ſunt; atque figura M ęqualis eſt figuris R, & S vnà cum duplo figurę Z. Ergo figura M ęqualis eſt figuris R, & S illi ſimilibus, vnà cum duplo trianguli rectanguli contenti à radio figurę S, & perimetro figurę R.

i coroll. 2. prop. 18. l. 4.

COROLLARIVM IV.

Tandem exiſtentibus quibuſcunque figuris ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper datis rectis, & earum aggregato deſcriptis: erunt duę figurę ſuper datis rectis deſcriptę ſimul ſumptę iſoperimetrę figurę ex aggregato earundem. Nam, k vt radij, ſeu latera homologa, ita ſunt inter ſe perimetri figurarum ſimilium: eſtque figurę M latus A C ęquale lateribus, ei homologis A B, & B C figurarum R, & S. Ergo l perimeter figurę M ęqualis eſt perimetris figurarum R, & S.

k ex prop. 14. & 15. huius.

l coroll. 1. prop. 16. l. 3.

PROPOS. XX. THEOR. XIII.

Si ſuper duabus rectis lineis, ſuper earum differentia, atque ſuper media proportionali, inter eas deſcribantur figurę circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex differentia ęqualis differẽtię duarum figurarum ex illis rectis à duplo figurę ex media proportionali inter eaſdem.

Sit recta A B maior, & B C minor, earunq; differentia A C, & in ſemicirculo A D B deſcripto ſuper A B, eleuata ſit perpendicularis C D, & ducta D B, atque ſuper A B, B C, A C, B D, C D deſcriptę ſint quęlibet figurę circulares, vel rectilineę ſimiles & ſimiliter poſitę, vt in pręcedẽti propoſitione factum eſt. Dico figuram M ex differentia A C deſcriptam, ęqualem eſſe differentiæ inter ſummam figurarum R, & S ex inæqualibus dercriptarũ; & duplum figurę Z ex media a proportionali B D inter A B, & B C. Quoniam b figura R ex ſumma ipſarum A C, & C B ęqualis eſt ſummę figurarum S, M, & duplo figurę Y ex media proportionali inter A C, & C B. Ergo addita communi

a prop. 9. l. 4

b prop. 19. huius.



muni figura S : erunt figuræ R, & S, ſimul ſumptę, ęquales ſiguræ M duplo figuræ Y, & duplo figuræ S, ſimul ſumptis. Sed in *c* triangulo rectangulo B C D, duplum figurę Z ex hypotheniſa ęquale eſt duplo figurę S vnà cum duplo figurę Y. Igitur duę figurę R, & S, ſimul ſumptę, ęquales ſunt figurę M vnà cū duplo figurę Z; & ablato cōmuniter duplo figurę Z: erit figura M ex differentia A C, ęqualis exceſſui duarū figurarum R, & S ſupra duplū figurę Z ex media proportionali inter A B, & B C. Quod erat oſtendendum. *c prop. 18. huius.*

COROLLARIVM I. *Eucl. 7. II.*

Manifeſtum eſt, ſi dictę figurę fuerint quadrata, eſſe quadratum, ſuper differentia datarum linearum deſcriptum, æquale differentię inter duo quadrata ſuper eiſdem lineis deſcripta, & duplum parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis lineis contenti.

Nam ex hac propoſitione quadratum M ęquale eſt exceſſui duorum ei ſimilium quadratorum R, & S ſupra duplum quadrati Z; ſed *d* quadratum Z æquale eſt rectangulo A B C (eo quod *e* D B media proportionalis eſt inter rectas A B, & B C propter perpendicularē D C). Ergo quadratum M ęquale eſt exceſſui quadratorum R, & S ſupra duplum rectanguli A B C. *d coroll 2. prop. 14 l. 4* *e prop. 9. l. 4*

COROLLARIVM II.

Et, ſi dictę figurę fuerint circuli, ſectores, aut rectilineę regulares ſimiles: figura ex datarum linearum differentia ęqualis erit exceſſui duarum figurarum ſimilium illis ſuper datis lineis deſcriptarum ſupra duplum trianguli rectanguli contenti à radio vnius, & perimetro alterius figurarum ex datis rectis deſcriptarum.

Nam *f* triangulū rectangulū, contentum à radio figurę S, & perimetro figurę R, eſt mediū proportionale inter figuras ſimiles R, & S, & ideo *g* ęquale erit figurę Z. Et eſt figura M ęqualis differentię inter figuras R, S, & duplū figurę Z ex media proportionali inter A B, & B C, ex hac propoſitione. Ergo figura M eſt æqualis exceſſui duarum figurarum R, S ſupra duplum trianguli rectanguli, contenti à radio figuræ S, & perimetro figuræ R. *f prop. 17. huius.* *g coroll 2. prop 18. l. 4 & prop. 4. l. 3.*

CO-

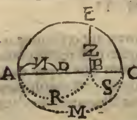
COROLLARIVM III.

Tandem in quibuſcunque figuris ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper datis rectis lineis, & earum differentia: erit perimeter figurę maioris maior perimetro figuræ minoris, & exceſſus æqualis erit perimetro figuræ ex differentia datarum
h coroll. 4. deſcriptę. Nam [h] perimeter figuræ R ex hypothenuſa trian-
prop. 19. guli rectanguli A D B ęqualis eſt perimetris figurarum M, &
huius. S ex ſegmentis deſcriptarum. Quare exceſſus perimetri figuræ R maioris ſupra perimetrum minoris figurę S ęqualis eſt perimetro figurę M ex differentia datarum deſcriptæ.

PROPOS. XXI. THEOR. XIV.

Si ſuper aggregato, & differentia duarum inæqualium rectarum linearum; atque ſuper media proportionali inter eas deſcribantur figurę circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitę: erit figura ex aggregato ęqualis figurę ex differentia vnà cum quadruplo figuræ ex media proportionali inter eaſdem.

Sit rurſus recta linea A B maior, & B C minor, & ſit B D æqualis minori B C; erit A C aggregatum, & differentia A D, ſitque B E media proportionalis inter A B, & B C, & ſuper eas deſcriptę ſint figuræ circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitę R, S, M, N, & Z. Dico figuram M ex aggregato ęqualem eſſe figuræ N ex differentia, vnà cum quadruplo figuræ Z ex media proportionali inter A B, & B C.



a prop. 19. huius. Quoniam [a] figura M ex aggregato ipſarum A B, & B C æqualis eſt figuris R, & S cum duplo fi-
b prop. 20. huius. guræ Z; atque [b] duę figurę R, & S ęquales ſunt figurę N ex differentia A D vnà cum duplo figurę Z. Ergo figura M ęqualis eſt figurę N, & quadruplo figurę Z, ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Eucl. 8. II.

Manifeſtum eſt, quòd, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale quadrato ex differentia datarum linearum deſcripto, vnà cum quadruplo parallelogrãmi rectanguli ſub inæqualibus rectis datis contenti. Nam quadrata R, S, N, M, & Z ſunt figuræ ſimiles; & ideo (ex hac propoſitione) quadratum M æquale erit quadrato N vnà cum quadruplo quadrati Z mediæ proportionalis B E inter inæquales rectas A B, & B C; eſtque *c* parallelogrammum rectangulum A B C æquale quadrato Z. Ergo quadratum M ęquale eſt quadrato N vnà cum quadruplo rectanguli A B C.

c Coroll. 2. prop. 14. l. 4.

COROLLARIVM II.

Et, ſi dictæ figurę fuerint circuli, ſectores, aut rectilineæ regulares ſimiles: erit figura ex aggregato ęqualis ei ſimili figuræ ex differentia datarum linearum deſcripta vnà cum quadruplo trianguli rectanguli, contenti à radio figurę ex vnà datarum, & perimetro figurę ex altera datarum.

Nam *d* triangulum rectangulum, contentum à radio figurę S, & perimetro figurę R, eſt medium proportionale inter ſimiles figuras R, & S, ſeu *e* ęquale eſt figurę Z ex media proportionali inter A B, B C: Sed figura M ęqualis eſt figuris N, & quadruplo Z. Ergo figura M ęqualis eſt figurę N vnà cum quadruplo trianguli rectanguli, contenti à radio figurę S, & perimetro figurę R.

d prop. 17. huius.
e Coroll. 2. prop. 18. lib. 4. & prop. 4. lib. 3.

COROLLARIVM III.

Tandem qualeſcunque ſint figurę ſimiles, & ſimiliter poſitę R, S, M, N: erit exceſſus perimetri figurę M ex aggregato ſupra perimetrum figurę N ex differentia datarum linearum, ęqualis duplo perimetri minoris figurę S.

Nam *f* exceſſus perimetri figurę M ſupra perimetrum figurę R eſt perimeter figurę S; Et exceſſus perimetri figurę R ſupra perimetrum figurę N ęqualis eſt perimetro figurę ſuper B D, ſiue ſuper ei ęqualem B C deſcriptę; ideſt perimetro figurę S. Quare exceſſus perimetri figurę M ſupra perimetrum figurę N ęqualis eſt duplo perimetri figurę S.

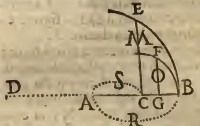
f Coroll. 3. prop. 20. huius.

PRO-

PROPOS. XXII. THEOR. XV.

Si ſuper duas rectas lineas inęquales, atque ſuper media proportionali inter aggregatum, differentiamque earundem, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit differentia figurarum ex inęqualibus rectis lineis deſcriptarum ęqualis figuræ ex illa media proportionali deſcriptę.

Sint duæ rectæ A B maior, & eius portio A C, & [a] ipſi A C addatur D A æqualis maiori A B, erit D C ſumma, & C B differentia ipſarum A B, & A C; ponaturque [b] C E media proportionalis inter D C, & C B; & ſuper A B, A C, C E deſcriptæ ſupponantur figuræ R, S, & M circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitę. Dico exceſſum figuræ R ſupra figuram S equalem eſſe figuræ M, ex media proportionali C E. Secetur [c] C B bifariam in G; & [d] F G fiat media proportionalis inter A G, G B; & [e] ſuper F G deſcribatur figura O ſimilis, & ſimiliter poſita ipſis R, S, & M. Quia [f] D B ad eius dimidiam A B eſt, vt C B ad eius ſubduplam B G: Ergo permutando [g] D B ad B C eſt, vt A B ad B G; [h] & diuidendo D C ad C B eſt, vt A G ad G B. Quaré [i] earum ſubduplicatæ rationes E C ad C B, & F G ad G B eædem erunt (cùm tres D C, C E, C B proportionales ſint, pariterque tres A G, G F, G B ſint proportionales). Et iterum [k] permutando E C ad F G erit, vt C B ad B G; eſt verò C B dupla ipſius G B: Igitur [l] E C dupla eſt ipſius F G. Et propterea [m] figura M quadrupla erit figurę O; cùmque [n] quadruplum figurę O ex media proportionali inter A G & G B ſit exceſſus figurę R ex aggregato ſupra figuram S ex differentia earundem A G, & G B (cum C G ęqualis facta ſit ipſi G B). Igitur figura M eſt exceſſus figurę R ſupra figuram S. Quod erat oſtendendum.



a prop. 3. lib. 1.
b prop. 10. l. 4.
c prop 9. l. 1
d prop. 10. lib. 4.
e prop. 16. lib. 4.
f def. 8. l. 3.
g prop. 12. l. 3.
h prop 13. l. 3.
i coroll. 3. prop 19. l. 3
k prop. 12. l. 3.
l def. 8. l. 3.
m coroll 3. prop. 17. l. 4.
n prop. 21. huius.

COROLLARIVM.

Eucl. 5.6. 11.

Manifeſtum eſt differentiam duorum quadratorum equalem eſſe parallelogrammo rectangulo contento ſub differentia, & aggregato laterum. Nam quadrata ſunt figuræ ſimiles; & ideo, ex hac propoſitione, exceſſus quadrati R ſupra quadratū S æqualis eſt quadrato M ex E C media proportionali inter aggregatum D C, & differentiam C B eorundem laterum A B, A C deſcripto; ſed quadrato o M æquale eſt parallelogrammum rectangulum D C B, cùm hoc ab extremis; illud verò ex media trium proportionalium D C, C E, C B facta ſint. Ergo exceſſus quadrati R ſupra quadratum S æqualis eſt rectangulo ſub C B differentia laterum, & ſub D C aggregato eorundem B A, & A C contento.

o coroll. 2. prop 14. l. 4.

SCHOLIVM.

Et, ſi dictæ figuræ fuerint circuli, ſectores, aut rectilineæ regulares ſimiles; erit differentia figurarum æqualis triangulo rectangulo contento à differentia radiorum, & ab aggregato ambituum earundem figurarum.

Super aggregato D C, & differentia C B ipſarum B A, A C deſcriptæ ſupponantur duæ figuræ N, & Q ſimiles ipſis R, S, M. Et p quoniam ambitus figuræ N ex aggregato ipſarum D A, ſeu B A, & A C æqualis eſt aggregato ambituum figurarum R, & S; & radius figuræ Q ex differentia earundem B A, A C deſcriptæ æqualis eſt differentiæ radiorum figurarum R, & S, eo quod B A, A C, C B, aut ſunt radij, aut latera homologa earundem figurarum q proportionalia radijs. Propterea triangulum rectangulum, contentum ſub ambitu figuræ N, & radio figuræ Q, erit contentum ſub aggregato ambituum, & differentia radiorum figurarum R, & S. At r triangulum rectangulum contentum à radio figuræ Q, & ambitu figuræ N æquale eſt figuræ M, cùm ambo media proportionalia ſint inter ſimiles figuras N, & Q. Et ex hac propoſitione eſt M exceſſus figuræ R ſupra figuram S. Ergo triangulum rectangulum contentum ſub aggregato ambituum, & differentia radiorum figurarum R, & S æquale eſt differentiæ earundem figurarum R, & S.

p coroll. 4. prop. 19. huius.

q prop 10. 15. & 17. huius.

r prop. 17. huius.

PROPOS. XXIII. THEOR. XVI.

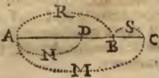
Eu. l. 9. 10. 11.

Si ſuper duabus rectis lineis inæqualibus, & earum aggregato, atque differentia deſcriptæ fuerint quælibet circulares,

 vel

vel rectilineæ figuræ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erunt duæ figuræ ex aggregato, & ex differentia, ſimul ſumptæ, ęquales duplo figurarum ab inęqualibus lineis datis deſcriptarum.

Super duabus rectis lineis inæqualibus A B, & B C, & earum aggregato A C, earumque differentia A D ſint deſcriptę quęlibet circulares, aut rectilineę inter ſe ſimiles figurę, & ſimiliter poſitę R, S, M, & N. Dico duas figuras M ex aggregato, & N ex differentia datarum, ſimul ſumptas, ęquales eſſe duplo figurę R vnà cum duplo figurę S, ex datis lineis deſcriptarum.



a prop. 21. huius. Quoniam *a* figura M ęqualis eſt figurę N vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter R, & S: Ergo addita communiter figura N, erunt figurę M, & N ęquales ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N & quadruplo medij proportionalis inter figuras

b prop. 20. huius. R, & S; ſunt *b* verò figurę R, & S ex inęqualibus rectis A B, B C deſcriptę ęquales figurę N ex differentia vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R, & S: Ergo duplum figuræ R, vnà cum duplo figurę S ęquale eſt iiſdem ſex ſpatijs, ſcilicet duplò figurę N vnà cum quadruplo medii proportionalis inter figuras R, & S. Quare figurę M, & N ex aggregato, & differentia deſcriptę ęquales ſunt duplo figurę R vna cum duplo figurę S, quę ex inęqualibus datis rectis A B, & B C deſcribuntur. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. XXIV. THEOR. XVII.

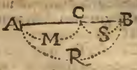
Eucl. 4. XIII.

Si ſuper tota, & ſuper ſegmentis rectę lineę extrema, ac media ratione diuiſæ deſcriptæ fuerint figurę circulares, vel rectilineę ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitæ; quę ex tota, & minori ſegmento vtreque ſimul triplę ſunt figurę ex maiori ſegmento deſcriptę. Et ſi duę figurę ex tota, & ex minori ſegmento triplę fuerint eius, quę ex maiori ſegmento deſcribitur: erit tota recta linea ſecta extrema, ac media ratione.

Sit recta A B ſecta extrema, & media ratione in C, cuius ſegmentum maius A C: & deſcriptę ſint ſuper A B, A C, & C

B tres

B tres circulares, aut rectilineę figurę R, M, & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitę. Dico figuram R ex tota, vna cum figura S, ex minori ſegmento, triplam eſſe figurę M ex maiori ſegmento deſcriptæ. Quoniam ſuper duas rectas inęquales A B, & B C, atque earum differentiam A C deſcriptę ſunt tres figurę R, S & M ſimiles, & ſimiliter poſitę: Ergo a duę figurę R, & S ſuper inęqualibus rectis A B, B C deſcriptę ęquales ſunt figuræ M ex differentia A C, vnà cum duplo ſpatij medij proportionalis inter figuras R, & S: Eſtque b figura M media proportionalis inter figuras R, & S ei ſimiles; propterea quod tres rectę A B, A C, C B proportionales ſunt. Ergo figurę R, & S ęquales ſunt triplo figuræ M.



a prop. 20. huius.
b coroll. 2. prop. 18. l. 4.

Secundò ſint figurę R, & S ex tota A B, & minori ſegmento C B, ſimul ſumptæ, triplæ figuræ M illis ſimili, & ſimiliter poſitę ex maiori ſegmento A C. Dico rectam A B ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Quoniam c duę figurę R, & S ęquales ſunt figuræ M, ex differentia, vna cum duplo medij proportionalis inter R, & S; erant autem duę figuræ R, & S ęquales triplo figurę M: Ergo triplum figuræ M ęquale eſt figuræ M, vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R, & S; & ablata communi figura M, erit duplum figuræ M ęquale duplo medij proportionalis inter figuras R, & S; ideoque figura M ęqualis erit ſpatio medio proportionali inter figuras ei ſimiles R, & S. Quare d figurarum R, M, S tria homologa latera A B, A C, & C B proportionalia erunt; & e propterea recta A B ſecta erit in C extrema, & media ratione. Vt erat propoſitum.

c prop. 20. huius.
d coroll. 2. prop. 18. l. 4.
e prop. 5. lib. 4.

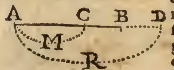
PROPOS. XXV. THEOR. XVIII.

Eucl. 6. XIII.

Si ſuper aggregato totius & minoris ſegmenti, atque ſuper maiori ſegmento rectę lineæ extrema, ac media ratione diuiſæ, deſcriptę fuerint figurę circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitę, quę ex aggregato deſcribitur figura quintupla eſt eius, quę ex maiori ſegmento deſcribitur. Et ſi figura ex aggregato totius, & minoris ſegmenti deſcripta quintupla fuerit eius, quę ex ſegmēto maiori deſcribitur: erit tota recta linea diuiſa extrema, & media ratione.

Sit recta linea A B ſecta extrema, & media ratione in C, cuius ſegmentum minus C B; producaturque B D ęqualis minori ſegmento C B; atque ſuper A D aggregato duarum A B, & B C, atque ſuper differentia earum, ſeu maiori ſegmento A C, factę ſint quęlibet figurę circulares, vel rectilineę R, & M inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitę. Dico figuram R quintu-
a prop. 21. huius. plam eſſe figurę M. Quoniam *a* figura R ex A D aggregato inęqualium rectarum A B, & B D, ſeu B C, ęqualis eſt figurę M ex A C illarum differentia vna cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſuper inęquales A B, & B C, quę ſi-
b coroll. 2. prop. 18. l. 4 miles ſint, & ſimiliter poſitę ipſis R, & M. Eſtque *b* figura M media proportionalis inter figuras ei ſimiles ſuper A B, & B C ſimiliter deſcriptas (cùm recta A C media proportionalis ſit poſita inter A B, & B C). Ergo figura R quintupla eſt figurę M.

Secundò ſit figura R ſuper aggregato totius A B, & ſegmenti C B deſcripta, quintupla figurę M ſimilis ipſi R, quę ſuper earum differentia A C ſimiliter deſcribitur. Dico rectam A B ſectam eſſe extrema, &



c prop. 21. huius. media ratione in C, cuius minus ſegmentum erit C B. Quoniam *c* figura R ex aggregato deſcripta ęqualis eſt figurę M ex differentia vna cum quadruplo ſpatii medii proportionalis inter figuras ſimiles eis, & ſimiliter poſitas ſuper rectas A B, & B C; & ex hypotheſi figura R ęqualis eſt quintuplo figurę M: Ergo quintuplũ figurę M ęquale eſt figurę M vnà cum quadruplo dicti ſpatii medii proportionalis; & ablata cõmuni figura M: erit quadruplũ figurę M ęquale quadruplo dicti ſpatii medii proportionalis; ideoq; figura M ęqualis erit ſpatio medio proportionali in-
d coroll. 2. prop 18 l. 4 ter figuras ei ſimiles ſuper A B, & B C ſimiliter deſcriptas; propterea que *d* tres rectę B A, A C, & C B proportionales
e prop. 25. lib 4. erunt; & *e* A B ſecta erit in C extrema, & media ratione. Quod erat oſtendendum.

Eucl. 3. XIII.

PROPOS. XXVI. THEOR. XIX.

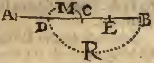
Si ſuper aggregato minoris, & ſemiſſis maioris, atque ſuper ſemiſſe maioris ſegmentorum eiuſdem rectę lineę extrema, ac media ratione diuiſę, deſcriptę fuerint duę circulares;

res, aut rectilineę figurę inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitę: quę ex aggregato deſcribitur figura quintupla eſt eius, quę ex ſemiſſe maioris ſegmenti deſcribitur. Et ſi figura, ex aggregato minoris ſegmenti, & ſemiſſe maioris quintupla fuerit figurę, quę ex ſemiſſe maioris ſegmenti deſcribitur: erit tota recta linea diuiſa extrema, & media ratione.

Sit tota recta B A ad A C, vt A C ad minus ſegmentum C B; & ſecta ſit A C bifariam in D; atque ſuper B D aggregato ſegmenti minoris B C, & D C ſemiſſe maioris; nec non ſuper D C ſemiſſe maioris deſcriptę ſupponantur quęlibet figurę R, & M circulares, vel rectilineę ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitę. Dico figuram R quintuplam eſſe figurę M. Secetur *a* C B bifariam in E. Et quia *b* D C ad C E eſt, vt A C duplum primę ad C B duplum ſecundę; & eſt A B ſecta in C extrema, & media ratione. Ergo *c* D E quoque in C ſecatur extrema, & media ratione, cuius ſegmentum minus erit C E. Cumque ſint deſcriptę duę figurę ſimiles, & ſimiliter poſitę, R quidem ſuper D B aggregato totius D E, & E B, ſeu E C minoris ſegmenti; atque figura M ſuper maiori ſegmento D C. Ergo *d* figura R quintupla eſt figurę M. Quod erat primum.

a prop. 9. l. 1.
b prop. 11.
c prop. 26. l. 4.
d prop. 25. huius.

Secundò ſit figura R, ſuper D B aggregato ſegmenti minoris C B, & D C ſemiſſis deſcripta, quintupla figurę M illi ſimili ſuper D C ſemiſſe maioris ſegmenti A C ſimiliter deſcriptę. Dico rectam totam A B ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Secta *e* C B bifariam in E. Quia figura R ſuper aggregato totius D E, & minoris ſegmenti C E, ſeu E B deſcripta, quintupla ponitur figurę M, ſimili priori, ſuper maiori ſegmento D C ſimiliter deſcriptę. Ergo *f* recta D E in C ſecatur extrema, & media ratione; ſed, *g* vt D C ad C E, ita eſt A C dupla primę ad C B duplam ſecundę. Ergo *h* recta A B quoque ſecatur in C extrema, & media ratione, cuius ſegmentum minus eſt C B. Quod erat oſtendendum.



e prop. 9. l. 1.
f prop. 25. huius.
g prop. 11. lib. 5.
h prop. 26. lib. 4.

PROPOS. XXVII. THEOR. XX.

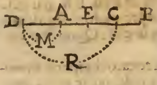
Eucl. 1. XIII.

Si ſuper aggregato ſemiſſis totius, eiuſque ſegmenti maioris atque,

atque ſuper eadem ſemiſſe rectę lineę diuiſę extrema, ac media ratione, deſcriptę ſint duę quęlibet figurę circulares, vel rectilineę ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitę; quæ ex aggregato deſcribitur figura, quintupla eſt eius, quę ex ſemiſſe totius deſcribitur, figurę. Et, ſi figura ex aggregato ſemiſſis totius rectæ lineę, eiuſq; ſegmēti maioris quintupla fuerit figurę ei ſimili, quę ex ſemiſſe totius ſimiliter deſcribitur: erit tota recta linea diuiſa extrema, & media ratione.

Sit recta linea A B ſecta in C extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius A C; & producta ſit A D ęqualis medietati totius A B; atque ſuper D C aggregato ſegmenti maioris A C, & D A ſemiſſe totius; nec non ſuper D A ſemiſſe totius deſcriptę ſupponantur duę figurę circulares, vel rectilineę R, & M ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitę. Dico figuram R ex aggregato quintuplam eſſe figurę M ex ſemiſſe totius deſcriptę. Secetur *a* A C biſariam in E, & quia *b* D A ad A E eſt, vt B A duplum primę ad A C duplum ſecundæ; *c* vel vt A C ad C B, cùm ſit A B ſecta in C extrema, ac media ratione. Ergo *d* D E quoque in A extrema, ac media ratione ſecatur, cuius ſegmentum minus eſt A E. Cùmque duę figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitę, R quidem deſcripta eſt ſuper aggregato totius A E, eiuſque minoris ſegmenti E C, vel A E; & figura M deſcripta eſt ſuper eius maiori ſegmento D A. Ergo *e* figura R quintupla eſt figuræ M. Quod erat primum.

a prop.9 l.1
b prop. 11. lib.3.
c prop.25. lib.4.
d prop.26. lib.4.
e prop.25. huius.



Secundò figura R ſuper D C aggregato ipſius D A ſemiſſis totius A B, & ſegmenti maioris A C deſcripta, quintupla ſit figuræ M illi ſimili ſuper D A ſemiſſe totius A B ſimiliter deſcriptæ. Dico totam rectam lineam A B ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Secetur *f* A C biſariam in E. Et quoniam figura R ſuper D C aggregato totius D E, eiuſque ſegmenti minoris E C, vel A E deſcripta, quintupla eſt figuræ M ei ſimili ſuper differentia, vel maiori ſegmento D A deſcriptæ: Ergo *g* D E ſecatur in A extrema, & media ratione; ſed, *h* vt D A ad A E, ita eſt B A dupla primæ ad A C duplam ſecundę. Ergo *i* ſimiliter recta A B ſecatur in C extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum eſt A C. Quod erat oſtendendum.

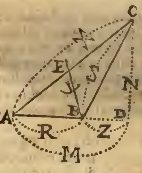
f prop.9.l.1
g prop.25. huius.
h prop.11. lib.3.
i prop.26. lib.4.

PRO-

PROPOS. XXVIII. THEOR. XXI.

Si ſuper tribus lateribus trianguli ambligonij, atque ſuper media proportionali inter latus circa, angulum obtuſum, eiuſque productionem vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem. deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere obtuſum angulum ſubtendente ęqualis ſummę figurarum ex lateribus obtuſum angulum ambientibus, vnà cum duplo figurę ex illa media proportionali deſcriptę.

In triangulo A B C ſit angulus C B A obtuſus, & a ab angulo C ducta C D perpendiculari ſupra A B ſecante eam in D. Patet b perpēdicularem C D cadere extra triangulum ad partes acuti anguli C B D; & fiat c B E media proportionalis inter A B, & B D, & ſuper lateribus A C, B C, A B, B E, A D, B D, & C D deſcriptę ſint quelibet figuræ circulares, vel rectilineę X, S, R, Y, M, Z, & N inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram X ex latere ſubtendēte obtuſum angulum deſcriptam, æqualem eſſe duabus figuris R, & S ex lateribus continentibus angulum obtuſum, vnà cum duplo figuræ Y ex B E media proportionali inter A B, & B D. Quia in triangulo A D C rectus eſt angulus D. Ergo d figura X æqualis eſt duabus figuris M, & N: ſed figura e M ex A D aggregato rectarum A B, & B D æqualis eſt duabus figuris R, & Z ex eiſdem rectis deſcriptis, vnà cum duplo figuræ Y, ex media proportionali inter A B & B D. Ergo figura X æqualis eſt figuris R, Z, & N cum duplo figuræ Y: Sed f figura S ęqualis eſt duabus figuris Z, & N (propterea quod in triangulo C B D rectus eſt angulus D.): Ergo figura X ęqualis eſt duabus figuris R, & S vna cum duplo figuræ Y ex media proportionali inter latus A B, & productionem eius B D vſque ad perpendicularem C D. Quod erat oſtendendum.



a prop. 11. lib. 1.
b coroll. 8. prop. 18. l. 1
c prop. 10. l. 4.
d prop. 18. huius.
e prop. 19. huius.
f prop. 18. huius.

CO-

Eucl. 12 II. COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata eſſe quadratum ex latere ſubtendente angulum obtuſum ęquale duobus quadratis ex lateribus dictum obtuſum angulum ambientibus, vnà cum duplo parallelogrammi rectanguli ſub vno latere circa obtuſum angulum, & ſub eius productione vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem.

g coroll. 2. prop. 14. l. 4. Nam *g* parallelogramum rectangulum A B D æquale eſt quadrato Y ex B E media proportionali inter A B, & B D, eſtque quadratum X ęquale quadratis R, & S, & duplo quadrati Y (ex hac propoſitione, cum quadrata ſint inter ſe ſimili a): Ergo quadratum X ęquale eſt quadratis R, & S, & duplo rectanguli parallelogrammi A B D.

COROLLARIVM II.

Et ſi dictæ figuræ fuerint circuli, ſectores, aut rectilineę regulares ſimiles & ſimiliter poſitę, erit figura ex latere ſubtendente angulum obtuſum æqualis duabus figuris ex lateribus obtuſum angulum ambientibus, vnà cum duplo trianguli rectanguli contenti ſub radio figuræ ex latere circa angulum obtuſum, & ſub perimetro figurę ex productione eiuſdem vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, deſcriptę.

h prop 17. huius. Nam *h* triãgulum rectangulũ contentum ſub radio figuræ R, & perimetro figurę Z eſt medium proportionale inter figuras regulares ſimiles, vel circulos R, & Z, & ideo *i* ęquale

i coroll 2. prop 18 l 4. & prop. 4. lib. 3. eſt figurę Y, quę pariter media proportionalis eſt inter figuras R, & Z, cum latera A B, B E, & B D proportionalia ſint. Quare figura X ęqualis erit figuris R, & S vna cum duplo trianguli rectanguli ſub radio figurę R, & perimetro figuræ Z contenti.

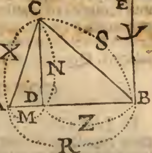
PROPOS. XXIX. THEOR. XXII.

Si ſuper tribus lateribus cuiuslibet trianguli, atque ſuper media proportionali inter latus circa angulum acutum, eiuſque ſegmentum vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, deſcriptę fuerint quęlibet figurę circulares, vel rectilineę ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitę; erit

figura

figura ex latere acutum angulum ſubtendente ęqualis exceſſui duarum figurarum ex lateribus eundem acutum angulum continentibus ſupra duplum figuræ ex illa media proportionali.

In triangulo A B C ſit angulus B acutus; & ſuper *a* latus A B acutum angulum continens cadat ab oppoſito angulo C perpendicularis C D, ſecans *b* latus A B ad partes acuti anguli in D; & *c* B E ſit media proportionalis inter B A, & B D, & ſuper A C, A B, B C, E B, A D, D B, & C D fiant figuræ quælibet X, R, S, M, Z, Y, & N circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitę. Dico figuram X ex latere ſubtendente angulum acutum B, ęqualem eſſe exceſſui duarum figurarum R, & S ex lateribus acutum angulum continentibus ſupra duplum figurę Y ex media proportionali E B. Quoniam *d* in triangulo A C D rectus eſt angulus D. Ergo figura X ęqualis eſt figuris M, & N; & figura X cum duplo figuræ Y, erit ęqualis figuris M, & N cum duplo figuræ Y; ſed figuris R, Z æqualis eſt figura M ex differentia laterũ A B, D B, cũ duplo figuræ Y ex media proportionali. Ergo figura *e* X vnà cũ duplo figurę Y ęquatur tribus figuris N, R, & Z; eſt verò *f* figura S ęqualis figuris N, & Z (cum in triangulo C D B angulus D rectus ſit). Igitur figura X vna cum duplo figurę Y ęqualis eſt duabus figuris R, & S, & ablato communiter duplo figurę Y: erit figura X ęqualis exceſſui figurarum R, & S ſupra duplum figurę Y. Vt fuit propoſitum.



a *prop. 11. l. 1.*
b *coroll 8. prop. 18. l. 1*
c *prop. 10. lib. 4.*
d *prop. 18. huius.*
e *prop. 20. huius.*
f *prop. 18. huius.*

COROLLARIVM I.

Eucl. 13. 11.

Manifeſtum eſt, ſi dictę figurę fuerint quadrata, eſſe quadratum lateris acutum angulum ſubtendentis ęquale exceſſui duorum quadratorum laterum, acutum angulum continentium ſupra duplum parallelogrammi rectanguli ſub vno latere circa angulum acutum, & ſub eius ſegmẽto ab eodem acuto angulo vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, contenti. Nam *g* parallelogrammum rectangulum A B D ęquale eſt quadrato Y ex media proportionali

g *coroll 2. prop. 14. l. 4.*

inter A B,& B D. Ergo ex hac propoſitione defectus quadrati X æqualis eſt differentiæ duorum quadratorum R, & S à duplo parallelogrammi rectanguli A B D.

Eucl. 48. I.

COROLLARIVM II.

Patet ex his duabus propoſitionibus, quòd ſi ſuper tribus lateribus trianguli deſcriptæ fuerint tres figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, quarum vna æqualis fuerit reliquis duabus ſimul ſumptis: triangulum erit rectangulum. Nam ſi acutangulum eſt, vel obtuſangulum: erit figura ex latere angulum acutum, vel obtuſum ſubtendente inæqualis duabus figuris reliquis. Quod eſt contra hypotheſin.

COROLLARIVM III.

Et, ſi dictæ figuræ fuerint circuli, ſectores, aut rectilineæ figuræ regulares ſimiles: erit figura ex latere acutum angulum ſubtendente æqualis differentiæ duarum figurarum ex lateribus acutum angulum continentibus à duplo trianguli rectanguli contenti ſub radio figuræ ex latere acutum angulum continente, & ſub perimetro figuræ ex ſegmento eiuſdem lateris ab angulo acuto vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, deſcriptæ. Nam *b* triangulum rectangulum contentum ſub radio figuræ R, & perimetro figuræ Z medium proportionale eſt inter figuras ſimiles regulares, vel circulares R, & Z; ideoque *i* æquale erit figuræ Y. Quare figura X æqualis eſt differentiæ duarum figurarum R, & S à duplo trianguli rectãguli contenti à radio figuræ R, & perimetro figuræ Z.

b *prop.* 17. *huius.*

i *coroll.* 2. *prop.* 18. *l.* 4. & *prop.* 4. *lib.* 3.

Eucl. 12. XIII.

PROPOS. XXX. THEOR. XXIII.

Si ſuper lateribus, altitudinibus, & radijs trianguli, & hexagoni regularium ab eodem circulo comprehenſorum deſcriptæ fuerint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere trianguli tripla figuræ ex latere hexagoni ſeſquitertia figuræ ex eius altitudine, & duodecupla figuræ radii eiuſdem trianguli, æqualis figuræ ex altitudine hexagoni, & quadrupla figuræ ex radio hexagoni deſcriptæ.

In

In circulo, cuius radius D A inſcripta ſint triangulum A B C, & hexagonum A L B C regularia, & radius A D, qui a ſe- a coroll. 1.
cat angulum B A C bifariam, ſecabit b quoque arcum B C in prop. 3. hu-
E, & ſubtenſum latus B C bifariam, & perpendiculariter in ius.
H, & propterea A D E diameter erit; ducatur c poſtea D G b prop. 19.
perpendicularis ſuper B E, iungatúrque B D, & ponantur l. 2.
quęlibet figurę circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter c prop. 11.
poſitę, M quidē ſuper trianguli latere A B, N ſuper hexagoni lib. 1.
latere B E, X ſuper trianguli altitudine A H, Z ſuper trianguli radio D H, R ſuper hexagoni radio D G. Dico figuram M ęqualem eſſe figuræ ex altitudine hexagoni, & quadruplam figuræ R, & triplam figurę N, & ſeſquitertiam figurę X, atque duodecuplam figurę Z. Quoniam duo d anguli E B A, A F B recti ſūt in ſemicirculis E B A, & F A B. Ergo e A B erit diſtantia laterum A F, B E æquidiſtantium in hexagono,



d prop. 20. l. 2.
e prop. 14. l. 1.

& ideo A B erit altitudo hexagoni. Poſtea quia f triangulum f ex ſchol.
D B E æquilaterum eſt, erit g perpendicularis D G à vertice pr. 3. huius.
ad baſim ęqualis perpendiculari B H ſemiſſi lateris B C, vel g coroll 1.
A B trianguli A B C. h & baſis D E ſecta erit bifariā in H; eſtq; prop. 1. l. 4.
radius A D ęqualis D E. Ergo A H altitudo trianguli tripla h cor. prop.
erit ipſius H E, vel D H radij triāguli, & i propterea qualium 2. l. 2.
partium figura Z eſt vna, erit figura X partes nouem, atque i coroll. 3.
figura N partes quatuor (eo quod B E latus hexagoni ęquale prop. 17. l. 4
eſt radio circuli D E duplo ipſius D H). Rurſus quia in triangulo A B E ab angulo k recto B perpendicularis B H ſecat ba- k prop. 20.
ſim A E in H; igitur l E A, B A, & A H proportionales ſunt; l. 2.
& propterea m figura M ad X erit in duplicata ratione late- l prop. 9 l. 4
rum, ideſt n vt E A ad A H, ſeu vt quatuor ad tria, vel vt duo- m prop. 17.
decim ad nouem: eſt verò D G ſemiſſis ipſius A B; ergo o qua- l. 4.
lium figura M eſt duodecim, erit figura R tres partes, & ea- n prop. 19.
rundē erat figura Z vna pars. Igitur figura M ex latere triangu- l. .
li, & ex altitudine hexagoni, duodecupla eſt figurę Z, & tripla o coroll. 3.
figurę N, & quadrupla figurę R, & ſeſquialtera figurę X. Quod prop. 17. l. 4
erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Conſtat ex hac propoſitione, quòd circuli diameter ſeſquitertia eſt altitudinis trianguli, & quadrupla radij eius, & circuli radius eſt ſubſeſquialter altitudinis inſcripti trianguli regularis, & duplus radij eius. Oſtenſa enim fuit diameter A E ſeſquitertia ipſius A H, & quadrupla ipſius D H, atq; radius D E duplus triangularis radij D H, & ſubſeſquialter altitudinis H A.

PROPOS. XXXI. THEOR. XXIV.

Si ſuper lateribus altitudinibus, & radijs quadrati trianguli, & hexagoni regularium ab eodem circulo comprehenſorum fiant quælibet figuræ circulares, aut rectilineæ ſimiles: & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere quadrati dupla figuræ ex latere hexagoni ſubſeſquialtera figuræ ex latere trianguli, quadrupla figuræ ex radio quadrati, octupla figuræ ex radio trianguli, dupla ſupertripartiens tertias figuræ ex radio hexagoni, ſubſeſquialtera figuræ altitudinis hexagoni, & ſubſeſquioctaua figuræ altitudinis trianguli.

In circulo, cuius radius E A inſcriptum ſit quadratum A B C D, cuius radius E H, & deſcriptæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, M quidem ſuper quadrati latere A B, vel altitudine eius, X ſuper radio E H, & N ſuper circuli radio A E, & aliæ ijs ſimiles figuræ ſuper lateribus, radiis, & altitudinibus trianguli, & hexagoni in eodem circulo inſcriptorum. Oſtendendum eſt figuram M habere ad reliquas figuras proportiones expoſitas. Coniungatur recta E B. Quoniam a angulus A E B ad centrum quadrati rectus eſt, & cadit ab angulo recto perpendicularis E H ſuper baſim A B eam b diuidens in E bifariam, cum ex centro circuli ducatur. Ergo c recta E A media proportionalis eſt inter A B, A H; pariterque recta E H media proportionalis eſt inter æqualia ſegmenta B H, H A; & propterea E H æqualis erit ſemiſſi ipſius A B: vnde d figura M ex latere quadrati erit quadrupla figuræ X ex radio eiuſdem; pariterque e figura M ad ei ſimilem figuram N erit, vt B A ad eius ſubduplam A H; & propterea qualium partium figura M eſt octo, erit figura

a ex prop. 3. huius.
b prop. 2. l. 2
c prop. 9. l. 4
d coroll. 3. prop. 17. l. 4
e coroll. 3. prop. 17. l. 4

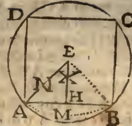


figura X partes duę, & figura N ex radio circuli, ſeu f ex latere inſcripti hexagoni regularis, erit partes quatuor; ſed g qualium figura ex latere hexagoni eſt quatuor partes, fuit figura ex eius altitudine duodecim, & figura ex eius radio tres partes, atq; eatundem fuit figura lateris inſcripti trianguli regularis duodecim partes, & figura ex eius altitudine partes nouem, & figura ex eius radio vna pars. Igitur figura M ex latere quadrati, ſeu ex eius altitudine quadrupla erit figuræ ex eius radio, dupla figuræ ex latere hexagoni, ſubſeſquialtera figuræ altitudinis eius, dupla ſuperbipartiens tertias figuræ ex radio eiuſdem, atque ſubſeſquialtera figuræ lateris trianguli, octupla figuræ radij eius, & ſubſeſquioctaua figuræ ex altitudine eiuſdem trianguli. Quæ erant oſtendenda.

f ſchol prop. 3 huius. g prop 30. huius.

SCHOLIVM.

Latus inſcripti quadrati medium proportionale eſt inter aggregatum lateris inſcripti hexagoni & lateris inſcripti decagoni, atque duplum lateris inſcripti decagoni.

Nam h recta, compoſita ex latere hexagoni, & latere decagoni in eodem circulo deſcriptorum ſecatur extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum eſt latus hexagoni. Ergo i parallelogrammum rectangulum ſub aggregato lateris decagoni, & lateris hexagoni, & ſub duplo lateris decagoni ęquale eſt duplo quadrati ex latere hexagoni. Sed ex hac propoſitione quadratum circulo inſcriptum duplum eſt quadrati ex latere hexagoni. Ergo quadratum circulo inſcriptum ęquale eſt rectangulo parallelogrammo contento ſub aggregato laterum decagoni & hexagoni, & ſub duplo lateris decagoni; ideoque k latus inſcripti quadrati medium proportionale eſt inter aggregatum laterum decagoni, & hexagoni; atque duplum lateris decagoni.

h prop. 8. huius. i coroll 2. prop. 14. l. 4. k coroll. 2. prop. 14. l. 4.

PROPOS. XXXII. THEOR. XXV.

Eucl. 10. XIII.

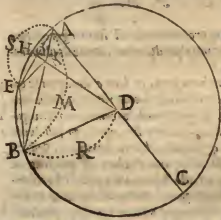
Si ſuper lateribus pentagoni, hexagoni, & decagoni regularium ab eodem circulo comprehenſorum fiant quęlibet figurę circulares, aut rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitę: erit figura ex latere pentagoni ęqualis duabus figuris ſimul ſūptis ex latere hexagoni, & ex latere decagoni deſcriptis.

In

In circulo A C B ſit A B latus inſcripti pentagoni, E A latus inſcripti decagoni regularium, & radius D E erit latus inſcripti hexagoni; & ſuper his lateribus deſcriptę ſint quęlibet circulares, vel rectilineę figurę ſimiles, & ſimiliter poſitę, M quidem ſuper A B, R ſuper D B, & S ſuper E A. Dico figuram M ęqualem eſſe duabus figuris R, & S ſimul ſumptis.

a ſchol prop. 3. huius.

Secetur *b* arcus A E ſubtenſus à latere decagoni bifariā in H, ſicuti *c* arcus A B in E ſectus fuerat bifariam; eritque arcus A H quarta pars arcus A B, & tertia pars arcus B H, & iungatur radius D H ſecans *d* bifariam, & perpendiculariter latus decagoni in O, & A B in K: iunganturque E K; B E, & diameter A C. Quoniam in triangulis A O K, & E O K circa angulos rectos ęquales ad O ſunt duo latera A O, & E O ęqualia, & O K commune. Ergo *e* angulus K E H ęqualis eſt angulo K A H, & *f* ęquales quoque ſunt anguli E B A, & E A B, cum inſiſtāt peripherijs ęqualibus E A, B E, ergo anguli A E K, A B E ęquales ſunt, eſtq; angulus B A E cōmunis in triangulis B E A, E K A: Ergo *g* inter ſe ſunt ſimilia. Quare B A ad A E erit, vt E A ad A K, ideoque *h* figura M ad ei ſimilem, & ſimiliter poſitā figuram S erit vt B A ad A K. Rurſus quia, vt arcus E A *i* decima pars eſt totius peripherię A B C A, ita arcus *k* A H ſemiſſis illius decima pars eſt ſemiperipheriæ A B C; & eſt arcus B H triplus arcus A H. Ergo qualium partium arcus A B C eſt decem erit B H tres, & B C ſex partes; ideoque arcus B C duplus erit ipſius arcus B H; & *l* angulus C D B duplus erit anguli B D H; ſed *m* angulus C D B ad centrum duplus eſt anguli B A C ad peripheriam: Ergo anguli B D H, & D A B æquales inter ſe ſunt; & angulus B eſt communis. Ergo *n* duo triangula A B D, & D B K ſimilia ſunt; proptereaque A B ad B D erit, vt D B ad B K. Vnde *o* figura M ad ei ſimilem, & ſimiliter poſitam figuram R erit, vt A B ad B K; erat autem figura eadem M ad figuram S, vt eadem recta A B ad A K. Ergo *p* figura M ad ambas figuras R, & S ſimul ſumptas erit, vt



b cor. prop. 19. l. 2.
c ex prop. 3. huius
d prop. 19. l. 2.
e prop 4. l. 1
f prop. 17. l. 1.
g coroll. 1. prop 4. l. 4.
h coroll. 3. prop. 17. l. 4
i ex prop. 3. huius.
k prop. 10. l. 3.
l coroll. 4. prop. 17. l. 2.
m prop. 13. l. 2.
n coroll 1. prop. 4. l. 4.
o coroll. 3. prop. 17. l. 4
p cor. prop. 22. l. 3.

recta

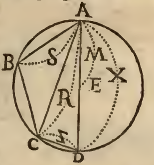
recta B A ad rectas B K, & A K ſimul ſumptas; eſtque B A æqualis duabus B K, K A: Ergo q figura M ex latere pentagoni ęqualis eſt duabus figuris R ex latere hexagoni, & S ex latere decagoni ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

q coroll. 1. prop. 16. l. 3

PROPOS. XXXIII. THEOR. XXVI.

Si ſuper latere hexagoni, pentagoni, & ſubtendente angulum pentagoni in eodem circulo inſcriptorum ſint deſcriptæ quęlibet figurę circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitę: erunt figurę ex latere pentagoni, & ex ſubtendente angulum pentagoni, ſimul ſumptę, ęquales quintuplo figuræ ex latere hexagoni.

In circulo, cuius radius E A, ſint A B, & B C duo latera pētagoni, & recta A C ſubtendat angulū pentagoni, atq; deſcriptæ ſint quęlibet circulares, aut rectilineę figurę ſimiles, & ſimiliter poſitę; M quidem ſuper a radio E A, ſiue latere hexagoni, R ſuper A C, & S ſuper A B. Dico figuras R, & S ſimul ſumptas ęquales eſſe quintuplo figurę M. Producatur diameter A E D, & coniungatur recta C D. Quoniam b arcus A B quinta pars eſt totius periferię A B D A: Ergo qualium partium peripheria circuli A B D A eſt decem erit peripheria A B duę partes, & peripheria A B C quatuor; ſed earundem partium ſemicirculi peripheria A C D eſt quinque: Ergo peripheria C D eſt vna pars decima totius periferię circuli, & propterea c recta C D erit latus inſcripti decagoni regularis. Ponantur iam figurę X, & Z ſimiles ipſis M, R & S, atque ſimiliter poſitę ſuper diametrum A D, & ſuper latus decagoni C D. Quoniam d angulus A C D in ſemicirculo rectus eſt; Ergo e figura X ex hypothenuſa æqualis eſt duabus figuris R, Z ſimul ſumptis; eſtque f figura X quadrupla figurę M (cùm diameter D A dupla ſit radij A E): Ergo duæ figuræ R, & Z ſimul ſumptæ ęquales ſunt quadruplo figurę M. Et addita communiter figura M erunt tres figuræ



a ſcho. prop. 3. huius.

b ex prop. 3 huius.

c ex prop. 30. huius.

d prop. 30. l. 2.

e prop. 18. huius.

f coroll. 3. prop. 17. l. 4.

R, Z,

g prop 32. huius. R, Z, & M, ſimul ſumptę, æquales quintuplo figurę M; g ſed duabus figuris Z ex latere decagoni, & M ex latere hexagoni ęqualis eſt figura S ex latere pentagoni; Ergo duę figurę R, & S æquales ſunt tribus figuris R, Z, & M. Et propterea duæ figuræ R, & S ęquales erunt quintuplo figuræ M. Quod erat oſtendendum.

Finis Libri quinti.

LIBER SEXTVS.

Cùm in quinque præcedentibus libris elementa plana tradita ſint, nedum per ſe vtilia, & ſcitu iucunda, ſed etiam omnino neceſſaria, vt paſſiones ſolidorum, ſiue corporum percipi poſſint: conſequenter elementa prima, & ſimplicia corporum tradentur, initio ſumpto à definitionibus more geometrico.

DEFINITIONES.

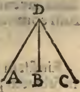
I.

Solidum, ſiue corpus, eſt, quod longitudinem, latitudinem, & profunditatem habet, cuius extrema ſunt ſuperficies.

II.

Solidus angulus eſt concurſus plurium, quàm duorum angulorum planorum, non in eodem plano conſiſtentium ad vnum punctum.

Vt ſi fuerint plures, quàm duæ rectæ A D, B D, C D concurrentes in D, & non in eodem plano iacentes, anguli plani A D B, B D C, & C D A, non in eodem plano exiſtentes, & concurrentes in D, efficiunt angulum ſolidum D. Et ſiquidem anguli plani conſtituentes ſolidum angulum D fuerint tres vocabitur talis ſolidus angulus triangularis, ſi quatuor quadrangularis, & ſic vlterius.



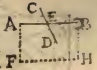
III.

Solida rectilinea, quæ ęquiangula inter ſe ſunt, & omnia latera circa angulos ſolidos ęquales proportionalia habent; vocentur ſimilia.

IV.

Solida figura genita ex reuolutione ſemicirculi circa diametrum eius quieſcentem, quouſque redeat ad locum, à quo moueri cęperat; vocetur Sphęra. Et diameter quieſcens, vocetur Axis ſphęrę. Et centrum ſphęrę erit idem, quod ſemicirculi.

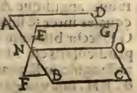
loco reuolutionis ipſius incidet in rectam C D ſaltem in aliquo puncto eius D præter punctum E; & tunc planum ipſum A H, quod per duo puncta D, & E tranſit neceſſario per rectas D E, & A B tranſibit, quandoquidem recta linea E D non poteſt planum ipſum contingere in duobus punctis D, & E, & extra ipſum exiſtere.



PROPOS. I. THEOR. I.

Eucl. 3. XI.

Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio recta linea eſt.



Duo plana A B C D, & E F G ſe ſecent a in linea N O. Dico lineam N O rectam eſſe. Sumantur duo quælibet puncta N & O, quæ in linea communis ſectionis exiſtant, idest iaceant in vtroque plano, & à puncto N ad O coniungatur recta linea. Quia b recta N O plano A C congruit, in quo puncta N, & O exiſtunt, alias c non vndequaque plano A C congrueret recta linea. Pariter recta N O plano F G congruit, in quo pariter puncta N, & O exiſtunt. Ergo recta N O in vtroque plano A C & E G iacet, eſtque communis ſectio eorundem planorum linea vnica, (alias d plana ſe ſecantia haberent ſegmentum commune, aut e ſolidam figuram comprehenderent: ergo recta N O eſt communis ſectio eorundem planorum. Quare, &c.

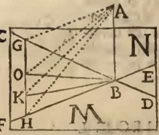
a axio. 3. huius.
b def. 5. l. 1.
c axio. 4. huius.
d axio. 1. huius.
e axio. 2. huius.

PROPOS. II. THEOR. II.

Eucl. 4. XI

Si recta linea incidens in cõmunem ſectionẽ duarũ rectarum linearum perpendicularis fuerit ad vtranque, illa perpendicularis erit ad omnes rectas lineas, à quibus illa tangitur, quæque in plano per duas illas rectas lineas ducto, ſunt: Vocetur talis recta ſublimis Erecta, ſeu Perpendicularis ad planum ſubiectum.

Duæ rectæ lineæ C D, F E in plano M N exiſtentes ſe ſecent in puncto B, & recta A B efficiat tam angulum A B C, quàm



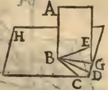
angulum A B F rectum. Et ducatur à puncto B in plano N M quælibet
a prop.3.l.1 recta B K, cadens intra quemlibet angulorum C B F. Dico rectam A B eſſe quoque perpendicularem ad rectam B K, Secentur *a* G B, & H B æquales inter ſe, iungaturque H G, ſecans B K in K, atque *b* H G ſe-
b prop.9.l.1 cetur biſariam in O, coniungan-
c cor. prop. 2.l.2. turque rectæ O B, A G, A O, A K, A H. Quia in triangulo iſoſcelio B H G baſis G H biſariam ſecatur à recta B O; Ergo *c* O B perpendicularis eſt ad H G. Poſtea quoniam in triangulis A G B, A H B duo latera G B, & H B æqualia ſunt, & A B com-
d prop.4.l.1 mune, angulique A B G, A B H ſunt recti: Ergo *d* A G, A H æquales inter ſe ſunt; eſtque trianguli iſoſcelij G A H *e* baſis
e cor. prop. 2.l.2. G H ſecta biſariam in O à recta A O: Igitur *e* ipſa A O perpendicularis eſt ad baſim G H. Et quia *f* in triangulo A B H
f prop.18. l.5. rectangulo in B, quadrato A H æqualia ſunt duo quadrata A B, B H, ſuntque *g* quadrato B H æqualia duo quadrata B O,
g prop.18. l.5. O H, cùm angulus O rectus ſit: Ergo quadrato A H æqualia ſunt tria quadrata A B, B O, & O H. Similiter in triangulo A O H rectangulo in O eidem quadrato A H æqualia ſunt duo quadrata A O. O H. Igitur tria quadrata A B, B O, O H æqualia ſunt duobus quadratis O H, O A, & ablato communi
h coroll 2. prop.19.l.5 quadrato O H, erunt duo quadrata A B, B O æqualia quadrato A O: & propterea *h* angulus A B O rectus erit. Quare ſi rectæ B k & B O coincidunt, erit angulus A B k rectus; ſi verò non
i prop.18. lib 5. coincidit; addito communi quadrato O K, erunt duo quadrata A O, O k, ideſt *i* quadratum K A (propter angulum rectum k O B) æqualia tribus quadratis k O, O B, B A; ſed ſimiliter duobus quadratis k O, O B æquale eſt quadratum K B (propter angulum rectum K O B); Igitur quadratum k A
k coroll.2. prop.19.l.5 æquale eſt duobus quadratis K B, B A; & propterea *k* angulus A B k rectus eſt: Quare recta linea A B perpendicularis eſt ad qamlibet rectam B k, quæ à puncto B ducitur in plano M N. Quòd erat oſtendendum. Vocetur ipſa recta A B Perpendicularis ad planum M N, quod per rectas C D, F E ducitur.

PRO-

PROPOS. III. THEOR. III. *Eucl. 5 XI.*

Si recta linea incidens in communem ſectionem trium rectarum ad ſingulas perpendicularis fuerit: illę tres rectæ lineæ in vno ſunt plano.

Recta linea A B incidat in B, & efficiat cum tribus B C, B D, B E, ſe tangentibus in B, rectos angulos. Dico tres rectas B C, B D, B E in vno plano eſſe. Si enim B E non iacet in plano C H, quod per rectas C B, & B D duci poteſt, producatur a planum H C quouſque ſecet b planum per rectas A B, B E extenſum in recta B G. Quoniam A B ponitur perpendicularis ad duas B C, B D: c Ergo A B perpendicularis eſt ad rectam B G poſitam in eodem plano per rectas B C, B D extenſo; ſed erat quoque A B perpendicularis ad B E, & iacet B E in plano A B G. Ergo duo anguli recti A B E, & A B G æquales ſunt inter ſe, pars & totum; quod eſt impoſſibile. Non ergo recta B E extra planum C H iacet; ideoque rectæ B C, B D, B E in vno ſunt plano. Quod erat oſtendendum.



a poſt. 2. huius.
b propſ 1. huius.
c prop. 2. huius.

PROPOS. IV. THEOR. IV. *Eucl 8. & 18. XI.*

Si in quolibet plano per rectam lineam ad ſubiectum planum perpendicularem extenſo, recta eidem perpendiculari parallela ducta fuerit: erit illa perpendicularis quoque ad planum ſubiectum. Vocetur autem ſublime planũ Erectum, ſeu Perpendiculare ad planum ſubiectum.

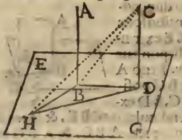
Sit recta C D perpendicularis ad planum E G, & per C D ductum ſit quodlibet planum C D B, & in eo ducta ſit AB parallela ipſi C D. Dico rectam A B ad idem planum E G perpendicularem eſſe. Iungatur recta B D: & in plano E G ducatur recta a H B perpendicularis ad rectam B D, & coniungantur rectę H D, H C, & B C. Quoniam recta C D perpendicularis eſt ad planum E G; Ergo b C D efficiet rectos angulos cum rectis lineis D B, & H D in eodem plano extenſis ad terminum D; ideoque c in triangulo C H D rectangulo in D erit quadratum C H ęquale duobus quadratis C D, & D H; d ſed

a prop. 10. l. 1.
b prop. 2. huius.
c prop 18. lib 5.
d prop. 18. l. 5.

qua-

quadrato D H ęqualia ſunt duo quadrata H B, & B D (propterea quod angulus H B D rectus factus eſt). Igitur quadratū HC ęquale eſt tribus quadratis HB, BD, & DC; eſt verò quadratum B C ęquale duobus quadratis B D, & D C (eo quod angulus C D B rectus eſt); Ergo quadratum H C æquale eſt duobus quadratis H B, & B C; & propterea *e* in triangulo C B H angulus H B C rectus erit, ſed factus fuit angulus H B D rectus: Igitur recta H B perpendicularis eſt ad duas B D, & B C; & *f* rectę B C, & B D iacent in eodem plano parallelarum A B, & C D, in quo puncta B, C, & D exiſtunt: Ergo *g* recta H B perpendicularis quoque eſt ad rectam B A, quæ in eodem plano C B D exiſtit: Eſt *h* etiam angulus A B D rectus, cùm reliquus internus C D B, & ad eaſdem partes parallelarum ſit quoque rectus: Ergo recta A B perpendicularis eſt ad duas rectas B D, & B H concurrentes in B; Et propterea *i* A B perpendicularis erit ad planum E G, quod per rectas B D, & B H ducitur. Quod erat oſtendendum. Vocetur quodlibet planum C D B ductum per rectam C D perpendicularem ad ſubiectum planum, Erectum, ſeu Perpendiculare ad idem planum E G.

e coroll. 2. prop. 29. l. 5
f axiom. 4. huius.
g prop. 2. huius.
h prop. 15. l. 2.
i prop. 2. huius.



Eucl. 7. XI.

COROLLARIVM.

Recta linea duo puncta coniungens in duabus parallelis ſumpta in eodem plano parallelarum iacet. Sumpta enim fuerunt puncta B C in parallelis A B, C D, & oſtenſa fuit recta B C in plano parallelarum A B, C D iacere.

Eucl. 6. XI.

PROPOS. V. THEOR. V.

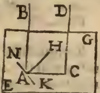
Si duę rectę ad idem planum perpendiculares fuerint, parallelę erunt inter ſe.

Sint duę rectę B A, & D C perpendiculares ad planum E G. Dico rectas B A, & D C parallelas eſſe. Si enim B A nō eſt parallela D C, in *a* plano D C A, à puncto A ducatur A H parallela ipſi C D, & *b* per rectas A H, & A B extendatur planum ſecans ſubie-

a cor. prop. 16 lib. 1.
b poſt. 1. huius.

ſubiectum *c* planum E G in recta N A K. Et quia D C perpendicularis eſt ad planum E G: Ergo *d* ei parallela H A perpendicularis quoque erit ad planum E G: igitur *e* angulus H A k rectus erit; ſed B A perpendicularis quoque eſt ad planum E G. Ergo angulus B A k rectus quoque eſt; & ſunt anguli B A K, & H A K in eodem plano B A k: igitur totus angulus B A k æqualis eſt angulo H A k ſuæ parti, quod eſt abſurdum. Non ergo alia recta, quàm B A eſſe poteſt, parallela ipſi D C. Quare patet propoſitum.

c prop. 1. huius. *d prop. 4. huius.* *e prop. 2. huius.*



COROLLARIVM I.

Eucl. 13. XI

Hinc conſtat ab eodem puncto, ſiue in ſublimi, ſiue in ſubiecto plano, vnam tantum rectam lineam perpendicularem eſſe poſſe ad ſubiectum planum. Si enim duæ A B, A H ad planum E G perpendiculares eſſe poſſent, inter ſe parallelæ eſſent ex hac propoſitione, & ſe ſecarent in A, quod eſt impoſſibile.

COROLLARIVM II.

Eucl. Def. 4 & prop. 38. XI.

Conſtat ex his duabus propoſitionibus, quòd in quolibet plano ad ſubiectum planum erecto omnes rectæ lineæ, quæ in eo exiſtentes perpendiculariter ad cōmunem planorum ſectionem ducuntur, ſunt quoque perpendiculares ad ſubiectum planum. Et illa, quæ à puncto ſublimi eiuſdem plani erecti ducitur perpendiculariter ad ſubiectum planum cadet in cōmunem planorum ſectionem. Nam, *f* vt planum aliquod D C A cenſeri debeat perpendiculare ad planum ſubiectum E G, neceſſe eſt, vt extendatur per aliquam perpendicularem ad planum ſubiectum, vt per C D; & tunc *g* quælibet recta A B cum A C communi ſectione efficiens rectum angulum B A C, erit quoque parallela ipſi D C, eo quod reliquus internus D C A rectus quoque eſt. Vnde ex propoſitione quarta A B quoque erit perpendicularis ad planum ſubiectum E G. Si verò à puncto ſublimi B, exiſtente in plano B D C, erecto ad ſubiectum planum E G, cadat B A perpendicularis ad planum ſubiectum, punctum caſus A exiſtet in recta A C communi ſectione planorum; eo quòd oſtenſæ ſunt duæ perpendiculares B A, & D C parallelæ inter ſe in hac quinta propoſitione, & ideo recta B A exiſtet in eodē plano erecto C D B, in quo nimirum exiſtit communis planorum ſectio A C.

f prop. 4. huius. *g prop. 16. lib. 1.*

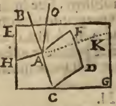
PRO-

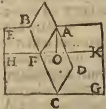
Eucl. 11. 12 XI.

PROPOS. VI. PROBL. I.

A dato puncto in ſublimi, aut in ſubiecto plano poſito, ducere rectam lineam perpendicularem ad ſubiectum planum.

Sit quodlibet planum E G: Debet à puncto A in dicto plano, aut in ſublimi poſito duci recta linea, quæ perpendicularis ſit ad ſubiectum planum E G. Per punctum A a ducatur quodlibet planum A B D C, ſecans b ſubiectum planum E G in recta B C, atque c in plano A B C D à puncto A ducatur A F perpendicularis ad rectam B C, & d in plano E G à puncto interſectionis rectarum B C, A F ducatur H K perpendicularis ad eandem B C; tandem in plano per rectas F A, & H K e extenſo ducatur f à puncto A recta A O perpendicularis ad rectam H K. Dico A O perpendicularem eſſe ad planum E G. Quoniam recta B C perpendicularis eſt ad duas rectas F A, & H K ſe ſecantes primò in A, ſecundò in F: Ergo g recta B C perpendicularis eſt ad planum per rectas F A, & H K ductum: atque h planum E G extenſum per eandem perpendicularem B C erit quoque erectum ad idem planum: ergo viciſſim planum per rectas F A, H K ductum perpendiculare erit ad planum E G; & recta A O exiſtens in plano per F A, H K extenſo ducitur perpendiculariter ad H K eorum communem ſectionem. Ergo i recta A O perpendicularis eſt ad planum E G; quod faciendum erat.





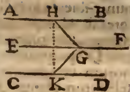
a poſt. 1. & prop. 1. huius.
b prop. 1. huius
c prop. 10. & 11 l. 1.
d prop. 10. l. 1.
e poſt 2 huius.
f prop. 10. & 11. lib. 1.
g prop. 2. huius.
h prop 4. huius.
i coroll 2. prop. 5. huius.

Eucl. 9. XI

PROPOS. VII. THEOR. VI.

Si duę rectę lineę vni tertię parallelę fuerint, nō in eodem plano exiſtentes, inter ſe quoque parallelę erunt.

Sint rectę A B, & C D parallélę eidem rectę E F, & non ſint omnes in vno plano. Dico rectas A B, & C D inter ſe parallelas



las eſſe. A quolibet [a] puncto G rectę E F ducantur in planis ęquidiſtantium rectę lineę G H, & G K perpendiculares ad eandem E F, quę ſecent oppoſitas parallelas in H, & K, & cõiũgatur recta H k. Quoniã eadem recta linea E G perpendicularis eſt ad duas rectas G H, G k; ergo [b] E G perpendicularis eſt ad planum G H K; eſt vero A H parallela ipſi E G. Igitur [c] A H perpendicularis quoque eſt ad planũ H G K. Eadem ratione C D ęquidiſtans eidem E G perpendicularis quoque erit ad planum H G K; cùmque duę rectę A H, & C K ſint perpendiculares ad planum H G k [d] erunt A H & C K inter ſe parallelę. Quod erat oſtendendum.

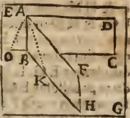
a prop. 10. l. 1.
b prop. 2. huius.
c prop. 4. huius.
d prop. 5. huius.

PROPOS. VIII. THEOR. VII.

Eucl. 19. XI.

Si duo plana ſe mutuò ſecantia per duas parallelas ducta fuerint, efficient communem ſectionem vtrique ipſarum ęquidiſtantem. Et ſi ambo plana perpendicularia fuerint ad ſubiectum planum; & communis eorum ſectio ad planum ſubiectum perpendicularis erit.

Primò per duas rectas ęquidiſtantes D C, & F H ducta ſint duo plana A C, B F ſe ſecãtia in recta linea A B. Dico A B parallelam eſſe vtrique ipſarum D C, & F H: Si enim hoc verum nõ eſt, in duobus planis A C, A H à [a] puncto cõmuni A ſectionis A B ducantur, A O quidem parallela ipſi D C, & A K parallela ipſi F H. Et quoniam A O, F H parallelę ſunt eidem D C [b] erunt inter ſe parallelę quoque; & fuit A K eidem F H parallela. Ergo [c] A O, & A K parallelæ ſunt inter ſe, & ſe ſeçant in A, [d] quod eſt impoſſibile. Non ergo alia recta linea pręter A B communis planorum ſectionis, eſſe poteſt parallela vtrique ęquidiſtantium D C, F H.



Secundò plana A C, A H perpendicularia ad ſubiectum planum E G, idque ſecãtia in B C, B H ſe mutuo ſecẽt in recta A B. Dico A B perpendicularẽ eſſe ad planum E G. à quibuslibet [e] punctis C, & H in planis erectis ducantur perpendiculares C D, H F ad communes ſectiones B C, B H: erunt [f] tam D C, quam H F perpendiculares ad pla-

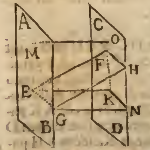
a cor. prop. 16. l. 1.
b prop. 7. huius.
c prop. 17. l. 1.
d corol. 1. prop. 14. lib. 1.
e prop. 10. vel 11. l. 1.
f cor 1. pr. 5. huius.

g prop. 5. huius. num ſubiectum E G; & propterea g D C, & H F parallelę erunt inter ſe; ideoque per eas ducta plana A C, B F efficient com-
h ex prima par huius. munem ſectionem A B parallelam cuilibet ipſarum C D; ſed erat D C perpendicularis ad planum ſubiectum; ergo A B pla-
i prop. 4. huius. norum i communis ſectio perpendicularis quoque erit ad ſubiectum planum E G, vt fuerat propoſitum.

PROPOS. IX. THEOR. VIII.

Si ad duo plana eadem recta linea perpendicularis fuerit, omnes rectæ lineę inter ſe parallelæ ſectæ ab illis duobus planis, erunt æquales inter ſe. Vocentur illa duo plana parallela inter ſe.

Sint duo plana A B, & D C, & vna tantùm linea M O perpendicularis ſit ad vtrumque planum, & duæ quælibet rectæ lineæ E F, G H parallelæ inter ſe ſecentur vtrinque ab eiſdem planis in punctis E, F, G, H. Dico rectas E F, & G
a prop. 6. huius. H æquales eſſe inter ſe. A punctis E, & G a ducantur rectæ E K, G N perpendiculares ad reliquum planum C D, & coniungantur rectæ K F, N H, K N, F H, & E G. Quoniam rectæ M O, & E k perpendiculares ſunt ad planum C



b prop. 5. huius. D b Ergo rectę M O, E k parallelæ ſunt inter ſe, & earum vna O M perpendicularis eſt ad planum A B: Ergo
c prop. 4. huius. reliqua c k E perpendicularis quoque erit ad idem planum A B. Eadem ratione recta G N, quę perpendicularis ponitur ad planum C D erit quoque
d prop. 2. huius. ad reliquum planum A B perpendicularis. d Quare duę rectę E k & G N perpendiculares quoque erunt ad rectas contiguas E G, & K N in eiſdem planis exiſtentes. Et propterea e ſpati-
e prop. 27. l. 1. um rectangulum E G N K parallelogrammum erit, cuius oppoſita latera E K G N ęqualia, & parallela erunt; nec non duo latera E G, K N parallela erunt, & æqualia. Iam cùm per duas parallelas E G, & K N ducantur duo plana E H, & N F ſe
f prop. 8. huius. ſecantia in recta F H: erit f F H parallela ipſi E G; ſed poſitę fuerant duæ E F, & G H parallelæ inter ſe: Ergo g ſpatium E
g prop. 26. l. 1. G H F parallelogramum eſt, cuius oppoſita latera E F, & G H æqualia erunt. Eadem ratione reliquę omnes rectæ parallelæ ipſis E F, vel G H ſectę à planis A B, & C D oſtendentur

æqua-

ęquales inter ſe, & ęquales ipſis E F, G H. Quod erat oſtendendum. Vocentur iam duo plana A B, C D parallela inter ſe, & quęlibet recta M O perpendicularis ad vtrunque planum vocetur Diſtantia eorum.

COROLLARIVM I.

Eucl. 16. XI

Patet, ſi recta linea ad vnum ęquidiſtantium planorum perpendicularis fuerit, eſſe quoque perpendicularem ad reliquum. Et ſi duo plana parallela ſecentur ab alio plano, eſſe cõmunes eorum ſectiones parallelas. Et quęlibet recta linea aut planum ſecans vnum ęquidiſtantium planorum ſecabit quoque reliquum.

Nam recta linea E K ducta fuit perpendicularis ad planum C D; & oſtenſa fuit perpendicularis ad reliquum planum A B parallelum ipſi C D. pariterque ſectiones E G, F H, factę à plano quolibet E H in planis parallelis A B, & C D, oſtenſæ fuerunt parallelę inter ſe.

Rurſus ſi quęlibet recta linea E F ſecuerit planum A B in E, poterit[h] per E duci E k perpẽdicularis ad planum C D, & planum per rectas E K, & E F extenſum neceſſario ſecabit planum C D in aliqua recta per punctum k extenſa. ideoque rectæ k F, E F conuenient (cum angulus k rectus ſit, & angulus k E F ſit acutus contentus à k E perpendiculari ad planum A B, & ab E F, quæ non iacet in dicto plano) vnde recta E F, & quodlibet planum per ipſam ductum ſecabit quoque reliquum ęquidiſtantium planorum C D.

h prop. 6. huius. *i prop. 29. lib. 1.*

COROLLARIVM II.

Eucl. 14. XI.

Conſtat etiam duo plana parallela, ſcilicet ad quæ eadem recta linea perpendicularis eſt, nunquam concurrere.

Nam infinitè productis parallelis planis A B, & C D vbiq; poteſt duci aliqua recta linea G N, quæ perpendicularis ſit ad vtrumque planum, & ęqualis erit vni perpendicularium E k.

PROPOS. X. THEOR. IX.

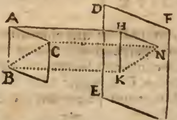
Eucl. 10. & 15 XI.

Si duæ rectę lineę ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe tangentes fuerint parallelæ, illæ angulos ad eaſdem partes

 ver-

vergentes æquales comprehendent. Et plana quæ per illas ducuntur: parallela erunt.

Sint duæ rectæ A B, A C ſe tangentes in A parallelæ duabus rectis D E, D F in alio plano exiſtentibus, & ſe tangentibus in D. Dico primo ad eaſdem partes poſitos angulos B A C, & E D F çquales eſſe. Ducatur a à puncto A ad planum E D F perpendicularis A H incidens in punctū H, à quo in plano E D F ducantur b rectæ H k parallela ipſi D E, & H N parallela reliquę D F. Patet c angulum k H N çqualem eſſe angulo E D F; Secentur d poſtea H k çqualis A B, & H N æqualis A C, & coniungantur rectę B C, k N, B k, C N. Et quoniam duę rectę A C, H N parallelę ſunt eidem D F: Ergo e A C, & H N inter ſe parallelę ſunt, & erant çquales: Igitur f parallelogrammum eſt A C N H; & ideò C N çqualis eſt, & parallela ipſi A H. Eodem modo A B, H k çquales inter ſe ſunt, & g çquidiſtant, cum ſint parallelę eidem D E: Ergo vt prius B k çqualis eſt, & parallela eidem A H; & propterea C N, & B K çquales inter ſe, & h parallelę erunt. i Vnde parallelogrāmum erit B C N k, & eius latera oppoſita B C; k N parallela, & çqualia inter ſe erunt. Quare in triangulis A B C, H K N nedùm A B, H K çquales ſunt, atque A C, H N çquales, ſed etiam baſes B C, k N ſunt çquales; k ideoque angulus B A C æqualis erit angulo K H N; ſed prius erat angulus E D F æqualis eidem angulo K H N. Igitur anguli B A C, & E D F çquales inter ſe ſunt.



Secundò dico plana B A C, & E D F, quę per eaſdem rectas ducuntur eſſe parallela inter ſe. Nam recta A H ducta eſt perpendiculariter ad planum E D F; & ideò l efficit in eo angulos A H N, & A H K rectos, & ſpatia A N & A K, quæ oſtenſa ſunt parallelogramma, erunt m rectangula. Quare anguli H A C, H A B recti erunt; ideoque n eadem recta A H perpendicularis etiam erit ad planum A B C; & propterea o plana A B C, D E G parallela erunt. Vt erat propoſitum.

a prop. 6. huius.
b cor prop. 16. lib. 1.
c coroll. 1. prop. 7. l. 4.
d prop. 3 l. 1
e prop. 7. huius.
f prop 27. lib. 1.
g prop. 7. huius.
h prop. 7. huius.
i prop 27. l. 1.
k prop. 7. l. 1
l prop. 2. huius.
m cor prop. 34 l 1.
n prop. 2. huius.
o prop. 9. huius.

CO-

COROLLARIVM.

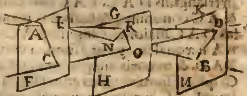
Facili negotio per datum punctum extra datum planum duci poteſt planum ęquidiſtans plano dato.

Si enim per punctum A duci debeat planum ęquidiſtans dato plano E D F, p ducenda eſt A H perpendicularis ad planum E D F, & q à puncto A ſuper recta H A debent eleuari duę perpendiculares C A, & B A, ſuper planis N H A, K H A, quę non ſint in directum poſita; erit r recta H A perpendicularis ad planum anguli BCD, & ducta prius fuit perpendiculariter ad planum E D F. Ergo ſ erit planum anguli B A C æquidiſtans plano E D F. p prop. 6. huius. q prop 10. l. 1. r prop. 2. huius. ſ prop. 9. huius.

PROPOS. XI. THEOR. X. Eucl. 17. XI.

Si duę rectę lineę planis parallelis ſecentur, in eaſdem rationes ſecabuntur.

Duę rectę A B, & C D, ſiue in eodem, vel diuerſis planis quomodocunque poſitę ſecentur à planis inter ſe parallelis E F, G H, K M in punctis A, O, B, C, N, D. Dico eas ſecari proportionaliter, ideſt eſſe A O ad O B vt C N ad N D. Coniungantur rectę A C, B D, & A D, quę occurrat plano G H in puncto R, & à puncto R ad O, & N rectę O R, R N iungantur. Quoniam planum trianguli A C D ſecatur à duobus planis parallelis E F, G H, Ergo a eorum communes ſectiones A C, R N parallelę erunt, ideoque b vt A R ad R D, ita erit C N ad N D. Similiter quia planum trianguli D A B ſecatur à duobus planis G H, K M inter ſe parallelis: Ergo c eorum communes ſectiones D B, O R inter ſe parallelæ erunt, ideoque d vt A R ad R D, ita erit A O, ad O B; oſtenſa autem fuit C N ad N D in eadem ratione eiuſdem A R ad eandem R D. Ergo e A O ad O B erit, vt C N ad N D. Quod erat oſtendendum. a cor. prop. 9. huius. b prop. 2. l. 4 c cor. prop. 9 huius. d prop. 2. l. 4 e prop. 7. l. 3



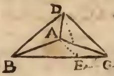
PRO-

Eucl.10 XI

PROPOS. XII. THEOR. XI.

Solidi anguli triangularis duo quilibet eius plani anguli tertio ſunt maiores.

Sit triangularis ſolidus angulus A conſtans ex tribus angulis planis B A D, D A C, & C A B. Dico duos quoslibet angulos B A D, & D A C, ſimul ſumptos, maiores eſſe tertio angulo B A C. In plano per B A C ducto fiat *a* angulus B A E æqualis angulo B A D. & ſiquidem A E cadit ſuper A C, patet duos angulos B A D, D A C maiores eſſe angulo B A C. Quando vero A E cadit inter rectas B A, A C, in rectis A B, A C ſumantur duo quælibet puncta B, & C, & iungatur recta B C, ſecans interceptam A E in E. At quando recta A E cadit extra angulum B A C, à quolibet puncto E rectæ A E coniungatur recta E B, ſecans interceptam rectam A C in C, Et *b* ſecetur A D æqualis E A, iunganturque rectæ lineæ B D, D C, & D E. Quoniam circa æquales angulos B A D, B A E ſunt latera A D, A E æqualia, & A B cōmune. Ergo *c* triangulorum baſes B D, B E æquales ſunt. Quare C E erit differentia duorum laterum B D, B C; & propterea *d* in triangulo B D C laterum differentia C E minor erit baſe C D; cumque in triangulis D A C, E A C duo latera A D, A E ſint æqualia, & A C commune, & baſis B C maior baſe C E: ergo *e* angulus D A C maior erit angulo E A C; ſed erant anguli B A D, B A E æquales. Igitur *f* ſumma vnius æqualium angulorum B A D, & maioris inæqualium D A C maior erit angulo B A C, qui eſt ſumma vnius æqualium B A E, & minoris inæqualium E A C in primo caſu, vel eorum differentia in ſecundo. Quare patet propoſitum.





a prop.24. lib.1.

b prop.3.l.1

c prop.4.l.1

d prop.21. lib.1.

e ſchol prop. 6.l.2.

f axio.4.l.1

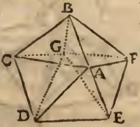
Eucl.21.XI

PROPOS. XIII. THEOR. XII.

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit angulus ſolidus A contentus quotcunque angulis planis

nis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B. Dico eos omnes ſimul ſumptos minores eſſe quatuor planis angulis rectis.a Ducatur planum, ſecans omnes rectas angulum A continentes, vt efficiatur b figura rectilinea B C D E F tot laterum, quot ſunt plani anguli ſolidum angulum A continentes, & ſumpto intra polygonum B C E quodlibet punctum G, ab eo ad angulos omnes polygoni ducantur rectæ G B, G C, G D, G E, & G F. Et quoniam polygoni latera B C, C D, D E, E F, F B ſunt baſes, nedùm triangulorum verticem habentium in G; ſed etiam triangulorum verticem in A habentium. Ergo tot ſunt triangula verticem habentia in G, quot ſunt ea, quę verticem in A habent; ſed c cuiuslibet trianguli tres anguli ſunt ęquales duobus rectis. Ergo ęquali numero rectorum ęquales erunt anguli omnes triangulorũ verticem in G habentiũ; atque anguli omnes triangulorum verticem in A habentium. Et propterea anguli omnes triangulorum verticem in G habẽtium, ſimul ſumpti, ęquales erunt angulis omnibus, ſimul ſumptis triangulorum verticem habentium in A. Poſtea d in angulo ſolido triangulari B duo plani anguli F B A, C B A maiores erunt angulo C B F; ideſt maiores erunt duobus angulis F B G, C B G, & ſic reliqui omnes. Quare omnes anguli, qui ſunt ad baſes triangulorum verticem in A habentium, ſimul ſumpti, maiores erunt omnibus angulis, qui ſunt ad baſes triangulorum verticem in G habentium; ideoque reſidui anguli omnes verticales, qui ſolidum angulum A efficiunt, minores erunt reſiduis omnibus angulis, qui in G verticem habent; ſed e anguli omnes, qui in G verticem habent, quatuor angulis rectis ſunt æquales. Igitur anguli plani omnes, qui ſolidũ A componunt, ſimul ſumpti, quatuor rectis minores erunt. Quod erat oſtendendum.



a poſt. 1. & 2. huius. *b prop. 1. huius.* *c prop. 18. l. 1.* *d prop. 12. huius.* *e coroll. 2. prop. 13. l. 1.*

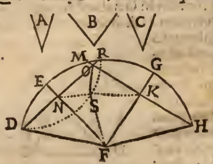
PROPOS. XIV. PROBL. II.

Eucl. 23. XI

Ex tribus angulis planis, quorum duo quilibet tertio ſint maiores, & tres ſimul quatuor rectis minores ſint, ſolidum angulum conſtituere.

Sint tres anguli A, B, C, qui ſimul ſumpti ſint minores quatuor

tuor rectis; ſed duo quilibet ex eis tertiò ſint maiores. Debet effici angulus ſolidus, cuius tres anguli ſint ipſis A, B, C æquales. In quolibet circulo D G H, cuius radius F D, fiant a ad centrum anguli D F E ęqualis angulo A, & E F G ęqualis angulo B, atque G F H ęqualis angulo C: erunt b tres arcus D E, E G, G H minores integra circuli peripheria, & duo ex eis maiores tertia, ſicuti anguli A, B, C, ſeu ijs ęquales anguli ad centrum F, qui proportionales ſunt peripherijs ſubtenſis, minores ſunt quatuor rectis, & duo quilibet maiores ſunt tertio. Et à c punctis D, & H ad radios E F, G F ducantur perpendiculares D R, H M. Patet d rectas D R, H M efficere arcum D E R duplum arcus D E, & arcum H G M duplum arcus H G: Quare e rectę D R, H M antequam ad puncta R, & M pertingant ſe ſecabunt intra circulum, vt in O; & propterea f rectangula parallelogramma D O R, & H O M æqualia erunt. g eleuetur iam à puncto O recta O S perpendicularis ad planum D R H, cuius h quadratum ſit ęquale rectangulo D O R, vel H O M, erit O S nedùm i perpendicularis ad

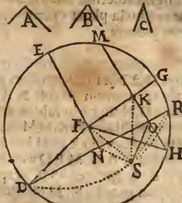


rectas D R, H M in ſubiecto plano exiſtentes; ſed etiam k erit media proportionalis tam inter D O, O R, quàm inter H O, O M; & propterea l tria puncta D, S, R in ſemicirculi peripheria exiſtent erecti m ad planum D G H, cùm per S O erectam ad idem planum ducatur: non ſecus tria puncta H, S, M, in peripheria ſemicirculi erecti ad idem planum exiſtent. Coniungantur tandem rectę N S, k S. Et quoniam planum D R H oſtenſum eſt perpendiculare ad planum ſemicirculi D S R; eſtque E F N in vno eorum poſita perpendicularis ad D R communem planorum ſectionem: Ergo n E F N perpendicularis eſt ad planum D S R; & propterea o E F N perpendicularis eſt ad rectam N S in eo poſitam. Quare in duobus triangulis F N S, F N D circa duos angulos rectos S N F, D N F ſunt duo latera D N, N S ęqualia, cùm ſint radij circuli D S R & F N commune: Ergo p anguli S F N, D F N ęquales ſunt; eſtq; angulus A ęqualis angulo D F N, vel D F E in primo caſu, vel angulo D F E complemento ipſius D F N in ſecundo caſu.

Ergo

a prop. 24. lib 1.
b coroll. 2. prop 1. l. 5 & cor 2 pr. 16 l. 3.
c prop. 10. lib 1.
d prop. 19. l. 1
e ſcho prop. 23. l. 1
f pr. 22. l. 4.
g pr. 6. huius
h pr. 21. l. 4.
i pr. 2. huius.
k cor. 2 pr 14 l. 4.
l ſcb pr. 9. l. 4.
m prop 4. huius.
n cor. 2. pr. 5. huius.
o prop. 2. quint.
p pr. 4 l. 1.

Ergo angulus S F E æqualis erit angulo A.



Eodem modo oſtendetur angulus S F k çqualis angulo H F K, ſeu angulus SFG çqualis angulo H F G, vel angulo C. At ſi duo anguli A, & C, ſiue eis æquales D F E, H F G ſint recti à puncto *q* F eleuetur recta linea F S perpendicularis ad planum anguli E F G. Manifeſtum eſt *r* rectam S F perpẽdicularem eſſe ad ambas rectas F E, & F G, & propterea angulus S F E æqualis erit angulo recto A, & angulus S F G çqualis erit recto angulo C: factus autem fuit angulus E F G çqualis angulo B. Igitur tres anguli plani E F S, S F G, G F E componentes angulum ſolidum F çquales ſunt datis angulis A, B, C. Quod faciendum erat. *q prop. 6. huius.* *r prop. 2. huius.*

COROLLARIVM.

Eucl. 26. XI

Hinc patet artificium quomodo ad datam rectam eiuſque punctum conſtitui poſſit angulus ſolidus, cuius anguli plani çquales ſint ſingulis angulis dati anguli ſolidi. Si enim datus angulus ſolidus triangularis non eſt, ductis *ſ* planis per binas quaſque rectas lineas diuidi poterit datus angulus ſolidus in plures ſolidos angulos triangulares, quorum ſinguli tres angulos conditionatos habebunt, id eſt *t* erunt minores quatuor rectis, & *u* duo quilibet tertio maiores. Ergo ex hac propoſitione effici poteſt ad datã rectã eiuſq; pũctum angulus ſolidus triangularis çqualis vni angulo ſolidorum triangularium. Poſtea ſuperaddi poteſt ſecundus, & tertius, &c. ſimiliter poſitus angulus ſolidus, quouſque omnes ſimul anguli ſolidi triangulares çquales ſint iis, in quos datus angulus ſolidus reſoluitur; & ideo patet propoſitum. *ſ poſt. 1. huius.* *t prop. 18. huius* *u prop. 12 huius.*

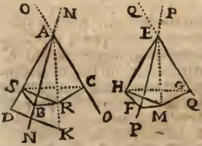
PROPOS. XV. THEOR. XIII.

Eucl. 35. XI

Si in duobus angulis ſolidis triangularibus contentis ab angulis planis, qui ſint çquales ſinguli ſingulis cádant perpendiculares

culares à ſublimibus rectis lineis ſimiliter poſitis ad plana angulorũ:erunt inter ſe ſublimes, vt perpendiculares,& per eas educta plana efficient angulos ad eaſdem partes ęquales inter ſe.

In duobus angulis ſolidis triangularibus A, & F ſint anguli plani D A N,H E P ęquales; pariterque anguli D A O, H E Q inter ſe, nec non anguli N A O, P E Q ſint ęquales, atque à pũctis D,H sũptis in ſublimib⁹ ſimiliter poſitis D A,H E cadãt perpendiculares D K,H M ad plana N A O, P E Q. Dico D A ad H E eſſe, vt D k ad H M, & plana A D k, E H M efficere angulos K A O, M E Q æquales inter ſe. Secetur a S A ęqualis H E, & ducatur b S R perpendicularis ad planum N A O, atque c à punctis R, M incidentiarũ ad rectas A N, A O, E P, E Q ducãtur perpendiculares R B, R C, M F, M G; & coiungãtur rectę R A, M E, S B, S C, H F, H G. Quoniã recta A C perpendicularis eſt ad R C communem ſectionem planorum S R C, & B A C ad d inuicem perpẽdicularium (cùm planum S R C extendatur per S R erectam ad planum B A C) e Ergo A C perpendicularis ęſt ad planum S R C; ideoque f angulus A C S rectus eſt: eadem ratione anguli A B S, E G H, E F H recti erunt. Cùmque in duobus triangulis A C S, E G H ęqualia ſint latera S A, H E ſubtendentia angulos rectos C, & G, ſuntque duo anguli S A C, H E G ęquales: Ergo g latera A C, E G ęqualia ſunt: eadem ratione B A, F E ęqualia erunt; & ſunt duo anguli B A C, F E G ęquales, atque anguli B, F, C, G recti. Igitur facta intellectuali applicatione h figuræ F E G M, B A C R ſibi mutuò congruent, ideoque recta G M ſuper C R, nec non F M ſuper B R cadent: Quare punctũ concurſus M cadet ſuper R, & propterea rectę M E, R A ſibi mutuò congruentes ęquales erunt; pariterque anguli G E M, C A R æquales erunt. Tandem quia in duobus triangulis S A R, H E M duo latera S A, A R ad duo H E, E M habent eandem æqualitatis rationem, & anguli recti S R A, H M E (facti k à lineis S R, H M erectis ad plana ſubiecta) opponuntur homologis S A, H E, & k reliqui anguli sũt acuti: ergo l perpendicu-



a pr. 3. l. 1.
b prop. 6. huius.
c pr. 11. l. 1
d pr. 4. huius.
e cor. 2. pr. 5 huius.
f pr. 2. huius
g pr. 25. l. 1
h axio. 9. l. 1
i pr. 2. huius
k cor. 3. pr. 18. l. 1:
l pr. 8. l. 4.

diculares S R, H M æquales ſunt: poſita autem fuit D k perpendicularis quoque ad idem planum B A C: Ergo *m* D K, SR parallelę ſunt, & in *n* eodē plano trianguli S A R ſubiectum planum ſecantis in eadem recta linea A R k, quæ efficit angulum k A O æqualem ipſi M E Q. & *o* propter ſimilitudinem triangulorum D A k, S A R erit ſublimis D A ad S A, ſeu *p* ad ei ęqualem H E, vt perpendicularis D K ad S R, ſeu ad ei ęqualem H M. Quod erat oſtendendum.

m pr. 5. huius.
n cor pr. 4. huius.
o pr 4. l 4.
p pr. 3. l. 3.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt duas perpendiculares ab eadē ſublimi eiuſdē anguli ſolidi ductas cadere in eādem rectā lineam per angulum ſubiectum tranſeuntem. Oſtenſum enim fuit in hac propoſitione perpendiculares D K, S R cadere in eandem rectam lineam K R A, quę per punctum A anguli plani ſubiecti tranſit.

DEFINITIONES SECVNDAE.

I.

Si à perimetro figurę planę ad ſublime punctum recta linea eleuata conuertatur circa figurę perimetrum, fixo manente puncto ſublimi, quouſque redeat ad locum, à quo cęperat moueri: vocabitur ſolidum genitum, ſi figura ſubiecta rectilinea fuerit, Pyramis.

II.

Si verò fuerit circulus: vocetur Conus.

III.

Et punctum ſublime fixum vocetur Vertex Pyramidis, vel Coni.

IV.

Atque figura plana ſubiecta vocetur Baſis eius.

V.

Et perpendicularis à vertice ad baſim Pyramidis, vel coni ducta: vocetur eius Altitudo.

VI.

Et ſi quidem perpendicularis à vertice incidat non extra baſim: vocetur illa Directa.

VII.

Si verò extra ceciderit: vocetur Pyramis Inclinata.

VIII.

Et rectę à vertice ad angulum baſis pyramidis: vocentur Latera eius.

IX.

Et quælibet recta à vertice ad circunferentiam circuli baſis coni: eius Latus vocetur.

X.

Atque recta à vertice ad centrum circuli baſis: vocetur Axis Coni.

XI.

Coni verò, quorum axes erecti fuerint ad baſim: vocentur Recti.

XII.

Et quorum axes inclinati ſunt ad baſim: vocentur Scaleni.

XIII.

Si à perimetro figurę planę recta eleuata non in eius plano iacens reuoluatur ſemper ſibi ipſi ęquidiſtanter conſtituta circa figurę perimetrum, quouſque redeat ad locum, à quo moueri cęperat; atque ſuperficies genita ſecetur plano ęquidiſtante figurę ſubiectę: vocabitur ſolidum genitum, ſi figura ſubiecta rectilinea fuerit, Priſma.

XIV.

Si verò fuerit circulus vocetur Cylindrus.

XV.

Et figura ſubiecta vocetur eius Baſis.

XVI.

XVI.

Et recta linea tranſlata in cylindro, at adherens angulis baſis Priſmatis inter baſim, & oppoſitum planum ei parallelum intercepta, vocetur Latus eius.

XVII.

Et perpendicularis ad baſim intercepta inter oppoſita plana parallela: Altitudo eius vocetur.

XVIII.

Atque linea ex centro baſis cylindri parallela lateri: Axis eius vocetur.

XIX.

Et ſi latera perpendicularia fuerint ad baſes: erunt Priſma, & Cylindrus rectus.

X X.

Si verò inclinata fuerint vocentur Scaleni.

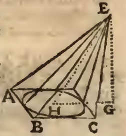
X X I.

Priſma à ſex planis quadrilateris, quorum oppoſita ſint parallela, contentum: vocetur Parallelepipedum.

XXII.

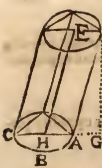
Similes Coni, & Cylindri ſunt, quorum axes æquè inclinati ſunt ad baſes, & proportionales ſunt diametris baſium.

Vt ſi fuerit figura plana A B C rectilinea, vel circulus; atque punctum E in ſublimi extra dictum planum, & à puncto A ad E iungatur recta A E, atque recta A E circa punctum fixum E conuertatur per figuræ A B C perimetrum, quouſque redeat ad locum, à quo cęperat moueri; tunc quidem genita figura ſolida E A B C habens ſubiectam figuram planam A B C rectilineam: vocabitur Pyramis. Si vero plana figura A B C fuerit circulus: vocabitur Conus.



Sed ſi recta linea A E, iacens extra planum figuræ A B C reuoluatur

per



per figuræ A B C perimetrum ſemper tamen ſibi ipſi ęquidiſtanter conſtituta dum mouetur, quouſque redeat ad locum à quo moueri cęperat, atque ſuperficies genita à recta A E reuoluta ſecetur plano E parallelo plano figuræ A B C; tunc quidem ſolida figura genita E A B C E habens ſubiectam figuram planam A B C rectilineam, vocabitur Priſma; illa verò, quæ habet figuram A B C circulum, vocetur Cylindrus.

Et punctum E in pyramide, & Cono: Vertex vocetur; in omnibus autem dictis ſolidis figura plana A B C vocetur baſis ſolidi; Et recta linea E G perpendicularis ad planum baſis ducta à vertice E, vel à plano oppoſito baſi: vocatur altitudo ſolidi. Et in pyramide ſi dicta perpendicularis E G incidat non extra baſim A B C; tunc pyramis vocatur directa; ſi verò extra cadat, vocetur pyramis inclinata.

Et recta linea E A translata, vbicunque ſumatur, vocatur latus coni, vel cylindri; ſed angulos baſis contingens vocatur latus pyramidis, vel priſmatis.

Et recta linea E H à circuli centro H ad verticem ducta in cono, & parallela lateri E A in cylindro, vocetur Axis eius.

Coni, quorum axes perpendiculares fuerint ad baſes vocantur recti, reliqui verò Scaleni;

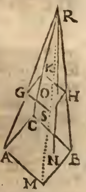
Priſma verò, & Cylindrus, cuius latus perpendicularis fuerit ad planum baſis: vocabitur rectus; reliqui verò Scaleni.

PROPOS. XVI. THEOR. XIV.

Si Pyramis ſecetur plano parallelo baſi, erit ſegmentum eius ad partes verticis, Pyramis ſimilis datę Pyramidi; & ſectio erit figura plana ſimilis baſi, quę erunt in duplicata ratione altitudinum earum pyramidum, quarum ſunt baſes.

Sit pyramis R A C B M ſecta plano G k H S parallelo baſi A C B M, & R N ſit altitudo pyramidis, ſeu perpendicularis à vertice ad baſim ducta, quę ſecet planum G K S in O; erit-
a cor.1.pr. 9.huius. que [a] R O perpendicularis quoque ad planum G k S parallelum ipſi A C M. Dico figuram ſolidam R G k H S pyramidem eſſe ſimilem ipſi R A C B M, & planam figuram G K H S ſimilem eſſe baſi A C B M, & inter ſe eſſe in duplicata ratione alti-

altitudinum R O, & R N. Quoniam duo plana parallela A C
B M, & G K H S ſecantur planis iiſdem triangulorum R A C,
R C B, R B M, & R M A. Ergo [b] eorum communes ſectiones *b cor 1. pr.*
A C, G k parallelę ſunt inter ſe, nec non C B, k H, pariterque *9. huius.*
B M, H S, atque M A, S G ſimiliter ęquidiſtant. Vnde [c] figurę
planę A C B M, & G k H S ęquiangulę ſunt inter ſe; atque tri- *c cor. 1. pr.*
angula [d] R A C, R G K ęquiangula ſunt inter ſe, & ſimilia: *7. l. 4.*
Pariterque triangula R C B, R k H atque etiam triangula R *d cor. 1. pr.*
B M, R H S, nec non triangula R M A, R S G ſunt inter ſe æ- *6. l. 4.*
quiangula, & ſimilia. Quare anguli ſolidi A, & G æquales ſunt
inter ſe, & circa eos latera R A ad A M proportionalia ſunt
lateribus R G ad G S: pariterque C A ad A R
erit, vt K G ad G R; Vnde ex compoſitione or-
dinata erit C A ad A M, vt k G ad G S. Eadem
ratione anguli ſolidi B, & H pariterque anguli
ſolidi C, & K; nec nõ ſolidi anguli M, & S ęqua-
les erunt, exiſtente angulo ſolido R cõmuni; &
circa dictos angulos ſolidos æquales erunt, vt *e def. 3. huius.*
prius, latera proportionalia. Ergo [e] pyramis R
G K H S ſimilis eſt pyramidi R A C B M. Et quo-
niam anguli ſolidi A, & G oſtenſi ſunt ęquales:
Igitur [f] perpendicularis R N ad perpendicula- *f pr. 15. huius.*
rem R O eſt, vt ſublimis R A ad homologam
ſublimem R G, ſeu vt A C ad G k; ſunt verò fi-



guræ planæ A C B M, & G k H S ęquiangulę, quorum latera
circa angulos ęquales ſunt proportionalia, vt dictũ eſt: Ergo [g]
ſunt [g] ſimilia, & [h] habent duplicatam proportionem lateris A *g pr. 16. l. 4*
C ad eius homologum G K. Eſtque R N ad R O, vt A C ad *h pr. 17 l. 4*
G k. Ergo [i] figura A C B M ad figuram G k H S duplicatam *i cor. 3. pr.*
rationem habet altitudinis R N ad altitudinem R O. Quod *19. l. 3.*
erat oſtendendum.

PROPOS. XVII. THEOR. XV.

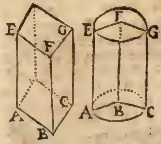
In Priſmate, vel cylindro latera omnia ęqualia ſunt inter ſe, & figura plana parallela baſi ęqualis, & ſimilis eſt baſi.

Sit Priſma, vel Cylindrus A E G C, & planum parallelum baſi ſit E F G. Oſtendendum eſt latera omnia ęqualia eſſe inter ſe, & in priſmate rectilineam figuram E F G ęqualem, & ſimilem eſſe baſi A B C; in cylindro verò figuram E G circu-

lum

lum eſſe ęqualẽ circulo A C. A puncto F, vbi axis B F cylindri ſecatur plano E G, ducantur ad perimetrũ figurę E G quælibet rectæ F E, F G, ponãturque cylindri latera E A, G C, iunganturque rectæ A B, B C.

a def. 16. 18 ſecun huius Quoniam *a* in vtroque ſolido bina latera, vel latus A E, & axis B F



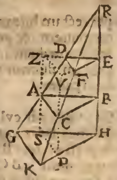
b pr. 14. l. 1 ſunt parallela inter ſe: Ergo *b* in vno ſunt plano, & ab hoc plano ſecantur parallela plana A C, E G: *c cor. 1. pr. 9. huius.* Igitur *c* ſectiones oppoſitæ A B, E F parallelæ ſunt inter ſe, & *d* *d pr. 26. l. 1* ſpatium A F parallelogrammum erit, cuius oppoſita latera A B ipſi E F, atque A E ipſi B F æqualia erunt. Eadem ratione B G, parallelogrammum erit, & C G ipſi B F, ſeu lateri A E æquale erit, atque C B ipſi G F æquale, & parallelum erit, ſicuti A B, E F æqualia, & parallela erant. *e cor. 1 pr. 7 l. 4.* Ergo *e* angulus A B C ęqualis eſt angulo E F G, & ſic reliqui omnes anguli in priſmate æquales erunt; atque circa *f pr. 3. l. 3.* æquales angulos latera ſunt proportionalia (cùm duo *f* æqualia A B, E F ad duo æqualia C B, G F in eadem ſint ratione, & ſic reliqua omnia latera circa reliquos angulos æquales). Igi*g pr. 16. l. 4*tur *g* figura E F G ſimilis, & æqualis eſt figuræ rectilineæ A B C; cùmque in cylindro à puncto F ſumpto intra figuram E G quęlibet rectæ F E, F G eductæ ęquales ſint radijs A B, C B, *h def. 8 l. 1.* & ideo ęquales inter ſe. Ergo *h* figurã E G circulus eſt, cuius centrum F ęqualis *i* circulo A C: fuerunt autem latera A E, *i axio. l. 1.* C G & ſic reliqua omnia latera oſtenſa ęqualia tam in priſmate, quàm in cylindro. Patet ergo propoſitum.

PROPOS. XVIII. THEOR. XVI.

Si ſuper baſe pyramidis triangularis directę duo priſmata recta deſcribantur infra verticem pertingentia: ſupremum priſma circunſcriptum, & maius erit fruſto pyramidis ſupremo, & infimum priſma inſcriptum, & minus erit inferiori fruſto pyramidis.

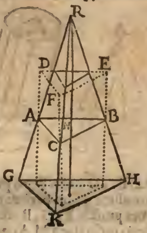
Super baſe A B C triangularis directę pyramidis R A B C deſcripta ſint duo priſmata recta A B P, & A V B, quę ſecent pyramidem infra verticem R in planis D E F, & G H K parallelis baſi A B C. Dico ſupremum priſma A V B circunſcriptum

ptum & maius eſſe fruſto ſupremo pyramidis A F B, & infimum priſma A P B inſcriptum & minus eſſe pyramidis infimo fruſto A k B. Et primò R B H perpendicularis à vertice R; incidat in angulum B. Quoniam duę rectæ R H & V C P perpendiculares ſunt ad planum A B C, ſiue ad a planum G H K ei parallelum: b Ergo anguli R B C, V C B recti ſunt, & V P parallela eſt ipſi R H, & c in eodem plano trianguli R H K exiſtunt, in quo rectę C B, & BH iacent: Sed in triangulo R B C eſt angulus B rectus: ergo d angulus R C B eſt acutus; & ideo perpendicularis V C cadit extra triãgulum R K H & eius productio C P intra idē triãgulū cadet: Eadem ratione recta S A intra triangulum R G H, & eius productio A Z extra ipſum cadet. Quare parallelogrammum A P intra pyramidem, & parallelogrammum A V extra ipſam cadet; & propterea priſma A P B intra fruſtum A k B inſcriptum erit, & minus erit illo, atque priſma A V B circunſcriptum, & maius erit fruſto pyramidis A F B.



a cor.1. pr. 9.huius.
b pr 1. & pr.5.huius
c pr.14.l.1
d cor.3.pr. 18.l.1.

Secundò cadat perpendicularis R N, aut in latere A B, aut intra triangulum A B C in puncto N, & per latera pyramidis, & per perpendicularem R N plana ducantur diuiſa erit pyramis in duas, aut tres pyramides; & in qualibet earum perpendicularis à vertice incidit in angulum baſis; & e propterea omnia infima priſmata ſuper baſes deſcripta, ideſt priſma ex eis compoſitum A B P inſcriptum, & minus erit infimo fruſto pyramidis A B K, & omnia ſuprema priſmata ſuper eaſdem baſes deſcripta, ideſt priſma ex eis compoſitum A B V circunſcriptum, & maius erit pyramidis ſupremo fruſto A B F. Quare patet propoſitum.

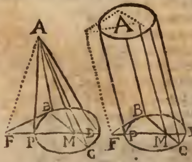


e parte prima huius.

PROPOS. XIX. THEOR. XVII.

Si per rectam lineam baſim coni, vel cylindri ſecantem, vel tangentem, & per latus ſolidi planum ducatur: quod per ſecantem ducitur intra ſolidum cadet; quod verò per tangentem ducitur continget ſolidi ſuperficiem,& extra ſolidum cadet.

Sit conus, aut cylindrus, cuius baſis B C D, ſummitas A,& recta linea B C ſecet baſim ſolidi, at recta B F tangat eam in B. & poſito latere B A ducantur plana A B C A. & A B F A. Dico planum A B C A intra ſolidum cadere, & planum A B F A tangere ſolidi ſuperficiem, & extra ipſum cadere. Quia latus A B in ſuperficie ſolidi exiſtit, & eſt quoque in plano A B C A, vel in plano A B F A: Ergo a in eorum communi ſectione, vel contactu exiſtit. Quare planum A B C A; nec non planum A B F A ſecat, vel tangit ſolidi ſuperficiem in recta linea A B. Eadem ratione planum A B C A ſecat ſolidi ſuperficiem in latere A C à puncto C ducto. Poſtea ſumpto quolibet puncto M inter puncta B & C, coniungatur recta M A ad verticem in cono, & parallela cuilibet lateri B A in cylindro, & per M ducatur quęlibet recta linea M D, quæ producta ſecet vbicunque circuli peripheriam in P & D; & ducantur b ſolidi latera P A, & D A: Erunt D A, M A, P A in eodem plano trianguli A P D per verticem in cono ducti, vel in eodem plano c parallelogrammi A P D A in cylindro; cùm latera P A, D A, & M A ſint inter ſe d parallela & ęqualia. Et quoniam ſecans recta linea BC intra circulum B C D cadit: Ergo punctum M inter B,& C poſitum intra circulum ipſum pariter cadit; ideoque punctum M inter quęlibet puncta P, D, B, & C in circuli peripheria poſita cadet. Ergo recta linea M A; quę ducta eſt intra triangula, vel parallelogrãma A B C A. & A P D A cadit inter quęlibet latera P A,B A, C A, & D A, ſeu inter omnia latera quæ duci poſſunt in ſuperficie ſolidi: ergo recta linea M A cadit intra ſolidum.



a axio. 3. huius.

b def. 9. 16. ſecun. huius.

c pr. 27. l. 1.

d prop. 17. huius.

Eadem

Eadem ratione quelibet alia recta intra triangulum, vel parallelogrammum A B C A ducta cadet intra ſolidum. Quare planum A B C A intra ſolidum cadet, & ipſum ſecabit. Poſtremò in recta tangente B F à quolibet puncto F, quod non ſit in contactu, ducatur recta F A ad verticem in cono, & *e* parallela lateri in cylindro, & ducatur à puncto F recta F D contingens, vel ſecans vbicunque circuli peripheriam in P, & D, atque latera ſolidi D A, P A ducantur: erunt, vt prius, D A, P A, F A in eodem plano trianguli, vel parallelogrammi A P D A, & parallele inter ſe in cylindro. Et quia B F circulum B C D tangit in B: Ergo *f* punctum F extra dictum circulum cadit, & propterea punctum F non inter P & D, ſed vltra rectam P D in circulo applicatam cadet; ſed triangulum, vel parallelogrammum A D P A ſecans ſuperficiem ſolidi in lateribus D A, & P A intra ſolidi ſuperficiem includitur, & reliquum eiuſdem plani extenſi extra ſolidum cadit. Igitur recta F A extra figuram A D P A poſita tota extra ſuperficiem ſolidi cadet. Eadem ratione quelibet alia recta in plano A B F poſita parallela lateri B A prater tangentem B A extra ſolidum cadet. Quare contingens planum A B F extra ſolidum cadet. Vt erat oſtendendum.

e cor. pr. 16.

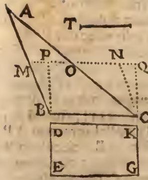
f pr. 21. l. 2.

PROPOS. XX. THEOR. XVIII.

Si triangulum, & parallelogrammum ſuper ęqualibus rectis lineis deſcripta, fuerint inter ſe ęqualia: erunt ſuper ea deſcripta priſmata recta ęquè alta, ęqualia inter ſe.

Sint triangulum A B C, & parallelogrammum D G ęqualia inter ſe quorum latera B C, & E G ęqualia inter ſe ſint. Dico priſmata recta ſuper his ſpatijs deſcripta, quorum altitudines ęquales ſint rectę lineę T, eſſe inter ſe equalia. *a* Secetur A C bifariam in O, & *b* per O ducatur recta O M parallela BC ſecās AB in M, & *c* fiat angulus CBP æqualis angulo E, *d* & cōpleatur parallelogrāmū BPQC, ducaturq; CN parallela *e* BA, ſecans *f* M P O in N. Quoniam duę rectę A C, M N, conuenientes in O ſecantur à parallelis A M, & C N: Ergo *g* triangula A M O, & C N O ſimilia ſunt, & habent latera homologa A O, C O ęqualia. Ergo *h* triangula A M O, C N O etiam ęqualia inter ſe ſunt. & quoniam, facta intellectuali applicatione baſes A M O, & C N O ſimiles, & æquales ſibi mutuò congruunt,

a pr 9 l. 1.
b cor. pr 16. l. 1.
c pr 24. l. 1
d pr 26 l. 1
e cor. pr. 16 l. 1.
f cor. pr. 29. l. 1.
g cor. 1. pr. 6. l. 4.
h cor 2. pr. 17. l. 4.



gruunt, altitudines verò ab angulis A, M, O, C, N, perpendiculariter eleuatæ ad plana triangulorum congruentium, cum æquales ſint inter ſe, pariter ſibi mutuò congruent (aliàs *i* ab iiſdem punctis binę perpendiculares duci poſſent ad ſubiectum planum, quod eſt impoſſibile) Ergo plana per congruentes perpendiculares extenſa, & per earum ſummitates ducta ſibi mutuò congruent. Vnde figuræ ipſæ ſolidæ comprehenſæ ſibi mutuò congruent; & ideo priſmata, quorum baſes triangula A M O, & C N O, altitudines verò æquales rectæ T, erunt inter ſe ęqualia, additoque communi priſmate recto eiuſdem altitudinis, cuius baſis quadrilaterum M B C O, cum quo priora priſmata recta triangularia ęquè alta vnicum priſma conſtituent (eo quod à puncto O perpēdicularis eleuata ad planum A B C O eſt latus commune trium priſmatum rectorum, quorum baſes conueniunt in O, & ſic reliquę perpendiculares), erunt priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum A B C, & parallelogrammum B N, ęqualia inter ſe. Rurſus quoniā ſuper recta M O Q ductæ sūt M B, N C parallelę inter ſe, pariterque P B, Q C parallelæ inter ſe: Ergo triangula *k* M B P, & N C Q ſimilia ſunt, & *l* ęqualia, cùm latera homologa M B, N C oppoſita *m* in parallelogrammo N B ęqualia ſint. Quare, (vt prius dictum eſt) priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangula ęqualia, & ſimilia M B P, N Q C ſunt ęqualia inter ſe; & addito communi priſmate recto eiuſdem altitudinis T, cuius baſis quadrilaterum B P N C: erunt priſmata recta altitudine T deſcripta, quorū baſes parallelogrāmum MBCN, & parallelogrammum P B C Q æqualia inter ſe, ideoque priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum A B C, & parallelogrammum P B C Q ęqualia erunt inter ſe. Et quoniam parallelogrammum E K ęquale erat triangulo A B C, & huic triangulo ęquale eſt parallelogrammum M B C N, *n* ſeu P B C Q (cùm ęqualibus triangulis A M O, C N O addatur commune quadrilaterum M O C B): Ergo parallelogramma E K, P B C Q ęqualia ſunt, & habent baſes B C, E G ęquales; *o* ergo ſunt ęquè alta; quare (vt in pr. 30. lib. 1. oſtenſum eſt) circa angu-

i cor. 1 pr. 5 huius.

k ſch. pr. 7. l. 4.

l cor. 2. pr. 17 l. 4.

m pr. 26. l. 1

n pr. 31. l. 1

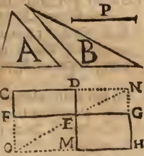
o cor. 1. pr. 1. l. 4.

angulos P B C & E ęquales eorum latera eleuata P B, D E æqualia erunt; & propterea *p* eadem parallelogramma ſimilia erũt. Quapropter priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes parallelogramma E K, & P B C Q ſimilia, & ęqualia: erunt pariter ęqualia inter ſe. Oſtenſa autẽ fuerunt ęqualia inter ſe priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum A B C, & parallelogrammum P B C Q. Igitur priſmata rectà altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum A B C, & parallelogrammum E k ęqualia erunt inter ſe. Quod erat, &c. p pr. 16. l. 4

PROPOS. XXI. THEOR. XIX.

Si duo priſmata recta triangularia baſes, & altitudines ęquales habuerint: erunt inter ſe ęqualia.

Sint duo priſmata recta, quorum baſes ſint quælibet triangula A, & B ęqualia inter ſe, altitudines verò ęquales ſint rectę lineæ P. Dico priſmata ipſa eſſe inter ſe ęqualia. Fiat *a* parallelogrammum C E ęquale triangulo A; & parallelogrammum M G ęquale triangulo B in angulo G E M ęquali angulo D E F, quorum baſes F E, & E G ſint ęquales baſibus triangulorum, & diſponantur in directum, vt D E & E M in directum pariter ſint, *b* (aliàs nõ efficerent angulos æquales ad verticem E); Et perficiantur *c* parallelogrãma F M, D G, & O N, ducanturque diametri N E, O E. Quoniam parallelogramma C E, & E H ęqualia ſunt triangulis A, & B ęqualibus inter ſe: Ergo ipſa parallelogramma erunt inter ſe ęqualia: Quare *d* erit reciprocè, vt F E ad E G, ita M E ad E D; & *e* permutando, erit vt F E ad E M, ita G E ad E D, & ſic reſiqua latera proportionalia oſtendentur: Quare *f* parallelogramma F M, & D G, quę habent latera homologa, circa angulos æquales in directum poſita, ſimilia erunt inter ſe; & *g* propterea diametri O E, N E erunt in directum; *h* quę ſecabunt ſingula parallelogramma F M, D G, C H in duo triangula æqualia, & *i* ſimilia, cum ſint ęquiangula. Et quia priſmata recta quorum baſes triangula ſimilia & ęqualia C



a cor. pr. 20 l. 4.
b cor. pr. 5. lib. 1.
c pr. 26. l. 1
d pr. 14. l. 4
e prop. 12. l. 3.
f pr. 16. l. 4.
g pr. 19. l. 4
h pr. 26. l. 1
i pr. 4. l. 4.

O N,

O N, O NH, & cōmunis altitudo ęqualis eſt rectę P, ſunt inter ſe ęqualia: Ergo ſi ab eis auferantur priſmata recta æqualia, quorum baſes triangula ſimilia, & ęqualia O F E, & O M E, communis altitudo ęqualis P, remanebunt duo priſmata recta ęqualia, quorum baſes quadrilatera C F E N, & H M E N, altitudines ęquales P. Et ſi rurſus ab his auferantur priſmata recta ęqualia, quorum baſes triangula ſimilia, & æqualia E D N, & E G N, altitudines ęquales P, remanebunt duo priſmata recta, quorum baſes parallelogrammа C E, & E H, altitudines ęquales P, quę erūt neceſſariò ęqualia inter ſe; *k* ſed priſmata recta, quorum baſes ęquales triangulum A, & parallelogrammum C E ſuper ęqualibus rectis deſcripta, altitudines ęquales P, ſunt ęqualia inter ſe; pariterque priſmata recta, quorum baſes ęquales triangulum B, & parallelogrāmum E H, altitudines ęquales P, ſunt ęqualia inter ſe. Ergo duo priſmata recta, quorum baſes triangula A, & B, quorum altitudines ęquales P, inter ſe ęqualia ſunt. Quod erat oſtendendum.

k prop 20. huius.

PROPOS. XXII. PROBL. III.

Cuilibet pyramidi triangulari directę figura compoſita ex priſmatibus rectis æquè altis circunſcribi poteſt, & altera inſcribi, ita vt circunſcriptæ, vel inſcriptæ differentia à pyramide minor ſit quacunque data magnitudine. Vocentur huiuſmodi figurę Gradatæ pyramidi adſcriptę.

Sit pyramis triangularis D A B C, & D B perpendicularis à vertice incidat non extra baſim B C, & ſit data quælibet magnitudo &. Dico fieri poſſe quod proponitur. *a* eleuetur E A perpendicularis ad planum A B C, & reuoluatur vt precipit 13. def. ſecun. huius, factum erit priſma *b* rectum B E C ſuper baſim A B C altitudine D B, & hæc altitudo diuidatur bifariam *c* in M, & *d* per M ducatur planum parallelum baſibus: erit iam vniuerſum priſma B E C ſectum in duo priſmata recta æqualia inter ſe (eo quod tam baſes A B C, E D 8, quàm altitudines perpendiculares M D, M B ęquales ſunt inter ſe); Et ſi rurſus M B bifariam ſecetur in G, & per G planum G F H parallelum baſibus ducatur: erit rurſus priſma A G C ſemiſſis præcedentis; Et ſi denuo hæc bipartita ſubdiuiſio reſiduarum altitudinum, & ductio planorum ſemper repe-

a prop.6. huius.
b def 19. huius ſec.
c pr 9 l 1
d cor.pr.10 huius.

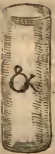
repetatur, remanebit *e* tandem aliquod priſma minus quacũque magnitudine propoſita. Ergo repertum iam ſit priſma B F C minus magnitudine &, perq; *f* reliquas ſectiones M P ęqualiter diuidentes altitudinem B D, plana M L N, & O P Q ducantur parallela baſi A B C; Poſtea *g* deſcribantur duo priſmata recta ſuper baſim G I K ſupra, & infra ſectionem in planis immediatè ſequentibus terminata, *h* quorum infimum I B K priſma inſcriptum erit fruſto pyramidis inferiori A k B, & ſupernum priſma R G S circunſcriptum erit fruſto ſuperiori L K M, quæ duo priſmata erunt æqualia, cum eandem baſim I G K, & ęquales altitudines perpendiculares G M, G B habeant. Pari

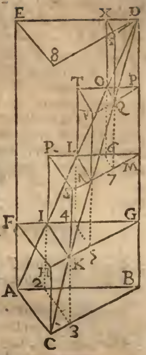
e ſchol pr. 27.l.2.

f cor. pr.10. huius.

g def.19. ſec huius.

h prop. 18. huius.





modo ſuper baſim L M N cum altitudinibus æqualibus M P, M G deſcribantur duo priſmata æqualia, L G N inſcriptum fruſto pyramidis L G K, & priſma L V M circunſcriptum fruſto pyramidis O N M. Similiter ſuper baſim O P Q cum ęqualibus altitudinibus P D, P M deſcribantur duo priſmata ęqualia, O 7 P inſcriptum fruſto pyramidis O N M, & priſma O Z P circunſcriptum fruſto pyramidis D O Q P, & ſic vlterius procedatur in reliquis ſectionibus, ſi plures extiterint.

Patet ergo, quòd priſmata omnia recta B I 3, G L 5, M O 7 inſcripta pyramidi, ſimul ſumpta, ęqualia ſunt priſmatis G R k, M T N. P X Q circunſcriptis pyramidi ſimul ſumptis, ideſt figura ex priſmatis compoſita circunſcripta pyramidi D A B C abſque infimo priſmate B F C ęqualis eſt figurę ex priſmatis compoſitæ inſcriptę eidem pyramidi. Quare exceſſus, quo figura vniuerſa circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidem pyramidi æqualis eſt priſmati B F C; At ſolidum B F C minus eſt propoſita magnitudine &: Ergo exceſſus

quo

quo figura tota circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidē pyramidi minor eſt magnitudine &; Sed pyramis D A B C pars eſt, & ideo minor, quàm figura pyramidi circunſcripta, & eadem pyramis totum eſt, & ideo maior figura eidem inſcripta. Quare differentia figurarum inſcriptæ pyramidi à circunſcripta maior eſt, quàm differentia inter figuram circunſcriptam, aut inſcriptam, & pyramidem ipſam; differentia verò dictarum figurarum circunſcriptæ, & inſcriptæ minor eſt magnitudine &. Ergo exceſſus, aut defectus, quo circunſcripta, aut inſcripta excedit, aut deficit à pyramide, minor eſt magnitudine &. Quod fieri poſſe oſtendendum erat. Vocentur dictę figurę ex priſmatis rect is ęquè altis compoſitę, Gradatę figurę pyramidi adſcriptę.

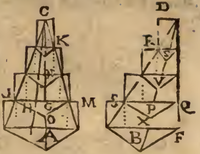
PROPOS. XXIII. THEOR. XX.

Si duę triangulares Pyramides directę habuerint baſes, & altitudines ęquales: erunt inter ſe ęquales.

Sint duæ pyramides C A, D B, quarum baſes triangula A,
B ęqualia, & altitudines perpendiculares C A, D F, non extra
baſes cadentes, ſint etiam ęquales. Dico pyramides æ-
a prop. 22. quales eſſe inter ſe. Adſcribantur [a] pyramidi C A duę figuræ
huius. gradatæ K L M circunſcripta, & N O inſcripta, ita vt diffe-
rentia figurę k L M, aut N O à pyramide C A minor ſit quæ-
cunque magnitudine data: ſintque figurę genitæ à planis pa-
rallelis, baſi triangula A, G, N, I, & altitudines priſmatum
comprehendentium figuras adſcriptas ſint æquales ipſi H A.
b pr. 18. l. 1 Poſtea [b] perpendicularis D F in tot partes æquales vni Q F di-
c cor. pr. 10 ſtribuatur, in quot partes æquales vni A H diuiſa fuit perpen-
huius. dicularis C A, & [c] per ſingula diuiſionum puncta plana paral-
d prop. 16. lela baſi efficiant [d] triangula P, V, Z ſimilia ipſi B: & [e] com-
huius. pleantur figuræ gradatæ circunſcripta R S F, & inſcripta V
e prop. 22. X. Et quoniam H A, Q F æquè metiuntur æquales altitudi-
huius. nes C A, D F: Ergo [f] H A, Q F æquales ſunt, & ſic reliquæ
f pr . . l. 3. altitudines priſmatum rectorum æquales erunt; habent [g] ve-
g prop. 1 . rò triangula ęqualia A, B ad duo triangula illis ſimilia G, P
huius. eandem proportionem duplicatā altitudinis A C ad H C, ſeu
h pr. 3. & F D [h] ad Q D, cùm tam C A, D F, quàm C H, D Q ęquales ſint.
2 y. l. 3. Ergo [i] triangula G P æqualia ſunt, eadem ratione æqualia
i pr. 4 l. 3. erunt triangula N, V, &c. Tandem [k] priſmata recta, quorum
k prop. 21.
huius.

baſes

baſes triangula ęqualia A, B, altitudines H A, Q F æquales etiam, erunt inter ſe æqualia: eadem ratione reliqua priſmata recta numero æqualia comprehendentia gradatas figuras circunſcriptas, & inſcriptas ęqualia erunt inter ſe. Quapropter duæ figuræ gradatę K L M, R S F circunſcriptæ pyramidibus C A, D B ęquales erunt: pariterque duæ figurę gradatę inſcriptæ N O; V X erunt ęquales; & hoc ſemper verum erit quacunque exiſtente differentia pyramidis C A à figura gradata k L M, vel N O. Quapropter erunt duæ magnitudines, prima pyramis C A, ſecunda pyramis D B. & figura gradata k L M, maior, quàm prima exceſſu minore quolibet dato, eſt quoque maior ſecunda, cùm figura k L M æqualis ſit R S F circunſcriptę, & ideo maioris pyramide D B, atque figura gradata N O minor, quàm prima defectu minore quolibet dato, eſt quoque minor ſecunda, cùm figura N O ęqualis ſit V X inſcriptæ, & ideo minoris pyramide D B. Ergo [1] pyramis C A æqualis eſt pyramidi D B. Quod, &c.



[1] ſch. pr. 14. lib. 3.

PROPOS. XXIV. THEOR. XXI.

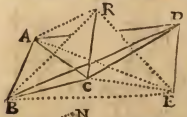
Si duæ pyramides triangulares ambligoniæ habuerint baſes & altitudines æquales, erunt æquales inter ſe.

Sint duæ pyramides D A B C, & k G F H, quarum baſes, triangula A B C, G F H æqualia inter ſe, & perpendiculares à ſummitatibus ad baſes ductæ D E, k M ſint æquales inter ſe, & cadant extra baſes pyramidum. Dico pyramides eſſe ęquales inter ſe. A terminis perpendicularium E, & M ad angulos baſiũ coniungãtur rectę E A, E C, E B, M G, M F, & M H, & in figuris E A B C, & M G F H ſumantur puncta C, & O, vbi conueniunt triangula omnia, in quæ dictæ figuræ reſoluuntur; & [a] eleuentur C R, O N æquales ipſis D E, & M k & perpendiculariter ad plana baſium E A B, M G F H, & coniungantur rectę A R, B R, E R, G N, F N, H N, M N. Quoniã duę pyramides D A B E, & R A B E triangulares eandem baſim

[a] pr. 3. l. 1. & pr. 6. huius.

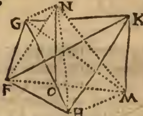
ſim A B E habent, & çquales altitudines D E, R C, quç non

b prop. 23. huius.



incidunt extra baſim: Ergo *b* pyramides D A B E, & R A B E çquales ſunt inter ſe. Rurſus quia ſuper eadem baſi B C E cum çqualibus altitudinibus D E, R C non cadentibus extra baſim factç ſunt duç pyramides triangulares D B E C, & R B E C. *c* Ergo hç çquales ſunt inter ſe, quç ſi à prioribus çqualibus pyramidibus D A B E, R A B E tollantur, remanebunt pyramides D A B C E, & R A B C E çquales inter ſe. Et, ſi ab his tollantur duç triangulares pyramides çquales D A C E, & R A C E (quç eandem baſim A C E habent, & altitudines çquales D E, R C non cadentes extra baſim) remanebunt pyramides D A B C, & R A B C çquales inter ſe. Poſt ea quoniam duç pyramides triangulares K F H M, & N F H M eandem baſim F H M habent, & çquales altitudines K M, N O non cadentes extra baſim: erunt *d* illç pyramides çquales inter ſe. Eadem ratione duç pyramides triangulares N F G M, & k F G M çquales erunt inter ſe. Ergo çqualibus addendo çqualia: erunt pyramides K G F H M, & N G F H M quadrilatera çqualia inter ſe, à quibus ſi auferantur triangulares pyramides çquales k G H M, & N G H M (quç eandem baſim M G H habent, & çquales altitudines K M, N O non cadentes extra baſim) remanebunt pyramides K G F H, & N G F H çquales inter ſe; eſt verò *e* pyramidi N G F H çqualis pyramis R A B C, quia eorum baſes G F H, & A B C çquales ſuppoſitç ſunt, & altitudines N O, R C non cadentes extra baſes ſunt çquales, cùm ſint çquales duabus çqualibus K M, D E. Ergo pyramis K G F H çqualis eſt pyramidi R A B C; ſed eidem pyramidi R A B C oſtenſa fuit çqualis pyramis D A B C. Ergo duç pyramides k G F H, D A B C çquales ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

c prop. 23. huius.



d prop. 23. huius.

e prop. 23. huius.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quòd ſi fuerint duç pyramides triangulares

çquè

ęquè altę, & baſis vnius aliquoties baſim alterius metiatur pyramis quoque toties reliquam pyramidem metietur, quoties baſis baſim metitur.

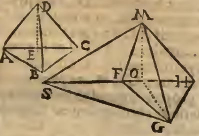
Si enim in ęquè altis pyramidibus triangularibus D A B E, & N G F H baſis G F H metiatur aliquoties baſim A B E, exempli gratia ter, ita vt triangula A C B, B C E, & E C A ſint ęqualia inter ſe, & ipſi G F H, & compleantur pyramides triangulares D A B C, D B C E, D E C A, erunt quidem ex hac propoſitione ęquales inter ſe, & ipſi pyramidi N G F H, cùm earum baſes, & altitudines ęquales ſint, & propterea f pyramis N G F H toties pyramidem D A B E metietur, quoties illius baſis G F H baſim huius A B E metitur. f def. 4. l. 3.

PROPOS. XXV. THEOR. XXII. *Eucl. 5. & 6. XII.*

Quęlibet pyramides eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes.

Sint duę pyramides primò triangulares D A B C, & M F G H, quarum altitudines D E, M O ęquales ſint. Dico pyramidem D A B C ad pyramidem M F G H eandem proportionem habere, quam baſis A B C ad baſin F G H. Producatur H F indefinitè verſus F, vt in S, & a ſecetur F O, quę ſit quęlibet menſura ipſius F H, & ſumatur S F quęlibet multiplex eiuſdem F O, & compleantur pyramides triangulares M F O G, & M F G S. Et quia b quoties F O metitur F H, toties triangulum F G O menſurat triangulum F G H, atque c quoties triã gulum F G O metitur triangulum F G H, toties pyramis M F G O menſurat pyramidem M F G H. Ergo d triangulum F G O, & pyramis M F G O ęquè metiuntur triangulum F G H, & pyramidem M F G H. eadem ratione quoties O F metitur ipſam F S, toties triangulum F O G ipſum triangulum S F G, atque pyramis M F O G pyramidem M F S G metientur; & propterea e triãgulum S F G ipſius F G H, atque pyramis M F S G pyramidis M F G H quælibet & eædem partes erunt, quemadmodum S F partes eſt ipſius F H.

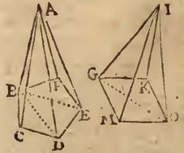
a pr. 28. l. 1
b cor. 3. pr. 32. l. 1.
c cor pr 24. huius.
d pr. 7. l. 3.
e def. 6. l. 3.



vnde erunt quatuor magnitudines, prima baſis A B C, ſecunda baſis F G H, tertia pyramis D A B C, quarta pyramis M F G H, & duæ aliç, ſcilicet triangulum F S G, & pyramis M F S G, quę ſunt quęlibet, & eędem partes conſequentium, ideſt habent ad triangulum F G H & ad pyramidem M F G H quālibet & eandem rationem commenſurabilem, & *f* quoties triangula S F G & A B C ęqualia ſunt, etiam ęquè altę pyramides M F S G & D A B C ſunt ęquales; & quoties triangulum S F G maius eſt triangulo A B C, etiam pyramis M F S G maior eſt pyramide D A B C, & quotieſcunque illud minus eſt, hęc quoque eſt minor illa. Ergo *g* baſis A B C ad baſim F G H eandem rationem habet, quam pyramis D A B C ad pyramidem M F G H.

f pr. 22. & 24. huius.

g pr. 13. l. 3.



Sint ſecundò duę pyramides A C F, & I K M ęquè altę, baſes verò quęcunque polygona F C, k M. Dico eſſe pyramidem A C F ad pyramidem I K M, vt baſis C F ad baſim k M. Diuidantur polygona baſium in triangula, ductis rectis B D, B E & G O, & plana per has rectas ad vertices coniungantur. Quoniam *h* vt baſis B C D ad B D E ita eſt pyramis A B C D ad pyramidem A B D E (eo quod ſunt triangularia, & eiuſdem altitudinis) erit *i* coniungendo vt polygonum C E ad triangulum B D E, ita pyramis A C E ad pyramidem A B D E. Et rurſus quia, vt baſis B D E ad B E F, ita pyramis triangularis A B D E ad pyramidem A B E F ęquè altam: ergo *k* ex compoſitione ordinata vt polygonum C E ad triangulum B E F, ita eſt pyramis A C E, ad pyramidem A B E F; & iterum *l* cōiungendo erit, vt polygonum C F ad triangulum B F E, ita pyramis A C F ad pyramidem A B E F. Eadem ratione erit, vt triangulum G K O ad polygonum k M, ita pyramis I k G O ad pyramidem I K M; Eſt autem *m* vt baſis trianguli B F E ad triangulum G K O, ita pyramis A B F E ad pyramidem I K G O (propterea quod altitudines ambarum pyramidum triangularium equales ſunt ex hypotheſi). Ergo *n* ex compoſitione ordinata ratio polygoni C F ad polygonum K M eadem erit, quę pyramidis A C F ad pyramidem I K M. Quod erat, &c.

h par. pri. huius.

i pr. 14. l. 3.

k pr. 19. l. 3.

l pr. 14 l. 3.

m pri. par. huius.

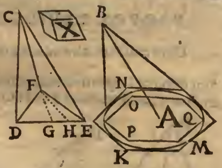
n pr. 19. l. 3.

PRO-

PROPOS. XXVI. PROBL. IV.

In cono dato poſſibile eſt pyramidem circumſcribere, & alteram inſcribere, ita vt illarum differentia à cono minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Vocentur huiuſmodi pyramides adſcriptæ cono.

Sit conus cuius vertex B, baſis circulus A, & quælibet magnitudo X. Dico poſſe circumſcribi, & inſcribi in dato cono duas pyramides, quarum differentia à cono minor ſit magnitudine X. Ad a planum cuiuslibet trianguli D E F eleuetur perpendicularis C F, quæ b ſecetur æqualis altitudini coni B A, & ductis planis compleatur pyramis C D F E. iam ſi à C per rectam F G ſecantem c triangulum F D E bifariam ducatur planum, d ſecabitur pyramis C D F E bifariam, & ſi rurſus aliud planum à C per F H ſecantem triangulum F G E bifariam ducatur, erit pyramis C G F E ſecta bifariam, & cùm hoc ſemper fieri poſſit: manifeſtum eſt e relinqui ex ea tãdem aliquam pyramidem minorem quacunque magnitudine X: Sit illa C H F E; f poſtea circulo A circumſcribatur polygonum k M N, & aliud O P Q illi ſimile inſcribatur, ita vt illorum differentia minor ſit baſe F H E; g & ductis planis per omnia latera polygonorũ ad verticem B, deſcriptæ erunt duæ pyramides, habentes communem verticem B, quarum baſes k M N, & O P Q, ideoque eiuſdem altitudinis cum cono. & pyramide C F H E. Et quoniam omnia latera polygoni O P Q ſecãt circulum A, & omnia latera figuræ k M N tangũt circulum A: Ergo h plana omnia pyramidis B O P Q conum ſecabunt, & omnia plana pyramidis B k M N extra conum cadent; ideoque pyramis B O P Q inſcripta, & minor erit cono B A; & pyramis B K M N circumſcripta, & maior erit cono B A. Et quoniam, i vt pyramis B k M N ad pyramidem B O P Q cùm ſint eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis k M N ad O P Q. Ergo k diuidendo vt diffe-



a prop. 6. huius.
b pr. 3. l. 1.
c cor. pr. 30. l. 2.
d cor. pr. 24. huius.
e ſchol. pr. 27. l. 2.
f pr. 9. l. 5.
g poſt. 1. huius.
h prop. 19. huius.
i prop. 25. huius.
k pr. 13. l. 5.

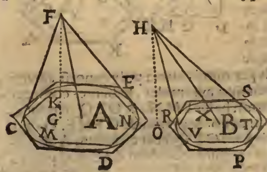
differentia pyramidum B K M N, & B O P Q ad pyramidem B O P Q ita erit differentia polygonorum K M N, & O P Q (l prop. 25. huius.) ad polygonum O P Q: Rurſus vt l pyramis B O P Q ad pyramidem C F H E, cum ſint eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis O (m pr. 19. l. 3.) P Q ad baſim F H E. Ergo m ex compoſitione ordinata, vt differentia pyramidum B K M N, & B O P Q ad pyramidem C F H E, ita eſt differentia polygonorum K M N, & O P Q ad planum F H E: ſed differentia polygonorum k M N, & O (n cor. 1. pr. 16. l. 3.) P Q plano F H E minor eſt; Ergo n differentia pyramidum B k M N, & B O P Q minor eſt pyramide C F H E; ſed hæc pyramis minor erat magnitudine X: Ergo differentia pyramidum B K M N, & B O P Q adhuc minor erit magnitudine X; Eſt verò conus B A maior pyramide inſcripta B O P Q & minor pyramide circumſcripta B K M N. Quare exceſſus, quo pyramis B k M N ſuperat conum; aut defectus, quo pyramis B O P Q deficit à cono, multo minor erit, quàm differentia pyramidum B k M N, & B O P Q; ideoque minor quacunque data magnitudine X. Quod propoſitum fuerat.

PROPOS. XXVII. THEOR. XXIII.

(Eucl. 11. XII.)

Coni eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes.

Sint duo coni, quorum baſes circuli A, & B; vertices verò F, H, & eorum altitudines F G, H O æquales ſint. Dico conum F A ad conum H B eandem rationem habere, quam circulus A ad circulum B. Adſcribatur a cono F A duæ pyramides F C D E, & F K M N quarum differētia à cono minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Poſtea b circulo B circunſcribatur polygonum regulare P R S ſimile polygono C D E; Pariterque eidem inſcribatur polygonum regulare T V X ſimile polygono k M N, & c ab omnibus lateribus dictarum figurarum eleuentur plana ad verticem H pertingentia,



(a prop. 26. huius.) (b cor. 2. pr. 4. l. 5.) (c poſt. 1. huius.)

gentia, vt perficiantur duę pyramides, altera H P R S circunſcripta, [d] & maior cono H B, altera verò H T V X inſcripta; & ideo minor eodem cono. Et quoniam tam pyramides circunſcriptę, quàm inſcriptę altitudines F G, H O ęquales habent, [e] erunt inter ſe, vt baſes; ſed [f] circunſcripta polygona baſiū C D E, P R S ſunt inter ſe in duplicata ratione radiorū, ſiue vt [g] circuli A, B. Pariterque polygona K M N, & T V X ſunt inter ſe, vt circuli A, & B: Ergo, [h] vt pyramis F C D E ad pyramidem H P R S, ita erit circulus A ad circulum B; & in eadem ratione erit pyramis F K M N ad pyramidem H T V X. Ergo ſunt duę magnitudines, prima conus F A, ſecunda conus H B, & ratio data circuli A ad circulum B. & duę alię vnà maiores prima; & ſecunda, ſcilicet pyramides F C D E, H P R S conis circunſcriptę ſunt in ratione A ad B, & exceſſus à prima, ſcilicet differentia pyramidis F C D E à cono F A minor eſt quacunque magnitudine data; pariterque duæ aliæ vnà minores prima, & ſecunda, ſcilicet pyramides F K M N, & H T V X conis inſcriptæ, ſunt in eadem ratione A ad B, & defectus à prima, ſcilicet differentia pyramidis F K M N à cono F A minor eſt quacunque data magnitudine. Ergo [i] prima ad ſecundam, ſcilicet conus F A ad conum H B eſt quoque in eadem data ratione circuli A ad circulum B, baſis ad baſim. Quare, &c.

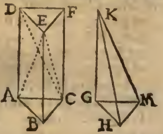
d ex pr. 19. huius.
e prop. 25. huius.
f pr. 10. l. 5.
g pr. 11. l. 5. & pr. 7. l. 3.
h pr. 7. l. 3.
i ex pr. 24. l. 3.

PROPOS. XXVIII. THEOR. XXIV.

Eucl. 7. XII.

Si pyramis, & priſma ęquales baſes, & æquales altitudines habuerint, erit pyramis tertia pars priſmatis.

Sit priſma D B F, & pyramis K G H M, quarum altitudines ſint ęquales, & baſes A B C, & G H M ſint pariter ęquales. Dico pyramidem ipſius priſmatis tertiam partem eſſe. Et primò ſit priſma triangulare, & in tribus eius parallelogrmmis ducantur diametri D C, A E & C E, & per duas quaslibet diametros in vno puncto cōuenientes [a] plana ducantur, vt priſma diuidatur in tres pyramides, quarum duę [b] C B A E, & C A D E æquales ſunt inter ſe, quia [c] baſes B A E, D E A ſunt ęquales, cùm parallelogrāmū D B à diametro A E bifariā ſecetur, & altitudo earum eſt eadem, ſcilicet eadem



a poſt. 1. huius.
b pr. 23 & 24 huius.
c pr. 26. l. 1.

per-

perpendicularis à communi vertice C ad planum D B ducta: Pari ratione duę pyramides E D A C, & E D F C habent baſes ęquales D A C, & D F C, & eandem altitudinem, ſcilicet perpendicularem à vertice E ad planum F A ductam; Ergo [d] pyramis E D F C ęqualis eſt eidem pyramidi E D A C: ideoque tres pyramides, in quas priſma reſoluitur, ęquales inter ſe ſunt; & propterea priſma D B F triplum erit pyramidis E A B C: Eſt verò [e] pyramis k G H M ęqualis pyramidi E A B C (cum earum baſes G H M, & A B C ſint poſitę ęquales, & etiam altitudines ęquales). Ergo pyramis k G H M tertia pars eſt priſmatis D B F.

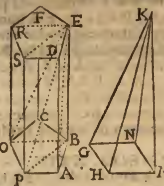
d pr. 23 & 24. huius.

e pr. 23. 24. huius.

f cor. 1 & 2. pr. 17. l. 4

Secundò in priſmate polygonio diuidantur [f] baſes parallelę, ęquales, & ſimiles A C, & D F in totidem triangula, ita vt duo quælibet oppoſita ſimilia parallela, & æqualia ſint, vt A B P ſimile ſit ipſi D E S, P B O ipſi S E R, &c. & [g] ductis planis per latera homologa æqualia, & parallela P B, S E, & per O B, & R E diuiſum erit priſma D B F in totidem priſmata triangularia, quot ſunt triangula A B P, P B O, O B C in baſi A C. Et ſi ad verticem E ducantur plana per rectas A P, P O, O C, P B, O B, erit pyramis E A C polygonia diuiſa in totidem pyramides triangulares, quot ſunt triangula in baſi A C; & propterea tot erunt pyramides triangulares E A B P, E P B O, E O B C quot ſunt priſmata triangularia D B S, S B R, R B F, & erunt priſmata, & pyramides deſcriptę ſuper eaſdem baſes triangulares, & in eiſdem altitudinibus. Vnde (ex prima parte huius) pyramis triangularis E A B P tertia pars erit priſmatis triangularis D B S, pariterque pyramis E P B O erit tertia pars ipſius priſmatis S B R, nec non pyramis E O B C ipſius priſmatis R B F tertia pars erit; ideoque tota pyramis polygoni E A C totius priſmatis polygoni D B F tertia pars erit: Sed [h] pyramis k G H M ęqualis eſt pyramidi E A C (quia baſes A C, & G H M N ęquales poſitę ſunt, & eorũ altitudines ęquales). Ergo pyramis K G H M tertia pars eſt priſmatis D B F. Quod erat, &c.

g poſt. 1. huius.

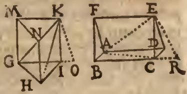


h pr. 25. huius, & cor. 1 pr. 10. l. 3.

SCHO-

SCHOLIVM.

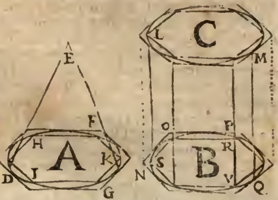
Si fuerint duo priſmata triangularia A E B D, & G N I M, & baſis G H I ſit ſemiſſis parallelogrammi B D, & altitudo K O æqualis ſit perpendiculari E R à latere F E ad planum parallelogrammi B D ductæ. Dico priſmata eſſe inter ſe æqualia. Ductis lineis rectis G K, H K, A C, A E, & planis per eaſdem rectas extenſis, erit i pyramis K G H I tertia pars priſmatis G N I M, & pyramis A E D C tertia pars priſmatis F D B: Sed baſes G H I, & A D C dictarum pyramidum ſunt inter ſe æquales (cùm k parallelogrammum B D duplum ſit trianguli A D C, & ex hypotheſi duplum etiam erat trianguli G H I) & altitudines K O, E R æquales etiam poſitæ ſunt; Ergo l pyramides K G H I, & E A D C æquales erunt inter ſe: vnde m earum tripla, ſcilicet priſmata M H K, & F D B æqualia erunt inter ſe. Quod, &c. i pr. 28. huius. k pr. 26. l. 1. l pr. 23. 24. huius. m pr. 1. l. 3. & pr. 28. huius.



PROPOS. XXIX. THEOR. XXV. Eucl. 10. XII.

Si coni, & cylindri baſes, & altitudines æquales inter ſe fuerint, erit conus tertia pars cylindri.

Sit conus E A, & cylindrus C B, quorum baſes circuli A, B ſint æquales, pariterque eorum altitudines æquales ſint inter ſe. Dico conum E A tertiam partem eſſe cylindri C B. Adſcribantur a cono E A duæ pyramides E D, F G, & E H I K, quarum differentia à cono minor ſit quacunque data magnitudine: & circulo B adſcribantur b duo polygona O P Q, & R V S ſimilia regularibus polygonis D F G, & H I K. Patet c circunſcripta polygona D F G, O P Q æqualia eſſe, eo quod ſunt a pr. 28. huius. b cor. 2. pr. 4. l. 5. c pr. 10. 12. l. 5. & cor. 1 pr. 16. l. 3.



inter ſe vt quadrata radiorum, ſeu vt circuli æquales A, B, eadẽ ratione equalia erũt inſcripta polygona H I K, & R S V. Poſtea à puncto S anguli polygoni R S V, atq; à puncto Q cõtactus polygoni O P Q ducantur *d* latera cylindri S L, & Q M, & hęc reuoluantur ſemper ſibi ipſis parallela per perimetrũ polygonorũ R S V, & O P Q; cumque ſuperficies inde genitę ſecentur à plano circuli C parallelo ſubiecto circulo B: Ergo *e* deſcripta erunt duo priſmata, quorum baſes R S V, & O P Q; altitudines verò ęquales altitudini cylindri C B. Et quia *f* tam latera cylindri C B, quàm priſmatum R S V L, & O P Q M parallela ſunt iiſdẽ cylindri lateribus L S, & M Q: Ergo *g* illa omnia parallela ſunt inter ſe; & ideo latera cylindri, quę ab iiſdem punctis peripherię circuli B, à quibus latera polygonorum ducuntur, erunt quoque latera priſmatum; aliàs *h* ab iiſdem punctis peripherię circuli B duci poſſent duę rectę lineæ eidem S L, vel M Q, & inter ſe parallelę, quod eſt impoſſibile. Et quoniam latera omnia polygoni R S V inſcripti ſecant circulum B: Ergo *i* plana, quæ per latera polygoni R S V, & per latera cylindri ducuntur, ſecãt cylindrum, & intra ipſum cadunt; hæc verò plana ſuperficiem priſmatis R S V L efficiunt: Quare priſma R S V L intra cylindrum C B inſcriptum erit, & minus erit cylindro. Similiter quia latera polygoni N O P circunſcripti tangunt circulum B: Ergo *k* plana, quæ per latera polygoni N O P, & per latera cylindri à contactibus ducta extenduntur, tangunt cylindrum, & extra ipſum cadunt, quæ cùm ſuperficiem priſmatis N O P Q M componant, neceſſariò priſma N O P Q M comprehendet cylindrum C B, & maius erit illo.

Iam quoniã ſunt duę magnitudines prima conus E A, ſecunda cylindrus C B, & ratio data ſubtripla, & pyramis E F G D conſcripta, & maior ipſo cono exceſſu minori quacunque magnitudine propoſita ad priſma M O P Q quod conſcriptum, & maius eſt cylindro C B, eandẽ rationẽ datã ſubtriplã *l* habet (eo quod altitudines, & baſes ęquales inter ſe habẽt) ideoq; pyramis E F G D maior, eſt quã ſubtripla cylindri C B. Et rurſus pyramis E H I K inſcripta, & minor cono E A defectu minore quacunque magnitudine propoſita ad priſma R V S L inſcriptum, & minus cylindro C B eandem rationem datam *m* ſub triplam habet, ideoq; pyramis E H I K minor eſt parte tertia cylindri C B: Ergo *n* prima ad ſecundam, ideſt conus E A ad cylindrum C B erit in ratione data ſubtripla. Eſt ergo

d def. 16. ſecun. huius
e def. 13. ſecun. huius
f def. 16. ſecun. huius
g pr. 7. huius.
h cor. pr. 17. l. 1.
i pr. 19. huius.
k pr. 19. huius.
l pr. 28. huius.
m prop. 28. huius.
n ſch. pr. 24. l. 3.

ergo conus E A tertia pars cylindri C B. Quod erat, &c.

COROLLARIVM I.

Eucl. 28. 29. 30. 31. lib. XI.

Deducitur ex his duabus propoſitionibus, quòd duo priſmata, aut duo cylindri, quorum baſes ſunt æquales, & altitudines equales, erunt æquales inter ſe.

Nam pyramis, cuius baſis æqualis eſt baſi, & altitudo æqualis altitudini vniuſcuiuſque ex priſmatis, eſt vtriuſque priſmatis tertia pars ex 28. propoſ. præcedente; & ideo *o* priſmata equalia erunt inter ſe. Pari modo conus, cuius baſis equalis eſt baſi, & altitudo equalis eſt altitudini tam primi, quàm ſecundi cylindri eſt vtriuſque cylindri tertia pars, ex hac propoſitione; & propterea *p* cylindri equales erunt inter ſe. *o pr. 4. l. 3.* *p pr. 4. l. 3.*

COROLLARIVM II.

Et ſi priſmata, & cylindri æquales baſes habuerint, inæquales verò altitudines; erunt ſolida ipſa pariter inæqualia, & maius illud, cuius altitudo maior eſt.

PROPOS. XXX. THEOR. XXVI.

Eucl. 25. XI. 13. 14. XII.

Si priſma, aut cylindrus ſecetur plano aduerſis baſibus parallelo: erunt priſmata, vel cylindri ſecti inter ſe, vt eorum latera, & vt eorum altitudines.

Sit priſma, vel cylindrus D A, cuius latus A D, & altitudo C E, & ſectum ſit plano G parallelo baſibus aduerſis A, D, à quo ſecetur altitudo C E in I, & latus A D in G. Dico ſolidum A G ad ſolidum D G eandem rationem habere, quam habet altitudo C I ad altitudinem I E, & quam latus A G habet ad latus G D, ſi tamen comparentur ea, quæ eiuſdem ſunt ſpeciei, ſcilicet priſmata inter ſe, & cylindri inter ſe. Secetur *a* altitudo I E in quotcunque partes equales I B, B X, X E, & *b* in recta I C producta ſecentur quotcunque partes I M, M P, P S ſingulæ æquales X E, ita vt *c* recta I S ſit quælibet partes ipſius I E. Poſtea *d* per puncta S, P, M, B, X plana ducantur parallela baſibus D, & G, tam in cylindro, quàm in priſmate. Et quoniam priſma, vel cylindrus A D ſecatur *a pr. 28. l. 1.* *b pr. 3. l. 1.* *c def. 3. l. 3.* *d cor. pr. 10 huius.*

 planis

e pr.17.huius. planis Q, N, K, G, Z, T baſibus parallelis: Ergo e figurę Q N, K, G, Z, T ſimiles, & æquales ſunt figuræ D, & inter ſe; & ſunt altitudines E X, X B, B I, I M, M P, P S æquales inter ſe: f cor.1.pr.29 huius. Ergo f omnia priſmata inter ſe, vel omnes cylindri Q N, N K, K G, G Z, Z T, T D æquales erunt inter ſe, & tot numero sũt, quot sũt equales altitudines S P, P M, M I, I B, B X, X E: Ergo g eædem partes erit priſma, vel cylindrus Q G ipſius priſmatis, vel cylindri G D, ac eſt partes altitudo S I ipſius I E. Et quoniam ſunt quatuor quantitates, prima altitudo C I, ſecunda altitudo I E, tertia priſma, vel cylindrus A G, & quarta priſma, vel cylindrus D G, & duæ aliæ quantitates altitudo S I & priſma vel cylindrus Q G, quæ h eandem, & quamlibet rationẽ cõmẽſurabilẽ habẽt ad cõſequẽtes; nã quęlibet partes eędẽ ſunt. S I quidẽ ipſius ſecũdę I E, & ſolidũ Q G ipſius quartę ſolidi G D (comparando ſemper priſmata inter ſe, & cylindros inter ſe); Et quotieſcunque S I ęqualis eſt primę C I, i neceſſariò ſolidum Q G ęquale eſt ſolido A G (quoniam eandem baſim G, & ęquales altitudines habent perpendiculares à puncto C ad planum G), & quoties S I maior fuerit, quàm C I, k neceſſariò ſolidum Q G maius erit ſolido G A, Et quotieſcunque S I minor fuerit, quàm C I, neceſſariò ſolidum Q G minus erit ſolido G A: Ergo l prima quantitas C I ad ſecundam I E eandem rationem habebit, quam tertia, quę eſt ſolidum A G ad quartam, ſcilicet ad ſolidum G D. Quare vt altitudo C I ad altitudinem I E, ita erit priſma A G ad priſma G D, vel cylindrus A G ad cylindrum G D. Tandem quoniam duę rectę lineę C E, & A D ſecantur à planis D, G, & A parallelis inter ſe: Ergo m vt C I ad I E, ita eſt A G ad G D. Quare vt ſolidum A G ad ſolidum G D, ita eſt illius latus A G ad huius latus G D. Quapropter, &c.

g def.6 l.3.

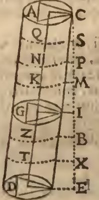
h def.8.l 3.

i cor.1 pr.29 huius.

k cor.2 pr.29 huius.

l pr.23.l.3.

m pr.11. huius.

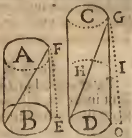


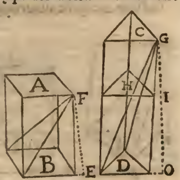
PROPOS. XXXI. THEOR. XXVII.

Quęlibet duo priſmata, cylindri, pyramides, aut coni proportionem habent compoſitã ex rationibus baſium, & altitudinum.

Sint

Sint duo priſmata, vel cylindri, aut pyramides, vel certè duo coni A B, C D, quorum baſes B, D, & altitudines ſint F E, G O. Dico ſolida eiuſdem ſpeciei, ſcilicet priſmata inter ſe, & cylindros inter ſe, atque pyramides inter ſe, nec non conos habere proportionem compoſitam ex ratione baſis B ad baſim D, & ex ratione altitudinis F E ad altitudinem G O. Et ſi quidem A B, C D fuerint pyramides, aut coni, fiant *a* ſuper eiſdem baſibus, & in eiſdem altitudinibus priſmata, aut cylindri A B. C D. & è contra, ſi fuerint priſmata aut cylindri, fiant *b* ſuper eiſdem baſibus, & in eiſdem altitudinibus pyramides, aut coni A B, C D; poſtea *c* ſecetur altitudo I O æqualis altitudini F E, & ducatur *d* planum I H parallelum baſi D, efficiens *e* figuram H æqualem, & ſimilem baſi D, vt ſit H D priſma, *f* vel cylindrus; vel certè punctum aliquod H fiat vertex pyramidis, aut coni H D. Et quia duæ pyramides, aut duo coni A B. H D æquales altitudines habent: Ergo *g* ſunt inter ſe, vt baſes B, D: ſed tam pyramides, quàm coni æquè metiuntur priſmata, & cylindros A B, H D, cùm *h* quodlibet ſolidum correſpondentis ſolidi eiuſdem ſpeciei tertia pars ſit: Igitur *i* priſma, aut cylindrus A B ad ipſum H D habet eandem proportionem, quam baſis B ad baſim D. Poſtea quia priſma, vel cylindrus C D ſecatur plano H aduerſis baſibus parallelo: Ergo priſmata *k* H D, & C D, aut cylindri inter ſe ſunt, vt altitudines I O, G O; ſed tam priſmata, quàm cylindri æquè multiplices ſunt pyramidum, vel conorum H D, C D, cum *l* quodlibet ſolidum correſpondentis eiuſdem ſpeciei ſolidi triplum ſit: igitur *m* pyramis, vel conus H D ad eiuſdem ſpeciei ſolidum C D eandem proportionem habet, quam altitudo I O ad altitudinem G O: eſt verò *n* proportio ſolidi A B ad ſolidum C D compoſita ex rationibus intermedijs, ſcilicet ex ratione ſolidi A B ad H D, & ex ratione H D ad C D (comparando ſemper ea, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt); atque eſt ſolidum A B ad H D, vt





a def. 13. 14 ſecun. huius
b def. 1. 2. ſecun. huius
c pr. 3. l. 1.
d cor. pr. 10 huius.
e pr. 17. huius.
f def. 13. 14 1. 2. ſecun. huius.
g pr. 25. 27 huius.
h pr. 28. 29 huius.
i pr. 11. & 7 l. 3.
k pr. 30. huius
l pr. 28. 29. huius.
m pr. 11. & 7 l. 3.
n pr. 19. l. 3

D, vt baſis B ad D, & ſolidum H D ad C D eſt, vt altitudo I O,
o pr. 3. l. 3 vel o ei ęqualis F E ad altitudinem G O: ergo p ſolidum A B ad
p pr. 19 l. 3 eiuſdem ſpeciei ſolidum C D habet proportionem compoſitam ex ratione baſis B ad baſim D, & ex ratione altitudinis F E ad altitudinem G O. Quod erat oſtendendum.

Eucl. 32. XI & 11. 14. XII.

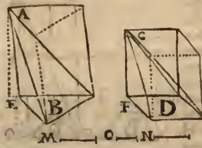
COROLLARIVM.

Patet, quod priſmata, & cylindri ęqualium altitudinum ſunt inter ſe, vt baſes: & pyramides, aut coni ęqualium baſium ſunt inter ſe, vt altitudines. Oſtenſa enim fuit proportio priſmatum, vel cylindrorum A B, H D æqualium altitudinum eadem, ac eſt proportio baſium B, D: atque proportio pyramidum H D, & C D habentium ęquales baſes eadem fuit ac habent altitudines I O, & G O.

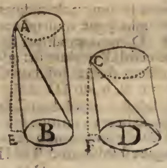
Eucl. 34. XI & 15. XII.

PROPOS. XXXII. PROBL. XXVIII.

Aequalium pyramidum, conorum, priſmatum, cylindrorum, reciprocantur baſes, & altitudines; & quorum baſes, & altitudines reciprocantur, ęquales ſunt inter ſe.



Sint primò ęquales inter ſe duæ pyramides, vel coni, aut priſmata, aut cylindri A B, & C D, quorum baſes B, D, & altitudines A E, C F. Dico, vt baſis B ad D, ita eſſe reciprocè altitudinem C F ad altitudinem A E. Sint duę quęlibet figuræ M, & N ęquales inter ſe, & vt B ad D, ita ſit M ad O. Et quoniam ſicut M ęqualis eſt N, ita ſolida A B, & C D ęqualia ſunt inter ſe (dummodo ſemper ea comparentur, quę eiuſdē generis ſunt);
a pr. 31. huius. & ęqualitatis proportio a ſolidi A B ad ſolidum C D componitur ex rationibus baſis B ad baſim D, & altitudinis A E ad altitudinem C F;
b pr. 21. l. 3 Eſt verò M ad O, vt B ad D: b Ergo reſidua proportio O ad N eadem eſt,



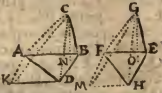
eſt, quę altitudinis A E ad altitudinem C F; & c inuertendo N ad O eſt, vt C F ad A E; ſed d N ad O eſt, vt M ad O (eo quod M, & N ę quales ſunt). Ergo e altitudo C F ad altitudinem A E eandem rationem habet, quam baſis B ad baſim D. c pr. 9. l. 3. d pr 3 l 3. e pr 7. l. 3.

Secundò in omnibus dictis ſolidis (comparando ſemper ea, quę eiuſdem ſunt ſpeciei) ſit baſis B ad D reciprocè vt altitudo C F ad altitudinem A E. Dico ſolida ipſa ęqualia eſſe inter ſe. Quoniā f ęquales M, & N ad eandē O eādē rationē habent, & eſt B ad D, vt M ad O, & C F ad A E eſt, vt B ad D, ſeu, vt M ad O: Ergo C F ad g A E eſt vt N ad O, & inuertendo A E h ad C F eſt, vt O ad N; ſed i proportio M ad N componitur ex rationibus M ad O, & O ad N: Ergo proportio M ad N componitur ex rationibus B ad D, & A E ad C F. Eſt verò proportio k ſolidi A B ad ſolidum C D compoſita ex ijſdem rationibus baſis B ad baſim D, & altitudinis A E ad altitudinem C F: Ergo l vt M ad N, ita eſt ſolidum A B ad ſolidum C D; ſed erat M ęqualis N. Ergo ſolidum A B ęquale eſt ſolido C D. Quod erat, &c. f pr. 3. l. 3. g pr. 7. l. 3. h pr. 9. l 3. i pr. 19. l. 3. k pr 31. huius. l pr. 19. l. 3.

PROPOS. XXXIII. THEOR. XXIX. *Eucl. 36. XI*

Si fuerint duę pyramides, vel duo priſmata, quorum baſes ſint triangula, vel parallelogrāma, & habeant vnum angulum ſolidum contentum à media trium proportionalium ęqualem angulo ſolido contento à tribus proportionalibus: erūt ſolida, quę eiuſdem ſpeciei ſūt, ęqualia inter ſe.

Sint anguli ſolidi B & E ęquales inter ſe, & angulus B contineatur à tribus rectis proportionalibus A B, C B, D B, & angulus E contineatur à tribus F E, G E, H E ęqualibus medię C B trium proportionalium, & compleantur triangula A B D, F E H, atque parallelogramma K B, M E. Dico primò pyramides, quarum vertices [illegible] & [illegible], baſes verò triangula A B D & F E H, vel parallelogramma K B, & M E ęquales eſſe inter ſe. A terminis a C, G ſublimium ęqualium B C, & E G homologarum cadant perpendiculares C N G O ad ſubiecta plana: Erunt b perpendiculares C N & G O ęquales inter ſe. Et quoniam anguli A B D, & F E H ęquales ſunt inter ſe, & eſt A B ad F E, ita reciprocè H E ad D B: Ergo a pr. 6. huius. b pr. 15. huius.



c pr. 14. l. 4. B: Ergo *c* triangula A B D, & F E H æqualia ſunt inter ſe, pariterque parallelogramma K B, & M E æqualia erunt inter ſe. Cùm ergo pyramidum C A B D, & G F E H, baſes A B D, F E H æquales ſint, & altitudines C N, G O etiam æquales: erunt *d pr. 23. 24. huius.* pyramides *d* æquales: pariterque quia baſes k B, M E æquales ſunt, & altitudines C N, G O etiam æquales; erunt *e* pyramides C k B, & G M E in eadem proportione æqualitatis. *e pr. 25. huius.*

Secundò iiſdem poſitis. Dico priſmata, quorum latera C B, G E, & baſes triangula A B D, & F E H, vel parallelogramma K B, & M E eſſe æqualia inter ſe. Quoniam prædicta priſmata altitudines habent æquales ipſis C N, & G O æqualibus; ideoque æquè alta erunt, & baſes A B D, & F E H æquales ſunt, *f cor. 1. pr. 29 huius.* nec non baſes k B, et M E. Ergo *f* prædicta priſmata æqualia inter ſe erunt. Quod erat, etc.

PROPOS. XXXIV. THEOR. XXX.

Si hemiſphærium, et conus rectus, æquales axes, et baſes habentes, ſecentur planis parallelis baſibus, et æquè remotis à centro ſphæræ et vertice coni, et ſuper ſectionibus, et ſuper circulo baſis coni, vel hemiſphærij ſolida æquè alta deſcribantur: erunt ſectiones genitæ circuli, qui ſimul ſumpti æquales erunt circulo baſis hemiſphærij, vel coni; & ſolida ipſa erunt cylindri æquales cylindro ſuper circulo baſis coni, vel hemiſphærij deſcripto eiuſdem altitudinis.

Sit hemiſpherium B C D, & conus rectus F G H, quorum circuli baſium A, & E ſint æquales, & axes A B, & E F perpendiculares ad plana circulorum A, E, ſint etiam æquales, & per puncta M & O æquè remota à centro ſphæræ A, & vertice coni F ducantur plana K L & P Q parallela baſibus A & E. Dico primò ſphæræ ſectionem K L circulum eſſe. Ducantur à puncto M in plano K L duæ quælibet rectæ lineæ M K, M N ad perimetrum eius, & iungantur rectæ A k, A N. *a cor. 1. pr. 9 huius.* Quoniam A B axis perpendicularis eſt ad vnum planorum æquidiſtantium C D: Ergo *a* B A perpendicularis eſt quoque *b pr. 2. huius.* ad planum reliquum K N L; & ideo *b* A M perpendicularis erit ad rectas K M, & M N in eodem plano exiſtentes; & propterea triangula A M K, & A M N rectangula erunt in M, & ſunt hypothenuſæ A K, A N æquales, cùm ſint radij ſphæræ, & latus A M commune, atque reliqui anguli K, & N acuti,

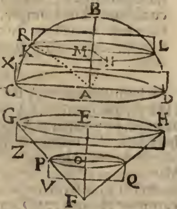
cùm

cùm anguli ad M ſint recti: Igitur c triangula A M K, A M N ſimilia ſunt, & habent latera homologa A N, A k æqualia: Ergo d reliqua latera homologa M K, & M N çqualia ſunt. Cùmque quęlibet rectę à puncto M ductę ad curuam K M L in dicto plano ſint æquales inter ſe; erit figura k N L circulus, cuius centrum M.

c pr.8. l.4.

d cor.1. pr. 16.l.3.

Secundò dico figuram P Q in cono genitam eſſe circulum; atque duos circulos k L, & P Q ſimul ſumptos, çquales eſſe circulo A, vel E. Quoniam in cono F G H rectangulo duo plana parallela inter ſe G H, & P Q ſi quomodolibet ſecentur plano per axim ducto G F H, e neceſſariò ſectiones G E, & P O erunt parallelę inter ſe, & f anguli ad O & E erũt recti, quia axis E F perpendicularis eſt ad dicta plana, ideoque ad rectas G E, P O exiſtentes in ipſis. Vnde g triangula G E F, & P O F ſimilia erunt; & ideo, vt G E ad E F, ita erit P O ad O F, eſtque G E æqualis E F: Ergo h P O æqualis erit F O. Eadem ratione Q O æqualis erit eidem O F. Ergo P O, & Q O, & ſic reliquæ omnes in plano P Q à puncto O ductæ çquales erunt eidem F O, & ideo inter ſe: Quare figura P Q circulus erit, cuius cẽtrum O. Et quoniam i in triangulo rectangulo A M K duo circuli à radijs K M, & M A deſcripti æquales ſunt circulo à radio K A deſcripto; eſtque circulus A, vel E æqualis circulo radij k A, eo quod rectę A K, A C, E G æquales ſunt, atque circulus radij A M æqualis eſt circulo P Q (eo quod radij A M, & P O æquales ſunt eidem F O, & inter ſe): Igitur circulus A, vel E æqualis eſt duobus circulis K L, & P Q ſimul ſumptis.



e cor.1.pr. 9. huius.

f pr.1.huius

g cor.1.pr. 6.l.4.

h cor.1.pr. 16.l.3.

i pr.18.l.5.

Tertiò ſuper circulos A, E, P Q, & K L deſcribantur cylindri ęquę alti C X D, Z G H, V P Q, & R K L. Dico cylindrum X C D, vel Z G H çqualem eſſe duobus cylindris R k L, & V P Q ſimul ſumptis. Nam altitudines X C, vel Z G, & R K, V P çquales factæ ſunt: Ergo k cylindri X C D, R K L, V P Q erunt vt baſes; & eſt baſis circulus A, vel E æqualis duobus circulis K L, & P Q ſimul ſumptis. Igitur l cylindrus X C D, vel Z G H çqualis eſt duobus cylindris R k L, & V

k cor.pr.31. huius.

l cor.pr.22. & cor.1.pr. 16.l.3.

P Q ſimul ſumptis, vt propoſitum fuerat.

COROLLARIVM.

Colligitur ex prima parte huius propoſitionis, quòd perpendicularis à centro ſphere ad planum circuli minoris in ea ducti cadit in centrum eiuſdem circuli. Oſtenſum enim eſt perpendicularem A M à centro ſpherę ad planum circuli k L ductam cadere in M centrum circuli K L.

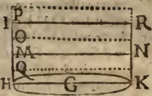
PROPOS. XXXV. PROBL. V.

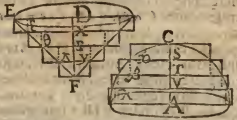
Si hemiſphęrium, conus rectus, & cylindrus ęquales axes, & baſes habuerint, poſſunt adſcribi hemiſphęrio, & cono figurę gradatę ex cylindris ęquè altis compoſitę, ita vt circumſcriptę, ſimul ſumptę, maiores ſint dato cylindro exceſſu minore quocūque dato, & duæ inſcriptę, ſimul ſumptę, minores ſint dato cylindro defectu minore quocunque dato.

Sit hemiſphærium A B C, conus rectus D E F, & cylindrus I H k R, quorum baſes A, G, D ſint circuli æquales, & altitudines perpendiculares A C, D F, I H ſint æquales inter ſe. Debent adſcribi, imperatæ figuræ. Secetur [a] latus I H cylindri bifariam in M, ducaturque [b] planum M N parallelum baſi G. Manifeſtum eſt [c] cylindrum I M N dimidium eſſe totius cylindri I H k; & ſi rurſus latus I M bifariam ſecetur in O, ducaturque planum per O parallelum baſi G: ſimiliter erit cylindrus R I O dimidium cylindri I M N; & ſi hæc bipartitio, & productio planorum æquidiſtantium baſi G ſemper repetatur, relinquetur [d] tandem cylindrus aliquis, qui minor erit quacunque magnitudine propoſita. Ponatur igitur poſtremus cylindrus R I O minor quacunque magnitudine data. Et [e] M H bifariam ſecetur in Q, ducaturque planum parallelum baſi, & addatur in directum cylindrus P I R æqualis cylindro R I O; ſeceturque [f] tam altitudo A C, quàm D F in tot partes æquales in punctis S, T, V, X, Z, Y, in quot ſecta fuit I H. Patet [g] partes A V, F Y æquales eſſe cuilibet Q H, & inter ſe (eò quod æquè multiplices earum A C, D F, & I H æquales ſunt inter ſe). Eadem ratione reliquæ partes V T, T S, S C, Y Z, Z X, X D, Q M, M O, O I, I P æquales inter ſe erunt.

a pr. 9. l. 1.
b cor. pr. 10. huius.
c cor. 1. pr. 29. huius.
d ſch. pr. 27. l. 2.
e pr. 9. l. 1. & cor. pr. 10. huius.
f pr. 28. l. 1.
g pr. 1. l. 3.

erunt. Deinde [h] per puncta diuiſionum ducantur plana parallela baſibus A, & D, quæ [i] circulos efficient tam in hemiſpherio, quàm in cono, quorum circulorum radij ſunt S α, T β, V λ, X ε, Z θ, Y π: & [k] ſuper circulo radij S α deſcribantur duo cylindri recti; quorum altitudines S C, & S T, eorumq; ſemiſectiones per axim ſint parallelogramma rectangula C α, T α: eſtque parallelogrammum C α circunſcriptum ſegmento S C α circuli maximi B C, eo [l] quod contingens à puncto C cadit extra circulum B C; parallelogrammum verò T α inſcriptum eſt fruſto S α β T eiuſdem circuli, cum [m] latus oppoſitum, & æquale ipſi S α minus ſit, quàm T β, eo quod T β minùs diſtat à centro A circuli B C, quàm S α. Et quia altitudines S C, S T æquales ſunt, & baſis communis, [n] cylindrus circunſcriptus ſegmento ſphæræ, cuius ſemiſectio per axim eſt C α, erit æqualis cylindro inſcripto, cuius ſemiſectio eſt T α. Eodem modo ſuper reliquos circulos radiorum T β, V λ, X ε, Z θ, Y π deſcribantur bini cylindri, quorum vnus extra ſolidum cadens æqualis erit reliquo intra ipſum cadenti, eo quod ſunt omnes æquè alti, & bini quilibet communem baſim habent. Vnde vniuerſa figura gradata, ex cylindris æquè altis compoſita, cuius ſemiſectio per axim S α β λ A, quæ eſt inſcripta hemiſphærio, æqualis erit figuræ gradatæ circunſcriptæ abſque infimo cylindro, cuius ſemiſectio per axim C α β λ V. Similiter figura gradata ex cylindris æque altis compoſita, cuius ſemiſectio per axim D ε θ λ Y inſcripta cono æqualis oſtendetur figuræ gradatæ circunſcriptæ abſq; infimo cylindro, cuius ſemiſectio per axim λ ε θ π F. Quapropter binæ figuræ gradatæ inſcriptæ hemiſphærio, & cono, ſimul ſumptæ, æquales erunt duabus figuris gradatis circunſcriptis hemiſphærio, & cono abſque duobus infimis cylindris, quorum ſemiſectiones V B, & X E. Et quoniam puncta V, Y æquè recedunt à centro ſphæræ A, & à vertice coni F recti cylindri [o] æquè alti, quorum ſemiſectiones





[h] cor. pr. 10. huius.
[i] pr. 34. huius.
[k] def. 19. ſecun. huius
[l] pr. 21. l. 6
[m] pr. 16. l. 1 & pr. 11. l. 2
[n] cor. 1. pr. 29. huius.
[o] prop. 34. huius.

per axim parallelogramma A λ, & Z π, ſimul ſumpti, ęquales erunt cylindro Q H k; propterea quod altitudines ęquales ſunt, & circulus baſis G ęqualis eſt duabus baſibus à radijs V λ, & Y π deſcriptis. Eadem ratione duo cylindri, quorum ſemiſectiones V β, & X θ ęquales erunt cylindro Q M N; & duo cylindri quorum ſemiſectiones T α, D ε ęquales erunt cylindro O M N. Quare duę figurę gradatę inſcriptæ hemiſphęrio, & cono, quarum ſemiſectiones A λ β α S, & Y π θ ε D ſimul ſumptę, ęquales erunt cylindro O H k; ſed eiſdem figuris inſcriptis ęquales erant duę figurę gradatę circunſcriptę hemiſphęrio, & cono abſque infimis cylindris, quorum ſemiſectiones C α β λ V, & X ε θ π F. Ergo duę figuræ gradatę circunſcriptę hemiſphærio, & cono abſque infimis cylindris, ęquales erunt cylindro O H k: At p infimus cylindrus circa ſphęram, cuius ſemiſectio B V, ęqualis eſt cylindro O I R, propterea quod baſes, & altitudines æquales ſunt: pariterque infimus cylindrus circa conum, cuius ſemiſectio E X ęqualis eſt cylindro P I R: Igitur duæ figurę gradatę circunſcriptę hemiſphęrio, & cono, quarũ ſemiſectiones C α β λ B A, & D E ε θ π F, ſimul ſumptę ęquales erunt cylindro P H k; eſtque cylindrus P I R exceſſus cylindri P H k ſupra cylindrum I H k, atque cylindrus P I R minor erat quacunque data magnitudine. Igitur duę figuræ gradatæ circunſcriptę hemiſphęrio A B C, & cono D E F, ſimul ſumptę, ſuperant cylindrum datum I H K exceſſu minore quacunque data magnitudine; Et duę figurę gradatę inſcriptæ hemiſphærio A B C, & cono D E F, quæ æquales erant cylindro O H K, deficiunt à cylindro I H K defectu O I R minore quacunque data magnitudine. Quod fieri poſſe oſtendendum erat.

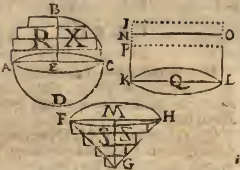
p cor 1. prop. 29. huius.

PROPOS. XXXVI. THEOR. XXXI.

Sphęra quadrupla eſt coni recti, cuius baſis ęqualis eſt circulo maximo, axis verò ęqualis radio ſphęrę.

Sit ſphęra A B C D, cuius circulus maximus per centrum E ductus ſit A C, & conus F H G, cuius baſis M ſit ęqualis circulo

culo E, & axes M G, B E ſint æquales, & perpendiculares ad plana baſium E, & M. Dico ſphæram A B C D quadruplam eſſe coni recti F H G. Fiat rectus *a* cylindrus N K L O, cuius baſis Q æqualis ſit circulo E, vel M, & altitudo N k æqualis ſit axi B E, vel M G; Et *b* deſcribantur circa hemiſphærium A B C, & circa conū F H G duæ figuræ gradatæ ex cylindris æquè altis compoſitę, quarum ſemiſectiones per axim ſint R, & S, ita vt ſimul ſumptę, maiores ſint cylindro N k L O exceſſu I N O minori quacunque data magnitudine: pariterque hemiſphærio, & cono inſcribantur duę figurę gradatę, quarum ſemiſectiones X, & Z, quę minores ſint cylindro N K L O defectu P N O minori quacunque data magnitudine. Et quoniam ſunt duę magnitudines, prima cylindrus N k L O, ſecunda eſt hemiſphærium A B C, vna cum cono F G H, & duę aliæ magnitudines in ratione æqualitatis, ſcilicet cylindrus I K L, & duę figurę gradatę, ſimul ſumptę, quarum ſemiſectiones R, & S, quę ſunt vnà maiores prima, & ſecunda, (nam figurę gradatę circumſcriptę, quarum ſemiſectiones R, & S maiores ſunt hemiſphærio vnà cum cono), & cylindrus I k L maior eſt cylindro N K L O exceſſu I N O minore quacunque data magnitudine: pariterq; ſunt duę aliæ magnitudines ſcilicet cylindrus P k L qui ęqualis eſt duabus figuris gradatis inſcriptis, quarū ſemiſectiones X, & Z, & ſunt vnà minores prima, & ſecunda; eſtque defectus cylindri P K L à prima, ſcilicet à cylindro N k L O minor quacunque magnitudine data: Ergo *c* prima ad ſecundam, ideſt cylindrus N K L O ad hemiſphærium A B C, vnà cum cono F G H eandem rationem æqualitatis habet. Eſtque *d* cylindrus N k L O triplus coni F H G æqualem baſim, & altitudinem cum illo habentis: Igitur *e* hemiſphærium A B C vnà cum cono F G H ad conum E G H triplam proportionem habet; Et *f* diuidendo hemiſphærium A B C ad conum F G H duplam proportionem habebit: Eſtque ſphæra A B C D dupla hemiſphærij A B C: Ergo ſphæra A B C D quadrupla eſt coni F G H. Quod, &c.



a def.14.19 ſecun.huius & pr.3.l.8.

b pr.35.huius.

c ex ſch.pr. 24.l.3.

d pr.29.huius.

e pr.3.l.3.

f pr.13 l.3.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt ſi cylindrus rectus baſim habuerit æqualem maximo ſphęrę circulo, altitudinem verò æqualem diametro eiuſdem ſphęrę, eſſe cylindrum ſeſquialterum ipſius ſphæræ.

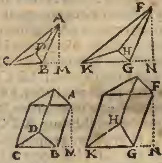
Quia cylindrus N K L O, ex hac propoſitione, ęqualis eſt
g prop. 29. huius. hemiſphęrio A B C vnà cum cono F G H; eſt verò g cylindrus triplus coni: Ergo h per conuerſionem rationis cylindrus N K
h cor. pr. 15. l. 3. L O ſeſquialter eſt hemiſphęrij A B C, et i duplum ad duplũ
i pr. 11. l. 3. in eadẽ ratione quoque erit; id eſt cylindrus cuius baſis ęqualis eſt maximo ſphęrę circulo, altitudo verò ęqualis diametro ſphęrę, ſeſquialter erit ſphęræ A B C D.

Eucl. 33. XI 8. 12. 18. XII

PROPOS. XXXVII. THEOR. XXXII.

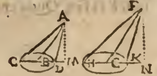
Pyramides, priſmata, coni, cylindri ſimiles, & ſphæræ in triplicata ſunt ratione homologorum laterum, vel ſuorum axium.

Sint duę pyramides, aut priſmata, aut coni, aut cylindri ſimiles, aut duę quęlibet ſphęrę A B C D, & F G H K, quarum latera homologa, ſeu axes A B, & F G. Dico ſolidum ad ſimile ſolidum triplicatam habere proportionem lateris, ſeu axis A B ad latus, ſeu axim F G. Demittã-

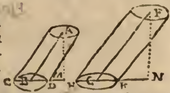


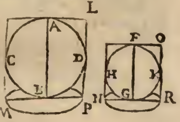
a pr. 6. huius tur a à ſummitatibus ſolidorum ad plana baſium perpẽdiculares A M, & F N, quę altitudines eorum determinabunt.
b def 3. huius. Quoniam b propter ſimilitudinem pyramidũ, aut priſmatum anguli ſolidi B, & G ęquales ſũt, & ideo planis angulis ęqualibus C B D, & H G K inſiſtentes A B, & F G cum lineis primò poſitis æquales angulos continent: c Quare
c prop. 15. huius. vt B A ad G F, ita erit perpendicularis, ſeu altitudo A M ad altitudinem F N: Cumque propter ſimilitudinem triangulorum, vel parallelogrammorum C B A, K G F ſit, vt A B ad B C, ita

C, ita F G ad G k: Ergo d permutando vt A B ad F G, ſeu, e vt altitudo A M ad altitudinem F N, ita eſt B C ad G k. In conis verò, & cylindris, quoniam f propter ſimilitudinem ſolidorum, vt axis A B ad axim F G, ita eſt diameter C D circuli baſis ad diametrum H K, ſeu g radius B D, ad radium H G, & anguli A B D, & F G k æquales ſunt: pariterque anguli ad M, & N recti: Ergo h triangula A B M, & F G N ſimilia ſunt; Quare vt i axis A B ad axim F G, ita eſt A M, altitudo eiuſdem ſolidi, ad F N altitudinem alterius ſolidi. — d pr. 10. l. 5. e pr. 7. l. 5. f def. 24. ſ. cun. huius g pr. 11. l. 5. h cor. 1. pr. 4. l. 4. i cor 2. pr. 44. l. 1.



Patet ergo, quòd in omnibus prędictis ſolidis ſimilibus, vt eſt latus, vel axis A B ad latus, ſeu axim F G, ita eſt altitudo A M ad altitudinem F N; & ita pariter eſt B D ad G H, quæ sūt latera homologa polygonorum baſium, vel ſemidiametri circulorū baſium B D, & G K dictorum ſolidorum: & quoniam k ſolida, quę eiuſdem ſpeciei ſunt, ideſt coni inter ſe comparati, &c. proportionem habent inter ſe compoſitam ex proportione baſium B C D & G k H, & ex ratione altitudinum A M, & F N: Eſt verò l proportio duplicata lateris, ſeu ſemidiametri C B ad latus, ſeu ſemidiametrum G k eadem, quę baſis B C D ad ei ſimilem baſim G k H; ſed vt C B ad G K, ita eſt A B ad F G: Ergo m proportio duplicata lateris, ſeu axis A B ad latus, ſeu axim F G, eadem eſt, quę baſis B D C ad baſim G H K; Poſtea ſimplex proportio A B ad F G eadē eſt, quę altitudinis A M ad altitudinem F N: Ergo proportio ſolidi A B C D ad ſolidum F G H K componitur ex duplicata proportione, & rurſus ex ſimplici ipſius A B ad F G; Hęc n verò triplicata proportio eſt lateris, vel axis A B ad F G. quare ſolida ſimilia A B C D, & F G H K triplicatam proportionem habent laterum homologorum, ſiue axium A B ad ad F G. — k prop. 31. huius. l pr. 17. l. 4. & pr. 12. l. 5. m pr. 7. l. 5. n pr. 19. l. 5.





In ſphęris autem A C B D, & F H G K intelligantur circunſcripti cylindri recti M L, & N O, quorū baſes M P, & N R ęquales ſint maximo ſphęrę circulo, & altitudines L P & O R ęquales diametro eiuſdem ſphæræ. Et quoniam cylindri M L, & N O ſimiles ſunt, (eo

quod ſunt recti,& eandem æqualitatis rationem habet axis A B ad axim F G, quam M P diameter circuli ſuę baſis ad N R diametrum baſis alterius: Ergo o cylindrus M L ad cylindrum N O proportionem triplicatã habet axis A B ad axim F G; Eſt verò p cylindrus M L ſeſquialter ſphęrę A C B D; Pariterque cylindrus N O ſeſquialter ſphęrę F H G k: Ergo q permutando vt cylindrus M L ad cylindrum N O, ideſt r vt triplicata proportio axis A B ad axim F G, ita eſt ſphęra A B C D ad ſphæram F H G k, Quod erat oſtendendum.

o par. prima huius.
p cor. pr. 36. huius.
q pr. 12. l. 3
r par. prima huius.

Finis Libri ſexti.

LIBER SEPTIMVS.

Eucl. XIII. & XIV.

De quinque corporibus regularibus.

DEFINITIONES.

I.

Cuiuslibet rectæ lineæ quadratum, vocetur eius Potentia: Et proportio quadratorũ quarumlibet linearum, vocetur earundem linearum proportio potentialis, vel in potentia.

Vt quotieſcunque dicetur recta A ad rectam B eſſe potentia, vt 2 ad 3, ſenſus erit, quadratum ipſius A ad quadratum alterius rectæ B habere proportionem ſubſeſquialteram, ſeu eſſe vt 2 ad 3.

II.

Solida figura in ſphęra inſcribi dicitur, & ſphęra circunſcribi figurę ſolidę, quando omnes anguli ſolidę figurę tangunt ſuperficiem ſphęrę.

III.

Solida figura ſphæræ circunſcribi dicitur, & ſphæra inſcribi dicitur in figura ſolida, quando omnia plana figuræ ſolidæ tangunt ſuperficiem ſphęrę.

IV.

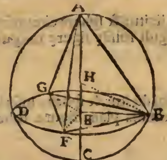
Nomina trianguli, quadrati, pentagoni, hexagoni, decagoni, abſque alia ſuperaddita declaratione ſignificent tantummodo eas figuras regulares, quę ab eodem circulo comprehendi poſſunt; pariterque nomina figurarum ſolidarum ſignificabunt ſolummodo eas, quę in eadem ſphęra inſcribi poſſunt.

Eucl. 13. XIII.

PROPOS. I. PROBL. I.

In data ſphęra figuram ſolidam ſub quatuor triangulis ęqualibus, & ęquilateris contentam, inſcribere. Voccetur autem talis figura Tetraedrum.

In ſphęra A B C D, cuius axis A C, circulus maximus A B C D, inſcribenda eſt figura imperata. Secetur *a* C E, quæ tertia pars ſit axis A C, & *b* per E in duobus planis eleuentur E B, & E G perpendiculares ad eandem A C; erunt *c* axis A C & circulus A B C perpendiculares ad planum per B E G ductum, quod efficiet *d* circulum B G D F, & *e* in eo inſcribatur triangulum ęquilaterum B G F, iunganturque rectę AB, A F, & A G. Oſtendendum eſt figuram A B F G eſſe quęſitam. Quoniam *f* in ſemicirculo A B C, rectę lineæ C A, A B, A E proportionales ſunt *g* vt *g* recta C A ad A E, ita erit quadratum ex C A ad quadratum ex A B; & ita erit quadratum ex B A ad quadratum ex A E; ſed *h* vt recta A E ad E C, ita eſt quadratum ex A E ad quadratum ex E B: Igitur *i* ex compoſitione ordinata erit, vt A C ad C E tertiam partem eius, ita quadratum A B ad quadratum E B; & *k* propterea quadratum ipſius AB triplum eſt quadrati ipſius E B; ſed *l* quadratum ipſius F B, ſcilicet lateris trianguli ęquilateri, inſcripti circulo B D, triplum eſt quadrati radij eius E B. Ergo *m* quadrata rectarum A B, & B F ęqualia ſunt inter ſe; & *n* propterea rectæ A B & B F ęquales erunt. Eadem ratione tam recta A F, quàm A G ęqualis erit eidem F B, ſeu B G, vel F G; & propterea *o* quatuor triangula A B F, A F G, A G B, & B G F æquilatera erunt & inter ſe ęqualia. Et hęc comprehendunt ſolidam figuram *p* deſcriptam intra ſphęram A B C D, quod imperatum fuerat. Voccetur dicta figura A B F G Tetraedrum.



a pr. 28. l. 3.
b pr. 10. l. 1
c pr. 2. & 4. l. 6.
d pr. 34. l. 6.
e pr. 3. l. 5.
f ex pr. 10. l. 4.
g cor. 3. pr. 27. l. 4.
h ex ſch. pr. 9. & cor. 3. pr. 17. l. 4.
i pr. 19. l. 3.
k def. 8. l. 3.
l pr. 30. l. 5.
m pr 4. l. 3.
n cor. 2. pr. 27. l. 4.
o pr 1. & 4 l. 1.
p def. 2. hu-ius.

COROLLARIVM I.

Diameter ſphęrę poteſtate ſeſquialtera eſt lateris inſcripti tetraedri. Nam facta eſt C A ſeſquialtera ipſius A E, & vt C A ad A E; ita oſtenſum eſt in hac propoſitione quadratum ipſius C A ad quadratum A B lateris Tetraedri.

COROLLARIVM II.

Altitudo tetraedri ſubſeſquialtera eſt diametri ſphęræ: & ſeſquitertia radij eiuſdem.

Nam facta fuit E C tertia pars diametri A C; & ideo qualium partium A C eſt 6. erit E C 2, & A E 4, & H C, ſeu H B ſphęrę radius 3. Et propterea A E altitudo ad A C erit vt 4 ad 6, & ad radium ſphęrę H B erit, vt 4 ad 3.

COROLLARIVM III.

Perpendicularis à centro ſphęrę ad planum baſis inſcripti tetraedri, quę vocetur Radius tetraedri, ſexta pars eſt diametri, & tertia pars radij ſphęrę.

Nam perpendicularis H E ęqualis eſt differentię altitudinis A E, & radij ſphęrę A H; ſed altitudo A E eſt 4, & radius 3, illarum partium, quarum diameter A C eſt 6. Ergo talis perpēdicularis H E ſexta pars eſt diametri, & tertia radij A H.

COROLLARIVM IV.

Latus tetraedri ad eius altitudinem ſeſquialterum eſt poteſtate. Nam, vt C A ad A E, ideſt, vt 3 ad 2, ita oſtenſum eſt quadratum B A ad quadratum A E in hac propoſitione.

COROLLARIVM V.

Radius circuli comprehendentis triangulum tetraedri octo nonę partes eſt poteſtate radij ſphęrę; Et octuplum poteſtate perpendicularis à centro ſphęrę.

Nam E H tertia pars eſt radij H B: Ergo 9 quadratum H E nona pars eſt quadrati H B; ideoque quadratum B E erit 8. 9 cor. 3. pr. 17 l. 4.

COROLLARIVM VI.

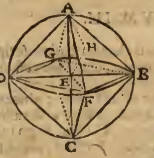
Patet tetraedrum diuidi in quatuor pyramides ęquales, quarum vertices in centro ſphęrę, baſes verò plana tetraedri: *f pr.13.l.6.* eo *f* quod baſes, & altitudines ſunt inter ſe ęquales.

Eucl.14. XIII.

PROPOS. II. PROBL. II.

In data ſphęra ſolidam figuram ſub octo triangulis ęquilateris inter ſe ęqualibus contentam inſcribere. Vocetur autem talis figura Octaedrum.

a pr.10 l.1. *a pr.6.l.6.* Sit data ſphęra A B C D, cuius centrum E. Deſcribi debet intra eam figura imperata. Ducantur *a* tres diametri A C, B D, F G ad inuicem perpendiculares, & coniungantur rectę A B, A F, A D, A G, C B, C F, C D, & C G. Quoniam in tribus triangulis A E B, A E F, B E F communia latera E B, A E, & E F ſunt ęqualia, radii nimirū ſphęrę; Suntque anguli A E B, A E F, & B E F ęquales, cùm radii A E, B E, F E ad inuicem perpendiculares ducti ſint. Igitur *b* iſoſcelium triangulorum baſes A B, A F, F B ęquales *b pr.4.& 5. l.1.* ſunt inter ſe; & propterea *c* triangulum A B F ęquilaterum erit. Simili ratione reliqua omnia *c pr.1.l.1.* triangula B A G, G A D, D A F, F C B, B C G, G C D, D C F ęquilatera erunt; & *d* ſunt inter ſe ęqualia, cùm bina quęlibet *d pr.4.l.1.* triangula habeant latera communia. Igitur figura ſolida A B C D G F intra ſphęram deſcripta comprehenſa erit ſub octo triangulis ęquilateris, & inter ſe ęqualibus. & hoc erat faciendum. Vocetur huiuſmodi figura ſolida Octaedrum.



COROLLARIVM I.

Conſtat ſphęrę diametrum poteſtate duplam eſſe; Et radium ſphęrę poteſtate ſemiſſem eſſe lateris octaedri.

e pr.30.l.3. Nam in quolibet triangulo A B C *e* rect angulo in ſemicirculo A B C, in quo duo latera A B, B C ęqualia ſunt, quadratum

dratum hypothenuſę, ſeu diametri ſphęrę A C duplum eſt quadrati lateris A B, & g quadratum radii E A, quod eſt quarta pars quadrati A C, erit ſemiſſis quadrati lateris A B. f pr. 18. l. 5 g cor. 1. pr. 19 l. 5.

COROLLARIVM II.

Radius ſphęrę poteſtate ſeſquialter eſt radii circuli continentis triangulum Octaedri. h cor. 1. hui.

Nam h A E poteſtate ſemiſſis eſt ipſius A B, & i A B eſt tripla poteſtate ipſius A H, radii nimirum circuli, continentis triangulum A B F, quæ rationes componunt ſeſquialteram. i pr. 30. l. 5.

COROLLARIVM III.

Perpendicularis à cẽtro ſphęrę ad planum trianguli Octaedri (quę vocetur Radius octaedri) eſt ad radium ſphęrę poteſtate ſubtripla. nam k à centro ſphęrę ducta perpendicularis E H ad planum circuli continentis triangulum A B F cadet in centrum eiuſdem circuli; l & ideo in triangulo rectangulo in H erit quadratum ex A E ęquale duobus quadratis ex A H, & E H; & qualium partium quadratum ex A E eſt 3 erat quadratum A H 2; propterea quadratum ipſius EH erit vna tertia pars quadrati A E. k cor. pr. 34 l. 6. l pr. 18. l. 5

COROLLARIVM IV.

Altitudo Octaedri ad diametrum ſphęrę poteſtate tertia pars eſt.

Nam perpendicularis E H producta ad oppoſitam baſim C D G dupla eſt ipſius E H, ſicuti A C dupla eſt ipſius A E.

COROLLARIVM V.

Latus octaedri ad eius altitudinem poteſtate ſeſquialterum eſſe conſtat.

COROLLARIVM VI.

Patet octaedrum diuidi in octo pyramides verticem in centro ſphęrę habentes, quę altitudines, & baſes æquales habent; & ideo m æquales erunt inter ſe. m pr. 23. l. 6.

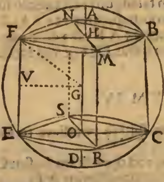
PRO-

Eucl. 15. XIII.

PROPOS. III. PROBL. III.

In data ſphæra ſolidam figuram inſcribere ſub ſex quadratis æqualibus contentam. Vocetur talis figura, Cubus.

Sit data ſphæra A B D F, cuius centrum G, axis A D. Debet
a pr. 13 l. 1. & pr. 10. l. 4 in ea inſcribi figura imperata. Secetur a recta G H, quæ media proportionalis ſit inter radium ſphæræ G A eiuſque partem
b cor 3. pr. 17 l. 4. tertiam: erit b eius quadratum tertia pars quadrati ex radio ſphæræ G A, & c fiat G O ęqualis G H, atque per duo puncta
c pr. 3. l. 1. H, & O ducantur duo plana ad axim A D erecta, ſicuti in pri-
d pr. 34 l. 6 ma propoſitione huius factum eſt, quę d efficient circulos B
e pr. 10. l. 1. M F, C R E, & e ducantur duę diametri B F, & M N ad inui-
f cor. 4 pr. 16. l. 1. cem perpendiculares; & in altero circulo ducatur f diameter C E parallela ipſi B F, atque R O S parallela ipſi M N, iunganturque rectæ B M, M F, F N, N B, B C, M R, F E, N S, S C, C R, R E, & E S. Et quoniam iuncta recta G F in triangulo re-
g pr. 18. l. 5. ctangulo F G H g quadratum radij



F G, ſeu G A ęquale eſt duobus quadratis F H, & H G; & erat quadratum radij A G triplum quadrati ipſius G H: Ergo quadratum ipſius G F ſeu duo quadrata ipſarum F H, & H G tripla erunt quadrati ipſius G H; & propterea quadratum ipſius F H duplum erit quadrati ipſius H G;
h pr. 18. l. 5. eſtque h quadratum ipſius F M duplum quadrati ipſius F H (eo quod angulus F H M rectus eſt, & F H, & H M ſunt radij æquales eiuſdem circuli B F): Igitur quadratum ipſius F M quadruplum erit quadrati ipſius H G; &
i cor. 3. pr. 17. l. 4. propterea i recta F M dupla erit ipſius H G. Vnde F M æqualis erit H O. Eadem ratione ſingulæ rectæ F N, N B, B M, C R, R
k pr. 27. l. 1 E, E S, S C æquales erunt eidem H O, ſuntque k ſingulæ B C, M R, F E, & N S parallelę, & ęquales eidem H O, propterea
l pr. 10. l. 2. quod coniungunt terminos radiorum parallelorum, & l inter ſe ęqualium, cùm ęqualiter diſtent à centro circuli maximi ſphęrę. Igitur duodecim dictę rectę ęquales ſunt inter ſe; & quia axis A D perpendicularis eſt ad rectas M N, B F, R S, &
m pr. 2. l. 6. C E, & ideo m ad plana circulorum B F M, & C E R, & rectę

B C,

BC, MR, FE, NS parallelę ſunt axi AD: propterea eędem rectę n perpendiculares erunt ad ipſas BM, MF, FN &c. atq; ad CR, RE, &c. in planis eorundem circulorum exiſtentes. Similiter o anguli NBM, BMF, CRE, &c. recti erunt, cùm in ſemcirculis conſtituti ſint. Quapropter p figurę ſex BR, RF, FS, SB, BF, & CE erunt quadrata, quę comprehendunt figuram intra ſphęram deſcriptam. quod fuit propoſitum. Vocetur talis figura Cubus. n pr. 4. l. 6. o pr. 10. l. 3. p pr. 34. l. 1.

COROLLARIVM I.

Patet ſphęrę diametrum poteſtate triplam eſſe lateris cubi. Nam ſphęrę radius AG factus eſt triplus poteſtate ipſius HG, eſtque AD dupla ipſius AG, atque latus cubi BC oſtenſum eſt duplum ipſius HG. Ergo q quadratũ AD triplum eſt quadrati lateris cubi BC. q cor. 1. pr. 19 l. 5. & pr. 11. l. 3.

COROLLARIVM II.

Radius circuli, continentis quadratum cubi, ſeu diſtantia perpendicularis à centro ſphęrę ad latus cubi poteſtate ſubſeſquialtera eſt radij ſphęrę.

Oſtenſa enim fuit FH ſubſeſquialtera poteſtate ipſius AG; eſtq; r GV, perpendiculariter ducta ſupra latus cubi FE, ęqualis FH illi oppoſitę in parallelogrammo HV. r pr. 34. l. 1.

COROLLARIVM III.

Perpendicularis à centro ſphęrę ad planum quadrati cubi ſemiſſis eſt lateris cubi; & eſt poteſtate tertia pars radij ſphęrę. Facta enim fuit GH tertia pars poteſtate ipſius AG, & oſtenſa fuit GH ſemiſſis ipſius BC lateris cubi. Vocetur autem talis perpendicularis Radius cubi.

COROLLARIVM IV.

Altitudo cubi ęqualis eſt lateri ipſius cubi; & propterea altitudo erit tertia pars poteſtate diametri ſphęrę.

Oſtenſa enim fuit HO ęqualis lateri cubi BC.

CO-

COROLLARIVM V.

Tandem patet cubum diſtribuì in ſex pyramides quadran-
ſpr. 13. l. 6. gulares vertices in centro ſphęrę habentes, quę ſ ſunt ęqua-
les, cùm baſes quadratas habeant ęquales, atque altitudines
perpendiculares à centro ſphęrę, etiam ęquales inter ſe.

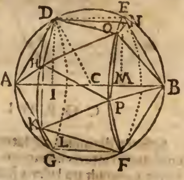
Eucl. 16. lib. XIII.

PROPOS. IV. PROBL. IV.

In data ſphęra ſolidam figuram ſub viginti triangulis ęquilateris, & inter ſe ęqualibus contentam inſcribere. Vocetur autem tale ſolidum Icoſaedrum.

In ſphęra, cuius axis A B, centrum C, circulus maximus A
a pr. 28. l. 1 & pr. 10. l. 4 D B F inſcribi debet figura ſolida imperata. Secetur a C I, quę
b cor. 3. pr. media proportionalis ſit inter radium ſphęrę A C, eiuſq; par-
17 l. 4. tem quintam: erit b eius quadratum quinta pars quadrati ra-
c pr. 3. l. 1. dij ſphęrę A C, & c ſecetur M C ęqualis ipſi C I, & per I, & M
d pr. 14. l. 6 ducantur duo plana, erecta ad axim A B, atque ad circulum
e ax & pr. A D B (vt in prima propoſitione huius factum eſt) quę d ef-
10 l. 2. ficient duos circulos D G, & E F e inter ſe ęquales, & f paralle-
f pr. 9 l 6. los; eo quod iuncti radij D I, & E M ęqualiter diſtant à cen-
g pr. 3. l. 5. tro circuli A D B; Et g in eiſdem circulis inſcribantur duo
pentagona regularia D H K L, & F P O N, ita vt anguli D, & F
in puncta oppoſita ſphæræ D, & F incidant; & à polis ſphæræ
A, & B ad ſingulos angulos pentagonorum rectæ iungantur
A D, A H, A K, A L, &c. B F, B P, B O, B N, &c. Ducantur-
que rectæ N D, D O, O H, H P, P K, K F, F L, &c. Oſtenden-
dum eſt viginti triangula, comprehendentia inſcriptam fi-
h cor pr. 19 guram, æqualia, & æquilatera eſſe. Diuidatur h arcus O N
l. 2. bifariam in E; iunganturque rectæ N E, D E, & D C. Quo-
i pr. 18 l 5 niam quadratum radii A C, ſiue D C quintuplum eſt qua-
drati ipſius I C: Suntque i duo quadrata D I, & I C æqualia
quadrato radii D C (propterea quod angulus D I C rectus
k pr. 2. l. 6. eſt, cùm k axis A B perpendicularis ſit ad circulum D G.) Igi-
tur duo quadrata D I, & I C quintupla ſunt quadrati ipſius I
C; & propterea quadratum ipſius D I quadruplum erit qua-
l cor. 1. pr. drati ipſius I C. Vnde l recta linea D I dupla erit ipſius I C; eſt
19. l. 5. autem M I dupla eiuſdem I C. Igitur rectæ D I, & M I æqua-
m. pr. 10. l. 2 les ſunt inter ſe; eſtque m M E æqualis eidem D I (cùm æqua-
liter

liter diſtent à centro) Ergo n figura D I M E cuius angulus I n pr. 34. l. 1.
rectus quadratum eſt, & propterea recta D E æqualis erit D I, radio circuli D H G, ſiue radio M E; Cumque arcus N E ſemiſſis ſit arcus N O ſubtenſi à latere pentagoni: o erit recta o pr. 3. l. 5.
N E latus decagoni eiuſdem circuli E O F, cuius p D E latus p ſch. pr. 3. l. 5.
eſt inſcripti hexagoni, cùm ſit æqualis radio circuli M E: Eſt verò axis AB perpendicularis ad circulum E O F, atque D E eſt parallela ipſi A B; Ergo q D E perpendicularis quoque erit ad planum circuli E O F; & propterea r ad rectam E N in eo exiſtẽtem: Vnde in triangulo D N E erit angulus D E N rectus, & propterea ſ quadratum ipſius D N æquale erit quadrato lateris decagoni N E vnà cum quadrato lateris hexagoni D E eiuſdem circuli N O F: & ideo t N D æqualis erit lateri pentagoni N O eiuſdem circuli E O F. Eadem ratione ſingulæ rectæ D O, H O, H P, K P, K F, L F, &c. æquales erunt ſingulis lateribus pentagoni N O, O P, P F &c. ideoque u quinque triãgula N D O, O H P, P K F, &c. quorum baſes ſunt quinque latera pentagoni N O P F inter ſe æqualia, & æquilatera erũt. Eadem ratione oſtendentur quinque triangula D O H, H P K, K F L, &c. quorum baſes ſunt quinque latera pentagoni D H K L æquilatera, & inter ſe, & prioribus æqualia. Tandem quoniam A C quintuplum poteſt ipſius I C, & eſt M I dupla ipſius I C; Ergo x M A in I ſecatur extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius erit M I; hoc autem æquale eſt circuli radio I D, ſcilicet y lateri hexagoni circuli D G, erit z minus ſegmentum A I æquale lateri decagoni eiuſdem circuli: ideoque a quadratum ex D A, quod æquale eſt duobus quadratis ex D I, & I A (cùm axis A B perpendicularis ſit oſtenſus ad eius radium I D) erit b æquale quadrato lateris pentagoni; & c propterea recta D A æqualis erit lateri pentagoni D H circulo D G inſcripti, & ſic reliquæ omnes A H, A K, A L, &c. pariterque B N, B O, B P, B F, &c. erunt inter ſe æquales, & æquales ipſis lateribus D H, H K, K L, N O, O P, &c. Igitur decem d triangula vertices in A, & B habentia



q pr. 4. l. 6.
r pr. 1. l. 6.
ſ pr. 12. l. 5.
t pr. 32. l. 5.
u pr. 1. & 7. l. 1.
x pr. 26. l. 5.
y ſch. pr. 3. l. 5.
z ſch. pr. 8. l. 5.
a pr. 18. l. 5.
b pr. 32. l. 5.
c cor. 2. pr. 17. l. 4.
d pr. 1. & * l. 1.



(tot nimirum, quot ſunt latera ambotum pentagonorum N O P F, & D H K L) æquilatera ſunt, & inter ſe, & prioribus æqualia. Quapropter viginti triãgula comprehendẽtia ſolidam figuram intra ſphæram deſcriptam æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia. vt propoſitum fuerat. Vocetur huiuſmodi figura ſolida Icoſaedrum.

COROLLARIVM I.

Sphæræ diameter ad latus icoſaedri eſt, vt latus hexagoni cum duplo lateris decagoni ad latus pentagoni; & potentia [*e pr.18 l.4.*] eſt, vt 5 *e* quadrata lateris hexagoni ad quadratum lateris pentagoni, vel vt quadratum lateris hexagoni ad quintam partem quadrati lateris pentagoni. Nam in circulo D G eſt D H [*f ſch pr.3. l.5.*] latus pentagoni, & *f* radius D I, ſeu ei æqualis I M eſt latus hexagoni; eſtque I M maius ſegmentum rectæ M A diuiſæ extrema, & media ratione: [*g ſch pr.8. l.5.*] Ergo *g* minus eius ſegmentum A I, & ei æqualis M B ſunt latera decagoni eiuſdem circuli D G; & propterea diameter ſphęrę A B ad latus icoſaedri D H erit, vt ſumma lateris hexagoni I M, & dupli lateris decagoni A I ad latus pentagoni D H ab eodem circulo comprehenſorum. Rurſus quia A B componitur ex A M diuiſa in I extrema, & media ratione. & ex minore eius ſegmento M B: [*h pr.25 l.5.*] Ergo *h* quadratum ex A B quintuplum eſt quadrati maioris ſegmenti I [*i ſch pr.3. l.5.*] M, ſeu *i* D I lateris hexagoni circuli D G: Ergo diameter ſphęræ potẽtia ad latus icoſaedri D H eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni D I ad quadratum rectæ D H, quę eſt latus pentagoni eiuſdem circuli, ſeu erit, vt quadratum lateris hexagoni ad quintam partem quadrati lateris pentagoni.

COROLLARIVM II.

Patet icoſaedrum diuidi in viginti pyramides triangulares [*m pr.23 l.6*] verticem in centro ſphęrę habentes, ęquales *m* inter ſe, cùm [*n pr.10. l.2.*] baſes, ſcilicet triangula icoſaedri ęqualia ſint inter ſe, *n* & per-

perpendiculares à centro ſphęrę ad plana triangulorum icoſaedri (quę vocentur Radij icoſaedri) ęquales ſint; eo quod radij [o] circulorum circumſcribentium dicta triangula ęquilatera & ęqualia, ęquales ſunt inter ſe; & propterea in maximis circulis ſphęrę exiſtẽtes ęqualiter diſtãt à centro ſphęrę.

o ex pr. 15. l. 5. & cor. 1 pr. 1; l. 4 & pr. 4 l. 2

PROPOS. V. PROBL. V.

Eucl. 17. XIII.

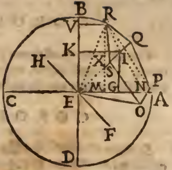
In data ſphęra figuram ſolidam ſub duodecim pentagonis regularibus inter ſe ęqualibus contentam, inſcribere. Vocetur autem talis figura Dodecaedrum.

Sit ſphęra, cuius circulus maximus A B C D, cẽtrum E. Deſcribi debet intra eam imperata figura. Ducantur [a] tres diametri A C, B D, F H, quę ſint ad inuicem perpendiculares; [b] & ſecetur E G ęqualis radio cubi, ſeu medietati lateris cubi inſcripti in eadem ſphęra: & [c] in plano A B C fiat quadratum E G I K, quod [d] erit tertia pars quadrati ex radio A E; & [e] ſecetur E G in M extrema, & media ratione, cuius maius ſegmẽtum ſit E M, ſeceturque [f] G N ęqualis E M, iungaturque recta N I, & [g] à puncto M ducatur M R parallela ipſi G I, vel E B, ſecans [h] N I productam in R, & k I in X; atque à puncto R ducatur R V parallela ipſi K I, vel E A, ſecans E B in V, & [i] à punctis N I ad planum B E A eleuentur perpendiculares S I, Q, O N P (quę [k] inter ſe parallelę erunt, & [l] in eodem plano, in quo recta R N iacet) ſeceturque [m] N O, P O, ſingulę ęquales ipſi G N, vel E M; & S I, Q I fiant ſingulę ęquales ipſi E G, coniunganturque rectę R S, S O, P Q, Q R, R E, R O, R P, S E, O E, P E, I E: Patet figuram R S O P Q in vno plano parallelarum S Q, O P exiſtere. Et quoniam G N ęqualis facta eſt E M maiori ſegmento rectę E G, diuiſę in M extrema, & media ratione: Igitur [n] E N, pariterque N M in G in eadem media, & extrema ratione ſecantur, eritque M N ęqualis E G. Cumque [o] propter parallelas G I, M R ſit R N ad I N, vt M N ad N G vel [p] vt N E ad E G; atque propter parallelas E A, K I, V R ſit V E ad k E, atque R M ad X M, vt R N ad I N; Igitur [q] tam N R in I,



a pr. 10. l. 1. & pr. 6 l. 6.
b pr. 3 l. 1. & cor. 3. pr. 3. huius.
c pr 34. l. 1.
d ex pr 3. huius.
e pr. 29 l. 4.
f pr. 3. l. 1.
g cor. pr. 16. l. 1.
h cor pr. 29. l. 1.
i pr 6. l. 6.
k pr. 5 l. 6.
l cor pr 4. l. 6.
m pr. 3 l. 1.
n pr 25 & cor pr. 20. l. 4.
o ſch. pr. 2. l. 1.
p pr. 26 l. 4
q pr. 26 l. 5

quàm M R in X, quàm E V in K ſecantur extrema, & media
r pr. 26 l. 1. ratione; ſuntque r maiora ſegmenta X M, K E æqualia, cùm
ſ pr 34 l. 1. ſint latera oppoſita parallelogrammi K M, & ſ E G, k E latera
t pr 26 l 4. quadrati K G æqualia ſunt; Ergo t minora ſegmenta V k, R X
& cor 1 pr. æqualia ſunt ipſi G N, vel N P, vel E M vel u V R ei oppoſitę
16 l 3. in parallelogrammo V M. Et quia x P N perpendicularis ad
u pr 26 l. 1. planum A E B eſt quoque perpendicularis ad N R exiſtentem
x pr 2. l 6. in eodem plano; Ergo z in triangulo R N P quadratum ex R
z pr. 18 l. 5. P æquale erit quadratis ex R N, & ex P N, ſeu y ex N G, vel
y cor. 2. pr. ex R X ei æquali, & ſimiliter propter angulum rectum
17. l. 4. R M N quadratum ex R N æquale eſt quadratis ex R M, & ex
M N, vel ex ei æquali M X; Ergo quadratum ex R P æquale
a pr. 24 l. 5 eſt tribus quadratis ex M R, ex R X, & ex X M, & a ſunt duo
quadrata ex tota M R, & R X minori ſegmento, rectę diuiſæ
extrema, & media ratione, tripla quadrati ex maiori eius ſeg-
mento M X: Igitur quadratum ex R P quadruplum eſt qua-
drati ex M X, ſeu quadrati K G: eſt verò b quadratum ex S Q
b cor. 1 pr. quadruplum quadrati K G, eo quod S Q dupla eſt ipſius S I,
19. l. 5. ſeu I G: Ergo quadrata ex R P, & ex S Q æqualia ſunt, ideoque
rectę c R P, S Q æquales erunt. Eadem ratione R O æqualis erit
c cor. 2. pr. eidem S Q, & ideo ipſi R P: Quare in pentagono R S P tres re-
17 l. 4. ctę O R, S Q, R P ſubtendentes angulos eius æquales ſunt in-
ter ſe, d intermedia S Q parallela baſi O P ſecat ſubtenſas R P,
d pr. 2. & R O extrema & media ratione, veluti ſecat ipſam R N in I,
26 l. 4. & maiora earum ſegmenta æqualia ſunt baſi O P, e eo quod e S
e pr. 11. l. 3. Q dupla ipſius S I, vel M N ad O P duplam ipſius N O, vel N
pr 26. l. 4. G eſt vt M N ad eius maius ſegmentum N G rectæ extrema, &
& pr 3. l. 3. media ratione diuiſę & ſunt R O, R P æquales ipſi S Q: & ex ea
f cor. pr. 12. relinquũt vtrinq; portiones æquales; quia I S, I Q æquales ſũt, f &
l. 4. & cor 1 eorum portiones inter I, & ſubtenſas R O, R P æquales ſunt, ſi-
pr. 16. l. 3. cuti æquales ſunt portiones O N, N P rectę parallelę ipſi S Q:
g ſch. pr. 7. Igitur g pentagonum R S O P Q regulare eſt. Poſtea quia in
l. 5. triangulo E V R angulus V rectus eſt, quadratum h ex E R æ-
h pr 18. l. 5 quale erit duobus quadratis ex E V, & ex V R, ſeu ex k V, quę
& cor. 2 pr. oſtenſa fuit ei æqualis; ſed i duo quadrata ex E V, & ex eius
17. l. 4. minori ſegmento V k tripla ſunt quadrati maioris ſegmenti K
i pr. 24. l. 5. E rectę diuiſę extrema, & media ratione; Ergo quadratum ex
E R triplum eſt quadrati k G. Similiter quia in triangulo E
N O angulus N rectus eſt, quadratum ex E O æquale erit duobus
quadratis ex E N, & ex N O, ſeu ex ei æquali G N; ſuntque duo
quadrata ex E N, & ex minori ſegmento N G rectę diuiſę
extre-



extrema, & media ratione tripla quadrati ex E G maiori ſegmento; Ergo quadratum ex E O triplum eſt quadrati k G: non ſecus oſtendetur quadratum ex E P triplum quadrati K G: fuit autem quadratum radij ſphęrę E A triplũ eiuſdem quadrati K G: Igitur quadrata rectarum E R, E O, E P, & E A ęqualia ſunt, & ideo k rectę E R, E O, E P, ęquales erũt radio ſphęrę E A; & propterea anguli R, O, P in ſuperficie ſphęrę exiſtẽt. Deinde quia S Q perpendicularis eſt ad planum B E A, l erit quoque erecta ad contiguam E I exiſtentem in eodem plano; & m eſt E I poteſtate dupla ipſius E G, & eiuſdem G E tripla eſt poteſtate ſemidiameter ſphęrę E A: Ergo E I poteſtate ſubſeſquialtera eſt radij ſphærę, & ideo n E I erit diſtantia lateris cubi à centro ſphæræ; & eſt S Q bifariam ſecta in I, & perpendicularis ad E I, atque eſt dupla ſemilateris cubi E G: Ergo o S Q eſt latus cubi inſcripti in ſphæra A B C H, & ideo anguli S, Q pentagoni R S P in ſphæræ ſuperficie exiſtent. Si ergo compleatur inſcriptio cubi in ſphæra, cuius vnum latus eſt S Q; & ab eodem puncto N radij E A ſuper communi baſi O P conſtruatur aliud pentagonum regulare, & p priori æquale, verticem habens verſus D, habebit omnes angulos in ſuperficie ſphæræ, & recta linea ſubtendens angulum pentagoni parallela baſi O P, pari modo applicata erit ſuper latere inſcripti cubi parallelo ipſi S Q.

k cor. 2. pr. 17 l. 4

l pr. 2. l.

m pr. 18. l. 5

n cor. 2. pr. 3. huius.

o ex pr. 3. huius.

p cor. pr. 17. l. 4.

Et ſimiliter in extremitatibus B, C, D, F, & H reliquorum quinq; radiorũ conſtrui poſſunt bina pẽtagona, regularia & æqualia habentia angulos in ſuperficie ſphæræ, quorum rectæ ſubtendentes angulos pentagonorũ æquidiſtantes baſibus applicatæ erunt reliquis decem lateribus inſcripti cubi; & propterea omnia dicta duodecim pentagona ſe ſe mutuò tãgent, tum in eorum lateribus æquidiſtantibus lateribus cubi, quarũ vnum eſt O P, tum in angulis inſcripti cubi, & ideo componunt ſolidam figuram. Vnde q inſcripta erit in ſphæra figura ſolida comprehenſa à duodecim pentagonis regularibus & ęqualibus. Quod erat faciendum. Vocetur talis figura Dodecaedrum.

q def. 2. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

Conſtat ex poſtrema parte huius propoſitionis rectam lineam ſubtendentem angulum pentagoni dodecaedri ęqualem eſſe lateri cubi in eadem ſphęra deſcripti.

COROLLARIVM II.

Sphęrę diameter ad latus dodecaedri eſt vt latus trianguli ęquilateri ad latus decagoni, & potentia eſt, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad quadratũ lateris decagoni, vel vt quadratum lateris hexagoni ad tertiam partem quadrati lateris decagoni.

r cor.1.pr. Nam r quadratum diametri ſphęrę A C triplum eſt qua-
3. huius. drati S Q lateris cubi, ſicuti, ſ quadratum lateris trianguli tri-
ſ pr 30 l.5. plum eſt quadrati lateris hexagoni: Ergo t vt A C ad SQ ita eſt
t pr.18.l.4. latus trianguli regularis ad latus hexagoni; & vt S Q ad O P,
ſcilicet vt maius ad ſegmentum minus rectę extrema, & me-
u ſch.pr.8. l.5. dia ratione diuiſę (vt in hac propoſitione oſtenſum eſt), u ita
x pr.19.l.3 eſt latus hexagoni ad latus decagoni: ergo x ex compoſitione
ordinata diameter ſphęrę A C ad OP latus dodecaedri erit, vt
y pr.18 l 4. latus trianguli regularis ad latus decagoni. Et y potentia eadẽ
z pr.30.l.5. erit, quę quadrati lateris trianguli, ſeu z tripli quadrati lateris
hexagoni ad quadratum lateris decagoni, vel vt quadratum lateris hexagoni ad tertiam partẽ quadrati lateris decagoni.

COROLLARIVM III.

Conſtat etiam dodecaedrum diſtribui in duodecim pyramides pentagonas, vertices in centro ſphęrę habentes, ęqua-
a pr.15.l.6. les a inter ſe; cùm baſes, ſcilicet pentagona dodecaedri ęqualia ſint inter ſe, & perpendiculares à centro ſphæræ ad plana
b pr.10.l.5. pẽtagonalia (quę Radij dodecaedri vocẽtur) ęquales sũt, b eo
& pr. 19. quod radij circulorum circumſcribentium dicta ſimilia, & æ-
& cor.1.pr. 10.l.3. qualia pentagona ęquales ſunt inter ſe, & propterea c ęquali-
c pr 10.l.2. ter diſtant à centro circuli maximi ſphæræ.

S C H O L I V M.

Quod verò pręter has quinque regulares ſolidas figuras, effici non poſſit

ſit alia, quę à planis figuris æqualibus æquilateris, & æquiangulis contineatur, ſic oſtendetur.

Ad conſtitutionem anguli ſolidi requiruntur duæ conditiones, d prima, vt anguli plani, conſtituentes ſolidum angulum, non ſint pauciores, quàm tres: ſecunda, e vt omnes, ſimul ſumpti, minores ſint quatuor rectis. Modò quia f angulus trianguli ęquilateri tertia pars eſt duorum rectorum, ideſt ſexta pars quatuor rectorum: erunt ſex anguli trianguli æquilateri ſex partes ſextę quatuor angulorum rectorum; ideoque æquales erunt quatuor rectis: Et propterea g plura, quàm quinque triangula ęquilatera ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia non conſtituent angulum ſolidum, ſed figuræ planæ regulares, quæ ſpatium ſolidum comprehendere debent, neceſſe eſt, vt angulos ſolidos conſtituant. Igitur pręter pyramidem, Octaedrum, & icoſaedrum aliam figuram ſolidam triangula ipſa ęquilatera conſtituere non poſſunt.

d def 1. l. 6.
e pr. 13. l. 6.
f cor 5. pr. 18. l. 1.
g pr. 13. l. 6.

Secundò quia h angulus quadrati quarta pars eſt quatuor rectorum, erunt quatuor anguli quadrati ęquales quatuor rectis; ideoque i plura, quàm tria quadrata ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia angulum ſolidum non efficient. Et propterea præter cubum nullam aliam figuram ſolidam quadrata ipſa conſtituere poſſunt.

h pr. 34. l. 1.
i pr. 13. l. 6.

Tertiò quia k angulus pentagoni quinta pars eſt ſex angulorũ rectorum, ideſt tres partes decimæ quatuor rectorum: erunt quatuor anguli pentagoni, ſimul ſumpti, ęquales duodecim partibus decimis quatuor rectorum, ſcilicet erunt maiores, quàm quatuor recti: Et ideo l plura, quàm tria pentagona ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia non conſtituent angulum ſolidum. Igitur præter dodecaedrum aliam figuram ſolidam pentagona non conſtituent.

k ex ſch. pr. 18 l. 1.
l pr. 13. l. 6.

Quartò quia m angulus hexagoni ſexta pars eſt octo angulorum rectorum, ideſt tertia pars quatuor rectorum: erunt tres anguli hexagoni ſimul ſumpti ęquales quatuor angulis rectis; & propterea n tres anguli hexagonales ad vnum punctum conuenientes non conſtituent angulum ſolidum; ideoque hexagona, & ſic reliquę omnes figurę planæ regulares, excedentes numerum ſenarium angulorum, ineptę erunt ad anguli ſolidi conſtitutionem, cùm pauciores, quàm tres anguli plani ſolidum angulum non efficiant; & propterea quælibet figuræ planę regulares plurium, quàm quinque angulorum corpus aliquod regulare componere nequeunt. Quapropter pręter pyramidem, Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, & dodecaedrum nulla alia figura conſtrui poteſt ex coaptatione planarum figurarum æqualium, & regularium. Quod erat oſtendendum.

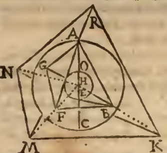
m ex ſch. pr. 18. l. 1.
n pr. 13. l. 6.

PRO-

PROPOS. VI. PROBL. VI.

Circa datam ſphęram quodlibet regulare corpus circunſcribere, & in quolibet ipſorum ſphęram inſcribere.

In ſphęra, cuius centrum H, & axis A C circunſcribi debet quodlibet ex dictis corporibus regularibus. *a* Inſcribatur in ſphęra corpus illius ſpeciei, quod circunſcribi debet; ſitque illud A B F G, & perpendicularis à centro ſphęrę ad planum figure B F G, ſiue radius inſcripti ſolidi ſit H E. & per punctum C extremum diametri A C *b* ducatur planum k M N parallelum plano B F G: eritque *c* radius H C perpendicularis quoque ad planum k M N, & ideo *d* omnes rectę tangent circulos maximos per diametrum A C extenſos; & propterea planum k M N tanget ſphęram. Rurſus in pyramide H B F G producta *e* erit figura diſſecta K M N ſimilis baſi B F G, & omnia latera H N, H M, H K ęqualia erunt, cùm eandem rationem habeant ad pyramidis ęqualia latera B H, F H, G H eo quod ſunt radij ſphęrę. Eadem ratione ſi ducantur plana contingentia ſphęram parallela baſibus reliquarum pyramidum verticē in centro ſphęrę H habentium, in quę ſolida figura A B F G reſoluitur, erūt figurę planę circunſcriptę ſimiles figuris inſcriptis, & rectę omnes à centro ſphęrę H per angulos inſcriptę figuræ vſque ad externum planum ductę erunt ęquales inter ſe, & prioribus H K, H M, H N, eo quod *f* eandem rationem habent ad latera ęqualia pyramidum in centro ſphęræ verticem habentium, ſeu ad radios ſphæræ, quam habent radij ſphæræ, ſeu figuræ circunſcriptæ ad *g* æquales radios figuræ inſcriptæ. Quare plana omnia ſphæram tangentia in eiſdem punctis K, M, N, R, conuenient; & ideo ſolidam figuram efficient ſimilem ipſi A B F G. Quod erat faciendum.



a pr 1. 2. 3. 4. & 5. huius.
b cor. pr. 10 l. 6.
c cor. 1. pr. 9 l. 5.
d pr. 2. l. 6. & cor. 1. pr. 21. l. 2.
e pr. 16. l. 6.
f pr 7. & 4. l. 3.
g ex cor. poſt. pr. 1. 2. 3. 4. & 5. huius.

Secundò in dato corpore regulari B A F G inſcribi debet ſphæra. Radio H E deſcribatur ſphæra E O. Dico hanc eſſe inſcriptam ſolido; quia radii omnes cuiuslibet ſolidæ figuræ regularis ſunt æquales inter ſe, vt in poſtremis corollariis

quinque

quinque præcedentium propoſitionum dictum eſt. Ergo ſphæra radio H E deſcripta neceſſariò *b* tangit reliqua plana figuræ A B F G; & ideo *i* ſphæra E O inſcripta erit corpori regulari A B F G. vt fuit propoſitum.

h ex prima parte huius pr.
i def. 3. huius.

PROPOS. VII. THEOR. I.

Latus tetraedri poteſtate ad latus octaedri eſt, vt 4 ad 3, ad latus cubi, vt 2 ad 1, ad latus icoſaedri, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, ad latus dodecaedri, vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni, ſed lõgitudine eſt, vt latus quadrati ad latus decagoni: latus verò octaedri ad latus cubi poteſtate eſt, vt 3 ad 2, ad latus icoſaedri, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni, & ad latus dodecaedri, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris decagoni: ſed latus cubi poteſtate ad latus icoſaedri eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, & ad latus dodecaedri, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris decagoni; atque latus icoſaedri ad latus dodecaedri poteſtate eſt, vt 3 quadrata lateris pentagoni ad 5 quadrata lateris decagoni.

Primò quoniam *a* proportio lateris tetraedri ad axim ſphæræ potentia eſt, vt 2 ad 3, ſeu vt 4 ad 6, & *b* axis ſphæræ ad latus octaedri potentia eſt duplus, ſeu vt 6 ad 3. Ergo *c* ex compoſitione ordinata latus tetraedri ad latus octaedri poteſtate eſt, vt 4 ad 3.

a cor. 1. pr. 1. huius, & pr. 11 l. 3.
b cor. 1. pr. 2. huius.
c pr 19. l. 3

Secundò eidem *d* rationi 2 ad 3 lateris tetraedri ad axim ſphæræ poteſtate addita *e* proportione 3 ad 1 ipſius axis poteſtate ad latus cubi, componetur proportio 2 ad 1 lateris tetraedri ad latus cubi poteſtate.

d cor. 1 pr. 1 huius.
e cor. 1. pr. 3 huius.

Tertiò quoniam *f* latus tetraedri ad axim ſphæræ poteſtate eſt, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 15 quadrata lateris hexagoni; eſt verò *g* axis ſphæræ poteſtate ad latus icoſaedri, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratũ lateris pentagoni; ſiue vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni: Ergo ex compoſitione ordinata, eſt latus tetraedri ad latus icoſaedri poteſtate, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, ſeu vt 1 quadratũ lateris hexagoni ad 3 decimas partes quadrati lateris pẽtagoni.

f cor. 1. pr. 1 huius & pr. 11 l. 3
g cor. 3 pr. 4 huius.

h cor 1 pr. 1. huius, & pr. 1. l. 5. i cor 2. pr. 5. huius. k cor. 1. pr. 1 huius. l cor 2. pr. 5 huius.

Quartò quia latus tetraedri ad axim ſphęrę eſt, vt latus quadrati ad latus trianguli (eo quod *h* ambę proportiones poteſtate ſubſeſquialterę ſunt), ſed *i* axis ſphęrę ad latus dodecaedri eſt, vt latus trianguli ad latus decagoni. Ergo latus tetraedri ad latus dodecaedri eſt: vt latus quadrati ad latus decagoni. Rurſus latus tetraedri ad axim ſphęrę poteſtate eſt, *k* vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris hexagoni; ſed *l* axis ſphęrę ad latus dodecaedri poteſtate eſt, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratũ lateris decagoni: Ergo latus tetraedri ad alterum latus dodecaedri poteſtate eſt, vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni.

m cor. 1. pr. 2. huius. n cor 1. pr. 3. huius.

Quintò quoniam *m* latus octaedri ſubduplũ eſt axis ſphęrę poteſtate, ſeu vt 3 ad 6. & *n* axis ſphęrę triplus poteſtate lateris cubi, ſeu vt 6 ad 2. Ergo latus octaedri ad latus cubi poteſtate eſt, vt 3 ad 2.

o cor. 1. pr. 2 huius. p cor. 1 pr. 4. huius.

Sextò quia *o* latus octaedri eſt poteſtate ad axim ſphęrę, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 10 quadrata lateris hexagoni; & *p* axis ſphæræ poteſtate ad latus icoſaedri eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, ſeu vt 10 quadrata lateris hexagoni ad duo quadrata lateris pentagoni. Ergo latus octaedri ad latus icoſaedri poteſtate eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni, ſeu vt quadratum lateris hexagoni ad 2 quintas partes quadrati lateris pentagoni.

q cor. 1 pr. 2 huius. r cor 2. pr. 3. huius.

Septimò quoniam latus octaedri *q* poteſtate ad axim ſphæræ eſt, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 6 quadrata lateris hexagoni; eſtque *r* axis ſphæræ ad latus dodecaedri, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni, ſeu vt 6 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris decagoni. Ergo latus octaedri ad latus dodecaedri poteſtate erit, vt 3. quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris decagoni, ſeu vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 2 partes tertias quadrati lateris decagoni.

ſ ebr. 1. pr 3 huius. t cor 1. pr. 4 huius.

Octauò quoniam *ſ* latus cubi ad axim ſphæræ poteſtate ſubtriplum eſt, ſcilicet vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 15 quadrata lateris hexagoni; eſt verò *t* axis ſphæræ ad latus icoſaedri poteſtate, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, ſeu, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni. Ergo latus cubi ad latus icoſaedri poteſtate eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, ſiue vt 1 quadratum lateris hexagoni

ad 3 partes quintas quadrati lateris pentagoni.

Nonò quoniam u latus cubi ad axim ſphæræ poteſtate eſt, vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris hexagoni; eſtque axis x ſphęrę ad latus dodecaedri poteſtate, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad quadratum lateris decagoni. Ergo latus cubi ad latus dodecaedri poteſtate eſt, vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni.

[u cor. 1. pr. 4 huius. x cor. 2 pr. 3. huius.]

Decimò quia y latus icoſaedri ad axim ſphęræ eſt, vt quadratum lateris pentagoni ad 5 quadrata lateris hexagoni, ſeu vt 3 quadrata lateris pentagoni ad 15 quadrata lateris hexagoni; eſtque z axis ſphęrę ad latus dodecaedri poteſtate, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni, ſeu vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 5 quadrata lateris decagoni. Ergo latus icoſaedri ad latus dodecaedri poteſtate erit, vt 3 quadrata lateris pentagoni ad 5 quadrata lateris decagoni, ſeu vt 1 quadratum lateris pentagoni ad 5 partes tertias quadrati lateris decagoni.

[y cor. 1. pr. 4 huius. z cor. 2. pr. 3. huius.]

COROLLARIVM.

Facilè deducitur ex hac propoſitione, quam proportionem habeant triangula tetraedri, octaedri, & icoſaedri, & horum ſolidorum ſuperficies inter ſe. Nam a hæc triangula æquilatera & æquiangula, ſunt ſimilia inter ſe; ideoque b eandem proportionem habent inter ſe, quam eorũdem laterum quadrata habent; Ergo c triangulum tetraedri ad triangulum octaedri eſt, vt 4 ad 3, ad triangulum d icoſaedri, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni; e & triangulum octaedri ad triangulum icoſaedri eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni. Poſtea quia triangulum tetrahedri quater ſumptum, & triangulum octaedri octies, atque triangulum icoſaedri vigeſies, efficiunt ſuperficies dictorum ſolidorum: Ergo ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem octaedri eſt, vt 16 ad 24, ſeu vt 2 ad 3, & ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem icoſaedri eſt, vt 40 ad 60, ſeu f vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni. Similiter ſuperficies octaedri ad ſuperficiem icoſaedri erit, vt 40, ad 40, ſeu vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni.

[a ſch. pr. 1. l. 5. b cor 3. pr. 17 l. 4 c par. 1 huius prop. d par. 3. huius prop. e par. 6. huius prop. f pr. 11. l. 3]

PROPOS. VIII. THEOR. II.

Circulus cõtinens triangulum tetraedri ad circulum continentẽ triangulum octaedri, vel quadratum cubi eandem rationem habet ſeſquitertiam, atque ad circulum continentem triangulum icoſaederi, vel pentagonum dodecaedri, eſt vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni; & circulus continens triangulum octaedri, vel quadratum cubi ad circulum continentem triangulum icoſaedri, vel pẽtagonum dodecaedri eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni.

a cor 1 pr 4 Quoniam *a* axis ſphęrę poteſtate ad latus icoſaedri eſt, vt 15
huius, & pr. quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni; eſt
11. l. 3 verò *b* latus trianguli icoſaedri ad radium circuli comprehen-
b pr. 30 l. 5 dentem idem triangulum poteſtate, vt 3 ad 1, ſeu vt 3 quadra-
c pr 19. l. 3 ta lateris pentagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni: *c* Ergo
ex compoſitione ordinata axis ſphęrę ad radium circuli com-
prehendentem triangulum icoſaedri poteſtate erit, vt 15 qua-
d cor 1 pr. drata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni.
3 huius Poſtea *d* quia axis ſphęrę triplus potentia ad latus cubi, erit
e cor. 2. pr. vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris hexa-
5 huius. goni; Et quia *e* axis ſphęrę ad latus dodecaedri potentia eſt, vt
3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni;
f cor. pr. 22. ergo axis *f* ſphęrę ad duo latera cubi, & dodecaedri poteſtate
l. 3. erit, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris he-
g pr 32. l. 5 xagoni cum 1 quadrato lateris decagoni; Sunt *g* verò 2 qua-
drata ex latere hexagoni, & ex latere decagoni, ſimul ſumpta,
h pr. 3. & 7 ęqualia quadrato lateris pentagoni: Ergo axis *h* ſphęrę ad la-
l. 3. tera cubi, & dodecaedri poteſtate erit, vt 3 quadrata lateris
hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, ſeu vt 15 quadra-
i pr. 33. l. 5 ta lateris hexagoni ad 5 quadrata lateris pentagoni. Et quo-
niam *i* ſunt duę potentię lateris pentagoni dodecaedri, & re-
k cor. 1. pr. ctę lineę ſubtendentis angulum dicti pentagoni, ſcilicet *k* la-
5 huius. teris cubi, quintuplę potentię radii circuli comprehendentis
pentagonum ipſum dodecaedri: ergo ex compoſitione ordi-
l pr. 19. l. 3 nata *l* axis ſphęrę poteſtate ad radium circuli comprehen-
dentis pentagonum dodecaedri erit, vt 15 quadrata lateris he-
xagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni: ſed prius in eadem
ratione fuit axis ſphęrę ad radium circuli comprehendentis
trian-

triangulum icoſaedri: Ergo m axis ſphęrę poteſtate eandem rationem habet ad duos radios circulorum comprehendentium pentagonum dodecaedri, & triangulum icoſaedri; propterea n radij ipſi, atque circuli æquales erunt. m pr. 7. l. 3. n pr. 4. l. 3

Poſtea quoniam radius ſphæræ poteſtate ad radios circulorum continentiũ o triangulũ octaedri, & p quadratum cubi, eãdem rationem ſeſquialteram habet; Ergo q radij, & ideo circuli ipſi continentes triangulum octaedri, & quadratum cubi æquales ſunt inter ſe. & ax. l. 2. o cor. 2. pr. 2 huius. p cor 2 pr. 3 huius. q pr. 4. l. 3. & ax. l. 2.

Iam quia r eandem rationem habent inter ſe latera regularium triangulorum tetraedri, octaedri, & icoſaedri, quam habent radij circulorum continentium dicta triangula. Ergo ſ radius circuli continentis triangulum tetraedri ad radiũ circuli continentis triangulum octaedri, vel ad ei æqualem radium circuli continentis quadratum cubi poteſtate erit, vt 4 ad 3, quæ eſt proportio laterum tetraedri, & octaedri poteſtate, & ideo t circuli ipſi erunt, vt 4 ad 3; & u ad radium circuli continentis triangulum icoſaedri, vel continentis pentagonum dodecaedri poteſtate erit, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, & x circuli ipſi in eadem ratione erunt. Eadem ratione radius circuli continentis triangulum octaedri, vel ei æqualis continentis quadratum cubi ad radiũ circuli cõtinentis triangulum icoſaedri, vel pentagonum dodecaedri poteſtate eandem rationem habebit, quam y habent potentiæ eorum laterum, ſcilicet erit, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni, et ita quoque circuli inter ſe erunt. Quod erat, &c. r ex pr. 10. l 5. ſ pr. 7. huius. t pr. 2. l. 5. u pr. 7. huius. x pr. 2 l. 5 y pr. 7. huius.

COROLLARIVM I.

Eucl. 2. XIV.

Conſtat ex demonſtratione huius propoſitionis duos circulos comprehendentes triangulum icoſaedri, & pentagonum dodecaedri ęquales eſſe inter ſe: pariterque duos circulos cõprehendentes triangulum octaedri, & quadratum cubi ęquales eſſe inter ſe.

COROLLARIVM II.

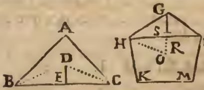
Colligitur etiam, quòd quadratum radij circuli continentis triangulum icoſaedri, vel circuli continentis pentagonum dodecaedri eſt ęqualis 4 partibus decimi quintis quadrati lateris

teris pentagoni in circulo maximo ſphęrę deſcripti. Nam in hac propoſitione axis ſphærę ad radium circuli continentis triangulum icoſaedri, vel pentagoni dodeçaedri poteſtate fuit, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris
a cor. 3. pr. 17. l. 4. pentagoni, & *a* radius ſphærę ad axim ſphęrę poteſtate eſt, vt 1 ad 4, ſeu vt 1 quadratum lateris pentagoni ad 4 quadrata la-
b pr. 20. l. 5. teris pentagoni: Ergo *b* ex compoſitione perturbata quadratum radij ſphęrę ad quadratum radij circuli continentis triangulum icoſaedri, vel pentagonum dodecaedri eſt, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 4 quadrata lateris pentagoni, ſeu vt 1 quadratū lateris hexagoni ad 4 decimas quintas partes qua-
c ſch. pr. 3. l. 5. drati lateris pentagoni; eſtque *c* quadratum radij ſphęrę ęquale quadrato lateris hexagoni in circulo maximo ſphęrę deſcripti. Ergo patet propoſitum.

PROPOS. IX. THEOR. III.

Triangulum icoſaedri ad pentagonum dodecaedri eſt, vt tres quintæ partes lateris trianguli icoſaedri ad latus cubi; & ſuperficies icoſaedri ad ſuperficiem dodecaedri eſt, vt latus trianguli icoſaedri ad latus cubi.

Sit A B C triangulum icoſaedri, & G H K M N pentagonum dodecaedri, & D, & O ſint centra circulorum, figuras



a pr. 11. l. 1. & pr. 2. l. 2. *b pr. 9. l. 1.* continentium, & ducantur D B, D C, O H, O G, H N; & *a* ducatur D E perpēdicularis ad B C, ſecās eam bifariam in E, & *b* ſecetur G O bifariam in S. Quo-
c cor. 1. pr. 5 huius. niam *c* H N, ſubtendens angulum pentagoni dodecaedri æqualis eſt lateri cubi, & *d* ſecatur perpendiculariter, & bifa-
d pr. 19. l. 2. riam à circuli radio O G in R, pariterque *e* perpendicularis
e ex pr. 30. l. 5. D E ſemiſſis eſt radij circuli continentis triangulum ęquila-
f ex cor. 2 pr. 32. l. 1. terum A B C: Ergo *f* parallelogrammum ſub D E ſemiradio, & ſub B E ſemilatere trianguli ęquilateri A B C æquale eſt
g cor. 3. pr. 3. l. 5. triangulo D B C; ideoque *g* triplum parallelogrammi D E B ęquale eſt triangulo A B C. Similiter parallelogrammum
h cor. 1. pr. 3. l. 5. ſub baſi S O ſemiſſe radij G O, & altitudine perpendiculari H R ſemiſſe lateris cubi, ęquale eſt triangulo G H O, & *h* ideo quintuplum parallelogrammi ſub H R, & S O ęquale erit

penta-

pentagono G H K M. Quare triangulum A B C ad pentagonum G H K N erit, vt triplum rectanguli D E B ad quintuplum rectanguli ſub H R, & S O; ſuntque [i] ſemiradij O S, & D E çquales, cùm circuli, figuras continentes, çquales ſint: Ergo [k] triangulum A B C ad pentagonum G H K M eſt, vt triplum ſemilateris B E trianguli icoſaedri ad quintuplum ſemilateris H R cubi, ſeu [l] vt triplum B C lateris icoſaedri ad quintuplum H N lateris cubi, vel vt tres quintç partes lateris icoſaedri ad latus cubi.

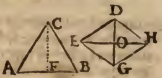
[i] ax. l. 2.
[k] pr. 1. l. 4
[l] pr. 11. l. 3

Secundò quoniam triangulum icoſaedri ad pentagonum dodecaedri eſt, vt 3 latera icoſaedri ad 5 latera cubi. Ergo 20 triangula icoſaedri, ideſt ſuperficies tota icoſaedri ad 12 pentagona dodecaedri, ſeu ad ſuperficiem totam dodecaedri: erit, vt 60 latera icoſaedri, ad 60 latera cubi, ſiue vt latus icoſaedri ad latus cubi, ita erit ſuperficies icoſaedri ad ſuperficiẽ dodecaedri.

PROPOS. X. THEOR. IV.

Triangulum tetraedri ad quadratum cubi eſt, vt altitudo triãguli æquilateri ad eius baſim. Et ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem cubi eſt, vt radius circuli ad latus inſcripti trianguli çquilateri.

Sit triangulũ tetraedri ABC, in quo ducatur eius altitudo, ſiue perpendicularis C F, ſecans [a] baſim A B biſariam in F; ſitque quadratum D E G H cubi in eadem ſphçra, in qua tetraedrum, inſcripti; & in eo ducantur duç diametri D G, & E H, ſe [b] ſecantes biſariam & ad angulos rectos in O. Et quia [c] quadratum ipſius A B lateris nimirum tetraedri duplum eſt quadrati D E lateris cubi, eſtque [d] pariter quadratum diagonalis E H duplum quadrati lateris D E, Ergo quadrata ipſarum A B, D G, & E H çqualia ſunt; & ideo [e] rectç A B, D G, & E H çquales ſunt; Sed [f] triangulum A B C ad duo triangula D E H, & G E H eandem proportionem habet, quam altitudo C F ad duas altitudines DO, & G O (cùm baſes A B, & E H çquales ſint); eſtque A B çqualis altitudinibus D O & O G. Ergo [g] tetraedri triangulum A B C ad duo triangula D E H, & G E H, ſiue ad quadratum cubi



[a] cor. pr. 4. l. 2.
[b] ex pr. 3. l. 5.
[c] pr. 7. huius
[d] ex pr 18. l 5 & pr. 34 l 1.
[e] cor. 2. pr. 17. l. 4.
[f] cor. 1 pr. 2 l. 4.
[g] pr. 7. & pr. 3. l 3.

DE

D E G H eandem proportionem habet, quam trianguli altitudo C F ad baſim eius A B.

h par.1.huius. Secundò h quia triangulum tetraedri ad quadratum cubi eſt, vt altitudo trianguli ęquilateri ad eius baſim, & vt 4 altitudines ad 6 baſes trianguli, vel vt 4 partes ſextę altitudinis trianguli ad eius baſim, ita erit ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem cubi; ſed 4 partes ſextę, ſeu 2 partes tertię altitudinis trianguli ęquilateri ęquales ſunt radio circuli circunſcribentis triangulum ęquilaterum (eò quod i altitudo trianguli ęquilateri ſeſquialtera eſt radij circuli, continentis triangulū). Ergo k vt radius circuli ad latus inſcripti trianguli ęquilateri, ita erit ſuperficies tetraedri ad ſuperficiē cubi. Quę erant, &c.

i pr.30.l.5. k pr.7. l.3.

COROLLARIVM.

Vnde colligitur, quòd triangulum tetraedri ad quadratum cubi poteſtate eſt, vt 3 ad 4 & ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem cubi poteſtate eſt ſubtripla.

l pr.30.l.5. Nam l quadratum altitudinis trianguli ęquilateri ad quadratum baſis eius eſt, vt 3 ad 4 & quadratū radij circuli ad quadratum lateris inſcripti trianguli eſt, vt 1 ad 3. & hę oſtenſæ fuerunt in hac propoſitione baſium, et ſuperficierum proportiones tetraedri & cubi.

PROPOS. XI. THEOR. V.

Triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri eſt vt latus cubi ad quinque ſextas partes lateris icoſaedri. Et ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem dodecaedri, vt latus cubi ad quinque ſemiſſes lateris icoſaedri.

a pr.7 huius Quoniam a quadratum cubi ad quadratum lateris icoſaedri eſt, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni: ergo 2 quadrata cubi ad 1 quadratum lateris icoſaedri, vel 18 quadrata cubi ad 9 b quadrata lateris icoſaedri erunt, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pētagoni; ſed c hanc eandem proportionem habet triangulum tetraedri ad triāgulum icoſaedri: igitur d 18 quadrata cubi ad 9 quadrata lateris icoſaedri erunt, vt triangulum tetraedri ad triangulum icoſaedri. Poſtea quia e triangulum icoſaedri ad pentagonum dodecaedri eſt, vt 3 latera icoſaedri ad 5 latera cubi,

b ex cor. 1. pr 19. & pr 11.l 3. c cor pr.7. huius. d pr.7.l.3. e pr 9. huius.

cubi, et *f* ita eſt quadratum primi ad rectangulum primi, & [f pr. 1. l. 4.] ſecundi, ideſt 9 quadrata lateris icoſaedri ad 15 rectangula laterum icoſaedri, & cubi: Igitur *g* triangulum tetraedri ad [g pr. 19. l. 5] pentagonum dodecaedri erit, vt 18 quadrata lateris cubi ad 15 rectangula laterum icoſaedri, & cubi, vel *h* vt 6 latera cubi [h pr. 11. l. 5] ad 5 latera icoſaedri; ſeu potius, vt latus cubi ad quinque partes ſextas lateris icoſaedri, ita erit triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri. Poſtea quia quadruplum primi ad duodecuplum ſecundi eſt, vt 24 latera cubi ad 60 latera icoſaedri, vel vt 2 ad 5, vel potius vt latus cubi ad 5 medietates lateris icoſaedri, ita erit ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem dodecaedri. Vt fuit propoſitum.

PROPOS. XII. THEOR. VI.

Triangulum octaedri ad quadratum cubi eſt, vt 3 quartæ partes altitudinis trianguli æquilateri ad eius baſim, & ſuperficies octaedri ad ſuperficiem cubi eſt, vt altitudo trianguli æquilateri ad eius baſim. Atque triangulum octaedri ad pentagonum dodecaedri eſt, vt latus cubi ad 10 nonas partes lateris icoſaedri. Et ſuperficies octaedri ad ſuperficiem dodecaedri eſt, vt latus cubi ad 5 tertias partes lateris icoſaedri.

Quoniam *a* proportio trianguli octaedri ad triangulum tetraedri eſt, vt 3 ad 4, ſeu vt 3 quartæ partes altitudinis trianguli ęquilateri ad eius totam altitudinem; & *b* proportio trianguli tetraedri ad quadratum cubi eſt, vt altitudo trianguli æquilateri ad eius baſim: [a cor. pr. 7. huius.] [b pr. 10. huius.] Ergo *c* triangulum octaedri ad quadratum cubi eſt, vt 3 quartę partes altitudinis trianguli ęquilateri ad eius baſim. [c pr. 19. l. 5.] Poſtea quia octuplum primi ad ſextuplum ſecundi erit, vt 24 partes quartę altitudinis trianguli æquilateri ad 6 latera eiuſdem trianguli, ſiue vt 6 altitudines trianguli ęquilateri ad ſex latera eiuſdem trianguli, vel *d* vt 1 altitudo ad 1 baſim trianguli ęquilateri, ita erit tota ſuperficies octaedri ad ſuperficiem cubi. [d pr. 11. l. 5.]

Secundò quoniam *e* triangulum octaedri ad triangulum tetraedri eſt, vt 3 ad 4, vel vt 9 latera cubi ad 12 latera eiuſdem; [e cor. pr. 7. huius.] ſed *f* triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri eſt, vt 6 latera cubi ad 5 latera icoſaedri; ſiue vt 12 latera cubi ad 10 latera icoſaedri: [f pr. 11. huius.] Ergo *g* ex compoſitione ordinata triangulum [g pr. 19. l. 5]

octaedri ad pentagonum dodecaedri erit, vt 9 latera cubi ad 10 latera icoſaedri, hoc eſt, vt latus cubi ad decem nonas partes lateris icoſaedri.

Deinde quia vt octuplum primi ad duodecuplum ſecundi, ſic eſt ſuperficies octaedri ad ſuperficiem dodecaedri: Igitur vt 72 latera cubi ad 120 latera icoſaedri, aut vt 3 ad 5, vel vt latus cubi ad quinque tertias partes lateris icoſaedri, ita erit ſuperficies octaedri ad ſuperficiem dodecaedri. Quę erant, &c.

PROPOS. XIII. THEOR. VII.

Quadratum cubi ad pentagonum dodecaedri eſt, vt latus cubi ad 5 ſextas partes altitudinis trianguli icoſaedri. Et ſuperficies cubi ad ſuperficiem dodecaedri eſt, vt latus cubi ad 5 tertias partes altitudinis trianguli icoſaedri; atque ſuperficies cubi ad ſuperficiem icoſaedri eſt, vt quadratum cubi ad 5 tertias partes parallelogrammi comprehenſi ſub latere, & altitudine trianguli icoſaedri.

a prop. 10. huius. b prop. 11. huius. c pr. 20. l. 3

Quoniam a quadratum cubi ad triangulum tetraedri eſt, vt latus trianguli æquilateri ad eius altitudinē, ſiue vt latus triãguli icoſaedri ad eius altitudinem; vel vt 5 latera icoſaedri ad 5 altitudines eius; atque b triangulum tetraedri ad pentagonũ dodecaedri eſt, vt 6 latera cubi ad 5 latera icoſaedri. Ergo c ex compoſitione perturbata, vt 6 latera cubi ad 5 altitudines trianguli icoſaedri, vel vt latus cubi ad 5 ſextas partes altitudinis trianguli icoſaedri, ita erit quadratum cubi ad pentagonum dodecaedri.

d par. 1. huius pr.

Poſtea ſuperficies cubi ad ſuperficiem dodecaedri eſt, vt 6 quadrata cubi ad 12 pentagona dodecaedri, id eſt vt d 36 latera cubi ad 60 altitudines trianguli icoſaedri, vel vt 3 ad 5, aut vt 1 latus cubi ad 5 partes tertias altitudinis trianguli icoſaedri.

e cor. 2 pr. 32. l. 1.

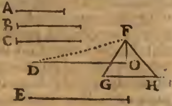
Tertiò quia e parallelogrammum ſub altitudine trianguli icoſaedri, et latere eius contentum duplum eſt trianguli icoſaedri; Ergo 6 quadrata cubi ad 10 parallelogramma ſub altitudine, & latere trianguli icoſaedri contenta, aut 3 ad 5, vel potius quadratum cubi ad 5 tertias partes parallelogrammi ſub latere, et altitudine trianguli icoſaedri contenti, habebit eandem proportionem, quam ſuperficies cubi ad ſuperficiem icoſaedri. Quæ erant, &c.

PROPOS. XIV. THEOR. VIII.

Tetraedri radius ad octaedri, ſiue cubi radium eſt, vt latus hexagoni ad latus trianguli, et ad icoſaedri, vel dodecaedri radium erit, vt tertia pars lateris hexagoni ad latus quadrati differentialis inter quadratū lateris hexagoni, et 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni; ſed octaedri, vel cubi radius ad icoſaedri, vel dodecaedri radium erit, vt latus exagoni ad latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni, vel vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri.

Sint A radius tetraedri, B radius octaedri, C radius cubi, DO radius icoſaedri, & E radius dodecaedri, quæ ſunt perpendiculares a centro ſphęræ ad plana figurarum corporum regularium. Dico primò A ad B eſſe, vt latus hexagoni ad latus trianguli.

Quoniam radius [a] A ad radium ſphæræ potentia, eſt vt 1 ad 9, eo quod tetraedri radius A tertia pars eſt radij ſphęrę), & [b] quadratum radij ſphęræ ad quadratum radij B octaedri eſt, vt 9 ad 3: Ergo [c] quadratum A ad quadratum B eſt, vt 1 ad 3. [d] eſtque quadratum lateris hexagoni tertia pars quadrati lateris trianguli: Ergo quadratum radij A ad quadratum B eſt, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli; & ideo [e] ipſe radius tetraedri A ad octaedri radium B erit, vt latus hexagoni ad latus trianguli.



a cor. 3. pr. 1 huius.
b cor. 3. pr. 2. huius.
c pr. 19. l. 3.
d pr. 30. l. 3
e pr. 18. l. 4.

Secundò quia C radius cubi ęqualis eſt ipſi B: eo [f] quod vterque tertia pars eſt poteſtate radij ſphęræ: Ergo A ad C eandem rationem habet, quam ad B; & propterea A ad C erit, vt latus hexagoni ad latus trianguli.

f cor. 1. pr. 2 & cor 3. pr 3 huius.

Tertio ſit triangulum icoſaedri F G H, radius circuli eum continentis, ſit F O, & D F ſit radius ſphęræ, atque D O fuit radius icoſaedri: ergo [g] in triangulo rectangulo D F O radius D O erit latus quadrati differentialis inter quadrata D F, & F O. Et quia quadratum [h] radij tetraedri nona pars eſt quadrati

g prop. 2 & ex pr 18. l. 5.
h par. 1. huius.

g pr. 8. huius. drati radij ſphęræ, & g quadratum radij ſphęræ D F ad quadratum F O radij circuli continentis triangulum icoſaedri eſt, vt quadratum lateris hexagoni ad 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni: Ergo h quadratum radij D F ſphęræ ad differentiam quadratorum D F, & F O, ſiue ad quadratū radii D O, erit, vt quadratum lateris hexagoni ad differentiam inter quadratum lateris hexagoni, & 4 quintas decimas partes quadrati lateris pentagoni. Quare i ex compoſitione ordinata quadratum radii A ad quadratum radii D O erit, vt nona pars quadrati lateris hexagoni ad differentiam inter quadratum lateris hexagoni, & 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni; & ideo k ipſemet radius A tetraedri ad radium D O icoſaedri erit, vt tertia pars lateris hexagoni ad latus quadrati differentialis inter quadratum lateris hexagoni, & 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni.

h ex pr 18. l. 5.
i pr 19. l. 5.
k ex cor 3 pr. 17. l. 4.

Quartò quia l radij circulorum, comprehendentium triangulum icoſaedri, & pentagonum dodecaedri ęquales oſtenſi ſunt: Ergo m perpendiculares, quę à centro eiuſdem ſphęrę ad centra dictorum circulorum æqualium in circulis ſphere maximis coniunguntur ęquales ſunt inter ſe; & ideo radius E dodecaedri ęqualis erit radio D O icoſaedri: Et propterea n A ad E, et ad D O eandem rationem prius expoſitam habebit.

l ex pr. 8. huius.
m ex pr. 10. l. 1.
n pr. 3. l 3.

Quintò o quia axis lateris cubi, & radius ſphæræ radij cubi tripli ſunt potentiâ, permutādo, p & inuertendo C radius cubi, ſemiſſis erit lateris cubi, ſicuti radius ſphæræ ſemiſſis eſt axis; eſtque q D O vel E latus quadrati differentialis inter quadratū radij ſphęrę D F, & quadratū F O radii circuli cōtinētis triāgulum G F H icoſaedri, quod r eſt tertia pars quadrati lateris icoſaedri: Ergo radius B octaedri, vel ſ ei æqualis radius C cubi ad radium D O icoſaedri, vel ad t ei ęqualem radium E dodecaedri, eandem rationem habet, quam ſemiſſis lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radij ſphæræ, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. Vel potius u quia radius B octaedri ad radium ſphęræ potētiâ eſt, vt 1 ad 3, ſiue vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris hexagoni; & radius ſphæræ D F ad D O radium icoſaedri fuit, vt y quadratum lateris hexagoni ad differentiam inter quadratum lateris hexagoni, & 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni, ſiue, z vt 3 quadrata lateris hexagoni ad differentiam inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 12 decimas quintas, vel 4

o cor. 1. & 3 pr. 2. huius
p pr. 11. & 9. l 3.
q pr. 18. l. 5
r pr 30. l. 5.
ſ par. 2. huius pr.
t par. 4 huius pr.
u cor 3. pr. 2 huius.
y par 3 huius pr.
z pr. 11. l. 3

quin-

quintas partes quadrati lateris pentagoni:Ergo a B ad D O potentiā erit,vt quadratum lateris hexagoni ad differentiam inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni. Vnde octaedri radius B,ſiue ei ęqualis radius cubi, erit ad icoſaedri radium D O ſiue ad ei ęqualem E radium dodecaedri,in eadem ratione,quam habet latus hexagoni ad latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni. Quę erant oſtendenda. a pr. 19. l. 3.

PROPOS. XV. THEOR. IX.

Tetraedrum ad octaedrum eſt, vt latus hexagoni ad ſeſquialterum lateris trianguli,& ad cubum eſt, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli,& ad icoſaedrum eſt,vt tertia pars cubi ex latere hexagoni deſcripti ad priſma rectum, cuius baſis eſt ſeſquialtera quadrati lateris pentagoni,altitudo verò eſt latus quadrati differentialis inter quadratū lateris hexagoni, & quatuor decimas quintas quadrati lateris pentagoni, atque ad dodecaedrum eſt, vt rectangulū ſub latere cubi, & ſub tertia parte radij ſphęrę contentum ad rectangulum ſub 5 medietatibus lateris icoſaedri, & ſub latere quadrati differentialis inter quadratum radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri.

Quoniam a tetradrum diuiditur in quatuor pyramides æquales, verticem in centro ſphęrę habentes,quarum baſes æquales ſunt, ſcilicet triangula tetraedri, & altitudines ęquales, ſcilicet radij tetraedri: Ergo tetraedrum quadruplum eſt pyramidis,cuius baſis eſt triangulum tetraedri, & altitudo ęqualis eſt radio eiuſdē;Sed b pyramis,cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei tetraedri,ſiue quadruplo vnius trianguli tetraedri & altitudo,radius eiuſdem,quadrupla quoq;eſt vnius pyramidis tetraedri verticē in centro ſphęrę habentis,(eo quod pyramides ęquè altę ſunt inter ſe,vt baſes) Ergo c pyramis, cuius baſis ęqualis ſuperficiei tetraedri, & altitudo ęqualis radio tetraedri eſt ęqualis ſolido tetraedri. Eadem ratione reliqua corpora regularia ęqualia erunt pyramidibus, quarum baſes ęquales ſunt ſuperficiebus, & altitudines ęquales radijs ipſorū ſolidorum; Vnde vt ſunt pyramides dictæ inter ſe,ita erunt ſolida

a cor. 6. pr. 1 huius, & pr. 1. huius.
b pr. 25. l. 6
c pr 3. l. 3.

d pr.31.l.6. lida regularia; ſed d illę pyramides habent proportionem, compoſitam ex rationibus baſium, & altitudinum. Ergo ſimiliter corpora regularia compoſitam proportionem habebunt ex rationibus ſuperficierum eorundem ſolidorum, & altitudinum, ſiue radiorum.

e cor pr.7. huius. f pr.14 huius. g pr 19.l.3 ⱳ pr. 31. l.6. Et primò quia e ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem octaedri eſt, vt 2 ad 3, ſiue vt 1 latus hexagoni ad 3 ſemilatera hexagoni; & f radius tetraedri ad radium octaedri eſt, vt latus hexagoni ad latus trianguli, ſiue vt 3 ſemilatera hexagoni ad 3 ſemilatera triãguli: Ergo g tetraedrum ad octaedrum eſt, vt latus hexagoni ad 3 ſemilatera trianguli.

h prop.14. huius. i prop.10. huius. k pr 31.l 6 ⱳ pr.17.l 4 l pr.7 l.3. Secundò quia tam h radius tetraedri ad radium cubi, i quàm ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem cubi eſt, vt latus hexagoni ad latus trianguli, ſed k hę duę proportiones componunt tam rationem tetraedri ad cubum, quàm proportionem quadrati lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli. l Ergo tetraedrum ad cubum eſt, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli.

m cor pr.7. huius n pr 14.huius. o pr.31.l 6 p pr.30.l 6 Tertiò quia m ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem icoſaedri eſt, vt quadratum lateris hexagoni ad 3 ſemiquadrata lateris pentagoni; & n radius tetraedri ad radium icoſaedri eſt, vt tertia pars lateris hexagoni ad latus quadrati differentialis inter quadratũ lateris hexagoni, & 4 partes decimas quintas quadrati lateris pentagoni; ſed o hę duę proportiones componunt proportionem priſmatis recti, cuius baſis eſt quadratum lateris hexagoni, altitudo verò eſt tertia pars lateris hexagoni; ſiue p tertię partis cubi ex latere hexagoni ad priſma rectum, cuius baſis eſt ſeſquialtera quadrati lateris pentagoni, altitudo verò eſt latus quadrati differentialis inter quadratũ lateris hexagoni, & 4 partes decimas quintas quadrati lateris pentagoni. Quare hanc eandem proportionem habebit tetraedrum ad icoſaedrum.

q pr.11 huius. r pr.14 huius. ſ pr.13.l.4. Quartò quoniam q ſuperficies tetraedri ad ſuperficiem dodecaedri eſt, vt latus cubi ad 5 ſemilatera icoſaedri; & r radius tetraedri ad radium dodecaedri eſt, vt tertia pars radij ſphęrę ad latus quadrati differentialis inter quadratum radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri; ſed ſ hę duę proportiones componunt proportionem plani rectãguli ſub latere cubi, et tertia parte radij ſphęrę contenti ad rectangulum ſub 5 ſemilatera icoſaedri, & ſub latere quadrati differentialis inter quadratum radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati la-

ti lateris icoſaedri. Quare hunc eandem proportionem habebit tetraedrum ad dodecaedrum. quę erant oſtendenda.

PROPOS. XVI. THEOR. X.

Octaedrum ad cubum eſt, vt altitudo trianguli ad eius baſim; & ad icoſaedrum eſt, vt cubus ſuper latus hexagoni deſcriptus ad priſma rectum, cuius baſis quadratum lateris pentagoni, altitudo verò eſt latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni: & ad dodecaedrum eſt, vt dimidium quadrati cubi ad parallelogrammum ſub 5 tertijs partibus lateris icoſaedri, & ſub latere quadrati differẽtialis inter quadratum radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri.

Quoniam, *a* vt dictum eſt, octaedrum ad cubum proportionem habet compoſitam ex rationibus ſuperficierum, & radiorum, & *b* ſunt dicti radij ęquales inter ſe: Ergo *c* vt ſuperficies octaedri ad ſuperficiem cubi, ita eſt octaedrum ad ipſum cubum; erat *d* autem ſuperficies octaedri ad ſuperficiem cubi, vt altitudo trianguli ęquilateri ad eius baſim. Ergo *e* octaedrum ad cubum erit, vt altitudo trianguli ęquilateri ad eius baſim. *a par. 1 pr. 15 huius.* *b cor. 1 pr. 8 huius.* *c pr. 25. l. 6* *d prop. 12. huius.* *e pr. 7 l. 5.*

Secundò quia *f* ſuperficies octaedri ad ſuperficiem icoſaedri eſt, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris pentagoni; & *g* octaedri radius ad icoſaedri radium eſt, vt latus hexagoni ad latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni; ſed *h* hę duę proportiones componunt proportionem cubi deſcripti ex latere hexagoni ad priſma rectum, cuius baſis eſt quadratum lateris pentagoni, altitudo verò eſt latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni (quandoquidem priſmata recta proportionem habent compoſitam ex baſibus, & altitudinibus). Quare, vt prius, octaedrum ad icoſaedrum eſt, vt cubus deſcriptus ſuper latere hexagoni ad priſma rectum, cuius baſis eſt quadratum lateris pentagoni, & altitudo eſt latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni. *f cor. pr. 7. huius.* *g prop. 14. huius.* *h pr. 31. l. 6.*

Tertiò quoniam *i* ſuperficies octaedri ad ſuperficiem dodecaedri *i pr. 13 huius.*

caedri

caedri eſt, vt latus cubi ad 5 tertias partes lateris icoſaedri; & octaedri *k* radius ad dodecaedri radium eſt, vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radii ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri; ſed *l* hæ duæ proportiones componunt rationem dimidij quadrati cubi ad parallelogrammum rectangulum ſub 5 tertijs partibus lateris icoſaedri, et latus quadrati differentialis inter quadratum radii ſphęrę, et tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. Quare in hac eadem proportione erit octaedrum ad dodecaedrum. Vt erat propoſitum.

k prop. 14. huius.
l pr. 31. l. 6.

PROPOS. XVII. THEOR. XI.

Cubus ad icoſaedrum eſt, vt dimidium eiuſdem cubi ad priſma rectum contentum ſub altitudine trianguli icoſaedri, & ſub 5 tertijs partibus lateris eiuſdem trianguli icoſaedri, atque ſub latere quadrati differentialis inter quadratū radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. Sed cubus ad dodecaedrum eſt, vt dimidium quadrati cubi ad parallelogrammum rectangulum ſub 5 tertiis partibus altitudinis trianguli icoſaedri, & ſub latere quadrati differentialis inter quadratum radij ſphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. At icoſaedrum ad dodecaedrum eſt, vt latus icoſaedri ad latus cubi.

Quoniam *a* ſuperficies cubi ad ſuperficiem icoſaedri eſt, vt quadratum cubi ad parallelogrammum ſub 5 tertiis partibus lateris trianguli icoſaedri, & ſub altitudine eiuſdem trianguli; & *b* cubi radius ad icoſaedri radium eſt, vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radii ſphęræ, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. Hę *c* autem duę proportiones componunt proportionem dimidii cubi intra ſphęram deſcripti ad priſma rectum, cuius baſis eſt rectangulum contentum ſub 5 tertiis partibus lateris triãguli icoſaedri, & ſub altitudine eiuſdem trianguli; altitudo verò eſt latus quadrati differentialis inter quadratum radii ſphęræ, & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. Sed hę proportiones, vt dictum eſt; etiam componunt proportionem cubi ad icoſaedrum. Igitur cubus ad icoſaedrum eandem expoſitam proportionem habet.

a prop. 13. huius.
b prop. 14. huius.
c pr. 31. l. 6.

Secundo quoniam *d* ſuperficies cubi ad ſuperficiem dodecaedri

d prop. 13. huius.

caedri eſt, vt latus cubi ad 5 tertias partes altitudinis trianguli icoſaedri; et e cubi radius ad dodecaedri radium eſt, vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratũ radij ſphęrę, et tertiam partem quadrati lateris icoſaedri: Hæ verò f duę proportiones componunt rationem ſemiſſis quadrati cubi ad parallelogrammum rectangulum contentum ſub quinque tertijs partibus altitudinis trianguli icoſaedri, & ſub latere quadrati differentialis inter quadratum radij ſphęre & tertiam partem quadrati lateris icoſaedri. Igitur, vt prius, in hac eadem proportione erit cubus ad dodecaedrum.

Tertiò quoniam g ſuperficies icoſaedri ad ſuperficiem dodecaedri eſt, vt latus icoſaedri ad latus cubi; atque h icoſaedri radius ęqualis oſtenſus eſt radio dodecaedri. Igitur i icoſaedrũ ad dodecaedrum eandem proportionem habebit, quam latus icoſaedri ad latus cubi. quod erat oſtendendum.

e prop.14. huius.
f pr.13.l.4. & pr.34.& 31.l.1.
g prop.9. huius.
h prop.14. huius.
i pr.25 l.6. & ex pr.15 huius.

SCHOLIVM.

In XV. Euclidis libro, qui Hypſicli Alexandrino tribuitur agitur in quinque propoſitionibus de mutua inſcriptione figurarum regularium; at quia huiuſmodi argumentum parum vtilitatis elementari inſtitutioni afferre videtur, ſitque à Campano, Candalla, & Clauio diligentiſſimè expoſitum, & amplificatum, neque inſtituti mei eſt aliena tranſcribere, propterea partem hanc Geometriæ, licet curioſitatis plenam, omnino relinquendam eſſe duxi.

Finis Libri ſeptimi.

Eucl lib. VII.VIII IX.

LIBER OCTAVVS,

Arithmeticorum.

DEFINITIONES.

I.

Vnitas eſt anticipatio, ſecundum quam vnumquodque eorum, quę ſunt, vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus compoſita multitudo.

Conceptus, ſeu anticipatio vnitatis diuiſionem non admittit. Nam proprium eſt multitudinis diuidi poſſe in plures partes; & propterea vnitas indiuidua eſt. Differt tamen vnitas à puncto, quòd vnitas pars ſit componens numerum, punctum verò non componat magnitudinem, ſed ſit principium, & terminus eius.

III.

Par numerus eſt, qui biſariam diuiditur.

IV.

Impar verò, qui biſariam non diuiditur, vel vnitate differt pari.

V.

Pariter par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.

Numerus, qui componitur ex pari multitudine parium numerorum, vt 24, qui componitur ex 6 quaternarijs, menſurabitur à pari numero 4 per parem 6, ideſt per parem multitudinem eorũdem, & tunc 24 vocabitur Pariter par.

VI.

Pariter autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Et

Et numerus compoſitus ex impari multitudine parium numerorum, vt 6, qui componitur ex tribus binarijs; menſurabitur à pari numero 2 per imparem 3. Et propterea dicetur numerus 6 Pariter impar.

VII.

Impariter verò impar eſt numerus, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Numerus verò compoſitus ex impari multitudine imparium numerorum, vt 15, qui componitur ex tribus quinarijs, menſurabitur ab impari 5 per imparem 3. diceturque propterea numerus 15 Impariter impar.

VIII.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur.

IX.

Multiplicatio numeri in numerum eſt inuentio numeri, qui ad multiplicatum eandem proportionem habeat, quam multiplicans ad vnitatem; Et factus numerus, Planus vocatur: Et numeri ſe ſe multiplicantes vocãtur Latera eius. At ſi tres numeri ſe multiplicent, factus numerus, Solidus vocabitur, & tres dicti numeri vocentur Latera eius.

Vnitas X ad numerum A eandem proportionem ſubmultiplicem habeat, quam numerus B ad quartum numerum C; Dicetur numerus C Productus ex multiplicatione numeri A in numerum B: Et dicitur numerus C Planus; & A, & B Latera eiuſdem numeri plani C. Vnde conſtat toties numerum multiplicatum B contineri in producto C, quot ſunt vnitates contentæ in multiplicante A.

X 1
A 3
B 4
C 12

At tres numeri A, B, D ſe multiplicare dicentur, ſi tertius numerus D multiplicetur in planum numerum C, genitum ex multiplicatione duorum laterum A & B, producaturque numerus E. Itaque fieri debet vnitas X ad A, vt B ad C; & denuò vt vnitas ad C, ita D ad productum E. dicetur numerus E Solidus; & tres numeri A, B, D Latera dicti ſolidi.

X 1
A 3
B 4 C 12
D 6
E 72

X.

Quadratus numerus eſt, cuius latus medium proportionale eſt inter ipſum, & vnitatem.

X 1 | A 3 | B 9 — *Vt ſi vnitas X ad numerum A ſit, vt A ad numerum B; Dicetur B numerus Quadratus, & A Latus eius. Itaque ex multiplicatione lateris A in ſe ipſum gignitur numerus quadratus B.*

XI.

Cubus verò numerus eſt ille, inter quem, & vnitatem duo medij proportionales intercedunt, quorũ vnus eſt latus eius, alter verò eſt quadratus eiuſdem lateris.

X 1 | A 3 | B 9 | E 27 — *Vt ſi vnitas X ad numerum A eandem rationem habeat, quam A ad quadratum numerum B, & vt X ad A, ita quoque ſit B ad numerum E. Dicetur E numerus Cubus, eiuſque Latus A.*

XII.

Similes plani, & ſolidi numeri ſunt, qui proportionalia habent latera.

A 6 B 54 | C 2 E 6 | D 3 H 9 | X 1 — *Vt ſi fuerint duo numeri plani A & B, & duo latera plani A ſint C & D, pariterque duo latera plani B ſint E & H; Et ſiquidem C ad D eandem proportionem habuerit, quam E habet ad H, dicentur plani numeri A, & B Similes inter ſe.*

Eucl. 1. 7II.

PROPOS. I. THEOR. I.

Si duobus numeris inęqualibus propoſitis detrahatur ſemper minor de maiore alternè, neque reliquus vnquam pręcedentem metiatur, quo ad aſſumpta ſit vnitas: nullus numerus, ſed ſola vnitas propoſitos numeros metietur. Vocentur tales numeri Primi inter ſe.

Sint duo numeri inęquales A & B, & B minor, quoties poteſt ſubtrahatur ex maiore A, & numerus ablatus ſit C, & reliquus D ex B, quoties poteſt tollatur, ſitque ablatus numerus E, atque reliquus F ex D tollatur, quoties poteſt, , ſitq; ablatus numerus G, & in hac alterna detractione nunquam reliquus numerus pręcedentem, à quo detractus eſt, metiatur donec ad vnitatem H perueniatur. Dico tantummodo vnitatem, non autem numerum aliquem eſſe communem menſuram

ſuram numerorum A, & B. Si enim hoc verum non eſt, metiatur eos aliquis numerus M. Quoniam M ponitur menſura ipſorum A, & B, ſed B menſurat ablatum C; a Ergo M metitur totum A, & ablatum C; ideoque b M reliquum D metietur; menſurat autem D ipſum E: Ergo M metietur nedùm totum B, ſed etiam ablatum E. Vnde, reſiduum F quoque menſurabit; at F metitur G; Ergo M metitur totum D, & ablatum G; & propterea reſiduum H menſurabit. Quare numerus M metitur vnitatem H, c quod eſt impoſſibile. Non ergo aliquis numerus eſſe poteſt menſura communis numerorum A & B. Quod erat oſtendendum. Vocentur tales numeri A, & B Primi inter ſe.

D 7 H 1
A 17 G 6
C 10
E 7 M
B 10
F 3

a ax. 1. l. 3.
b ax. 6. l. 1.
c def. 13 l. 3

PROPOS. II. PROBL. I.

Eucl. 2 VII.

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

Sint duo numeri A. & B non primi inter ſe. Debet eorum maxima mēſura communis reperiri. Ex maiore A tollatur B, quoties poteſt, & reſiduum D tollatur ex B, quoties poteſt: Tandem procedendo in hac alterna detractione a perueniètur ad reſiduum aliquem numerum F, qui pręcedentē D metietur (alias eſſent A. & B primi numeri, quod non ponitur). Dico numerum F ipſos numeros A. & B menſurare. Quia F metitur D, & D ipſum E; Ergo b F ipſum E menſurat; ſed etiam F ſe ipſum metitur; Ergo c F ipſum B menſurabit; & propterea F ipſum C, atque aggregatum ex C, & D, id eſt A quoque, menſurabit. Dico ſecundò F eſſe maximam communem menſuram numerorum A, & B. Si enim hoc verum non eſt, ſit H maior, quàm F menſura communis numerorum A, & B. Et quia H ponitur menſura ipſius B, & B ipſum C metitur; Ergo H ipſum C menſurabit; ſed H ponitur quoque menſura totius A: Ergo H reſiduum eius D; & ideo ipſum E menſurabit. Quare H,

C 10
A 18
D 8
F 2
B 10
E 8
H

a prop. 1. huius.
b ax 1 l. 3.
c a. 6. l. 1.

re H, reſiduum F ipſius, B quoque menſurabit; numerus maior numerum minorem, quod eſt impoſſibile. Non ergò aliqua menſura cõmunis maior eſſe poteſt, quàm F. Quare, &c.

COROLLARIVM I.

Patet duorum numerorum quamlibet communem menſuram, metiri quoque eorundem numerorum maximam communem menſuram.

Nam H, quę poſita fuit menſura numerorum A, & B, oſtenſa fuit menſura ipſius F.

COROLLARIVM II.

Hinc deducitur, quòd quilibet numeri vnitate differentes, & qui binario differunt, & non fuerint ambo pares, primi inter ſe erunt. Nam facta alterna detractione ex numeris, quorum differentia eſt vnitas, relinquetur tandẽ vnitas pro communi maxima menſura, & quorum differentia eſt binarius, cùm ſit ſaltem vnus eorum par, ex alterna detractione, binarius relictus, detractus a reliquo impari, neceſſario vnitatem pro communi menſura relinquit.

SCHOLIVM.

Patet etiam, quòd dato quolibet numero non primo, reperiri poterit numerus, qui ſit primus, & eius minima menſura ſit.

d def. 8. huius. *Sit numerus A non primus, id eſt d menſurabilis ab aliquo numero. Sumatur aliquis numerus B, qui pars ſit numeri A, vt eius ſemiſſis, vel tertia pars, &c. & ſi B non eſt primus numerus, ſumatur aliqua pars ipſius B, quę ſit C; & ſi C non eſt primus numerus, ſumatur D pars ipſius C. Et quia numerus infinitè diminui non poteſt, inuenietur tandem aliquis numerus, quem nullus alius numerus menſuret,* e def. 8. huius. *& ideo e primus erit, & ſit ille D. Et quoniam D metitur C, & C ipſum B, & B ipſum A,* f ax. 1. l. 3. *f metietur primus numerus D poſtremum numerum A; & D eſt minimus omnium numerorum, qui menſurare poſſunt ipſum A, cum D à nullo alio minore numero menſurari poſſit. Ergo patet propoſitum.*

A	64
B	16
C	4
D	2

PROPOS. III. PROBL. II. — Eucl. 3 VII.

Pluribus numeris datis, quàm duobus, nõ primis inter ſe, maximam communem menſuram eorum reperire.

Sint plures, quàm duo numeri A, B, C non primi inter ſe. Debet eorum maxima communis menſura reperiri. Duorum numerorum A, & B, reperiatur maxima communis menſura D; & duorum numerorũ B, C, reperiatur communis menſura maxima E; & ſic vlterius, ſi plures extiterint. Poſtea quoniam numeri A. B. C ſupponuntur non primi inter ſe, non *a* erunt omnes A, B, C mẽſurabiles tantũmodo ab vnitate, ſed neceſſariò aliquis numerus omnes eos metietur; hæc *b* autem menſura communis omnium A, B, C neceſſariò tam D maximam menſuram communem numerorum A, & B, quàm E maximam menſuram communem numerorum B, & C metietur; ideoque *c* D, & E non erunt primi inter ſe. Reperiatur iam F maxima menſura communis numerorum D, & E. Paret *d* F menſurare omnes numeros A, B, & C, eo quod F menſurat D, & D metitur ipſos A, & B; Ergo F menſurat numeros A, & B. Pari ratione F, metiens E, metietur etiã C. Dico iam F eſſe maximam menſuram omnium A, B, & C. Si enim hoc verum non eſt, ſit H maior, quàm F menſura omnium numerorum A B & C. Et quia H metitur A, & B, *e* metietur quoque H ipſum D menſurã communem maximam eorundem A, & B. Pari ratione H metietur ipſum E. Cùmque H menſuret ipſos D, & E, *f* metietur quoque H ipſam F menſuram communem eorum maximam *g*, quod eſt impoſſibile, eo quod H ponitur maior, quam F. Ergo nulla maior, quam F eſſe poteſt menſura communis numerorum A, B, & C. Quare patet propoſitum.

A 42 — D 6 — F 2
B 36 — E 4
C 20 — H

a pr. 1. hu.
b cor. pr. 1. huius.
c pr. 1 hu.
d ax. 1. l. 13
e cor. pr. 2. huius.
f cor. pr. 2. huius.
g def. 13. l. 1.

COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt quamlibet communẽ menſuram plurium, quam duorum numerorum, metiri quoque eorundem maximam communem menſuram.

CO-

COROLLARIVM II.

Colligitur ex conſtructione, & demonſtratione huius propoſitionis, quòd maxima communis menſura aliarum maximarum communium menſurarum quorunlibet numerorum expoſitorũ eſt quoque communis menſura maxima illorum. Nam numerorum A, B, C fuit tam D, ipſorum A, B, quàm E ipſorum B, C maxima communis menſura, & F fuit maxima communis menſura ipſorum D, & E, atque F oſtenſa fuit maxima communis menſura numerorum A, B, C.

Eucl. 31 33 VII.

PROPOS. IV. THEOR. II.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt. Et omnem numerum non primum aliquis primus numerus metitur.

Primus numerus A non metiatur numerum B. Dico A, & B inter ſe primos eſſe. Si enim A, & B primi non ſunt, metiatur eos pręter vnitatem aliquis numerus C.

A 3 B 5 C

Et quoniam ſupponitur C metiri numerum B, & A non metiri B, non erit C ęqualis ipſi A, a aliàs A quoque menſuraret ipſum B; Et cum numerum A alius numerus C metiatur, non b erit A numerus primus, quod eſt contra hypotheſim. Quare nullus numerus menſurare poteſt ambos A, & B; & ideo primi inter ſe erunt A, & B.

a ax. 4. l. 3.

b def. 8. hu.

Secundò ſit numerus non primus A. Dico aliquem primum numerum eum metiri. Quoniam numerus

A 24 B 2 C

A ponitur non primus, metietur eum aliquis numerus, vel plures numeri (alias ſi nullus numerus ipſum A menſuraret, ſed tantummodo c vnitas, eſſet A numerus primus, quod non ponitur). Intelligatur d numerus B, qui ſit minimus omnium, metientium numerum A. Oſtendendum eſt B eſſe numerum primum. Si enim primus non eſt, metietur numerum B aliquis alius numerus, qui ſit C. Et quia C metitur ipſum B, & B numerum A, e metietur quoque C ipſum A; Eſt verò C minor, quàm B: Ergo minor numerus, quam B, metietur quoque ipſum A: Quare B non eſt minimus omnium, metientium A, quod

c def. 8. hu.

d ſch. pr. 2. huius.

e ax. 1. l. 3.

quod eſt falſum. Quare B à nullo numero menſurari poteſt;& ideo *f* B primus erit, quod erat oſtendendum. *f def 8. huius.*

COROLLARIVM I. *Eucl. 34. VII.*

Conſtat, quòd omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus numerus metitur.

COROLLARIVM II.

Manifeſtum eſt, quòd numerus, qui eſt minima menſura cuiuslibet numeri non primi: erit primus numerus.

PROPOS. V. THEOR. III. *Eucl. 25. 30. VII.*

Duorum primorum numerorum ſumma ad vnum eorum prima eſt. Et ſi ſumma ad vnum componentium prima fuerit, erunt duo illi numeri primi inter ſe. Et qui vnum primorum numerorum metitur ad reliquum primus eſt.

Sint numeri A, & B inter ſe primi. Dico A, cũ B eſſe primum ad A ſolum, vel ad B. Si enim A ſimul cum B, ad A non eſt primus, metiatur illos, ſi poſſibile eſt numerus C. Et quia C metitur totum A, B, atque ablatum A, *a* metietur quoque C reſiduum B: Quare A, & B non ſunt primi, cùm numerus C vtrunque metiatur, quod eſt contra hypotheſin. Vnde A B, & A primi inter ſe erunt. Eadem ratione A, B ad B, primus erit. *a ax 6. l. 1.*

A 17 B 20

C

Secundò ſit A ſimul cum B primus ad A, vel ad B. Dico A, & B primos eſſe inter ſe. Si enim hoc verum non eſt, ſit C communis menſura numerorum A, & B, ſi fieri poteſt: Quare *b* C metietur aggregatum ex A, B; Metitur quoque C ipſum A vel B; Igitur ſumma numerorum A, B, non *c* eſt prima ad numerum A, vel ad B, quod eſt contra hypotheſin. Quare A, & B primi inter ſe erunt. *b ax. 6. l. 1.* *c ax. 1. l. 3.*

A 20 B 23

C 4 D

Tertiò ſint A, & B primi inter ſe, & C metiatur ipſum A. Dico C, & B primos eſſe inter ſe. Si enim hoc verum non eſt, habeant C, & B communem menſuram numerum D. Et quia D metitur C, atq; C metitur numerũ A; Ergo *d* D metitur ipſum *d 1. r. 1. l. 3.*

 ſum

e pr. 1. huius ſum A, metiebatur autem numerum B: Igitur *e* A, & B non ſunt primi, cùm habeant communem menſuram numerum D, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo aliquis numerus D metitur ipſos C, & B; & ideo C, & B primi ſunt. Quod erat oſtendendum.

Eucl. 23. 24 21. VII.

PROPOS. VI. THEOR. IV.

Primi inter ſe numeri minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. Et duo minimi in data ratione primi ſunt inter ſe. At quilibet numeri minimi ęquè metiuntur numeros eandem cum eis rationem habentes.

Sint numeri A, & B primi inter ſe, & quilibet numeri C ad D ſint inter ſe, vt A ad B. Dico A, & B minores eſſe, quàm C & D. Quia A ipſius B partes eſt, cùm *a* vnitas, quę ſit E, eſſe poſſit eorũ cõmunis mẽſura, & C ad D eſt, vt A ad B: Ergo *b* C ipſius D eędẽ partes erit, quę A partes eſt ipſius B; & propterea reperiri poterit H, quæ toties metiatur D, quoties E ipſum B, atque H ſit eadem pars ipſius C, ac eſt E pars alterius A; ſed H vnitas eſſe nequit, cùm *c* C ipſi A, & D ipſi B æqualis non ponatur; neque H minor vnitate eſſe poteſt, cùm vnitas indiuidua ſit. Igitur H numerus erit maior vnitate E; eſtque *d* C ad A, & D ad B, vt pars H ad partem E: Igitur *e* C maior eſt, quàm A, & D, maior, quàm B, & ideo numeri primi A, B ſunt quoque minimi omnium eandem rationem habentium.

a pr. 1. huius. *b def. 8. l. 3.* *c pr. 1. l. 3.* *d pr. 11. l. 3* *e pr. 1. l. 3.*

A 12 B 17
E 1
C 36 D 51
H 3

Secundò ſint A, B minimi in ratione C ad D. Dico A, B primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt primi metietur eos cõmuni menſura numerus E; & quę pars eſt numerus E ipſius A, ita fiat vnitas O pars eadem numeri M, atque vt E ad B ita fiat O ad N: Quare *f* M ipſius N eędem partes erit, quæ A partes eſt ipſius B; eſtque *g* M minor A, & N minor B, eo quod vnitas O minor eſt numero E: Ergo M, & N minores ſunt ipſis A, B, quod eſt abſurdum: Supponebantur enim A, B minimi omnium eandem rationem habentium. Quare A, & B primi erunt.

f def. 6. l. 3. *g pr. 1. l. 3.*

M O 1 N
A 6 E B 5
C 18 D 15

Tertiò ſint A, & B minimi omnium eandem rationem habentium, quam C ad D, & A ad B. Dico A ipſum C, & B ipſum

ipſum D ęquè metiri. Quoniam A ad B eſt, vt C ad D: Ergo *h* permutando A ad C erit, vt B ad D. Quare *i* minor A ipſius C, & B ipſius D eadem pars, vel eędem partes erunt (cùm numeri commenſurabiles inter ſe ſint ſaltem ab vnitate); & ſi quidem partes credantur eſſe, *k* habebunt communes eaſdem menſuras, quæ intelligantur eſſe E, & H. Et quia *l* partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, erit E ad H, vt A ad B, & *m* minores ſunt E, H ipſorum A, & B, qui ſunt illorum ęquè multiplices, quod eſt abſurdum: Suppoſiti enim fuerunt A, & B minimi omnium, eandem rationem habentium, quam C ad D: Quare A, & B partes non erunt ipſorum C, & D; & propterea A ipſius C, & B alterius D eadem pars *n* erunt, & eas ęquè metientur. Quod erat oſtendendum.

A 4	B 3
E	H
C 20	D 15

h pr. 11. l. 3. *i def. 8. l. 3.* *k def. 6. l. 3.* *l pr. 11. l. 3.* *m def. 5. l. 3.* *n def. 4. l. 3.*

PROPOS. VII. THEOR. V.

Eucl. 17. 18. VII.

Si idem numerus in plures numeros multiplicetur, vel plures numeri in eundem numerum ducantur, erunt producti, vt multiplicati, vel vt multiplicantes.

Idem numerus A, multiplicans numeros B C, & F efficiat productos D, E, & H. Dico primò productos D, E, & H eandem rationem habere, quam multiplicati B, C, & F. Quoniam *a* vt vnitas X ad A, ita eſt B ad D (ſic enim D erit productum ex multiplicante A in multiplicatum B), & ſimiliter vt X ad A, ita eſt C ad E, atque vt eadem X ad eundem A, ita eſt F ad H: Quare *b* B ad D, & C ad E, atque F ad H eandem rationem habebunt, ſcilicet eam, quam habet vnitas X ad numerum A: Quare *c* permutando, vt B ad C, ita erit D ad E, atque, vt C ad F, ita erit E ad H.

		B 3	D 6
X 1	A 2	C 4	E 8
		F 6	H 12

a def. 9. huius. *b pr. 7. l. 3.* *c pr. 12. l. 3.*

Secundò tres numeri B, C, & F, multiplicantes numerum A efficiant productos numeros D, E, & H. Dico productos D, E, H eaſdem proportiones habere, quam habent numeri, multiplicantes B, C, F. Quoniam, *d* vt vnitas X eſt ad B, ita eſt A ad D (ſic enim D erit productum ex multiplicante B in A)

	B 3		D 6
X 1	C 4	A 2	E 8
	F 6		H 12

d def. 9. huius.

e pr.12.l.3. erit permutando, [e] vt X ad A, ita B ad D. Eadem ratione quia vt X ad C, ita erat A ad E: erit permutando, vt X ad A, ita C
f pr.7.l.3. ad E. Pari ratione vt X ad A, ita erit F ad H. Quare [f] B ad D, atque C ad E, nec non F ad H eandem rationem habebunt, nimirum eam, quam vnitas X habet ad numerum A. Et ideo
g pr.12.l.3 denuò [g] permutando B ad C erit, vt D ad E, atque C ad F erit, vt E ad H. Quæ erant oſtendenda.

Eucl.16. VII.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt, quòd idem numerus procreatur ex multiplicatione prioris numeri in ſecundum, atque ex multiplicatione ſecundi numeri in priorem: & numerus productus menſuratur à multiplicato & multiplicante numero.

h def.9. huius. Quoniam in prima parte huius propoſitionis, quando A, multiplicans B, efficit D, [h] eſt, vt vnitas X ad A, ita B ad D. At in ſecunda parte quando B multiplicat A, tunc vt X ad B, ita eſt A ad quartum numerum productum; eſtque permutan-
i pr.12.l.3. do, [i] vt vnitas X ad numerum A, ita B ad quartum numerum productum ex multiplicatione B in A. Igitur vt X ad A, ita eſt idem B ad D, & ad quartum numerum productum; ideoque
k pr.7.l.3. D [k] productus ex multiplicatione A in B æqualis eſt producto
l def.4.l.3. ex multiplicatione B in A. Inſuper [l] ſicuti vnitas X metitur B, ita A metitur D, & ſicut X metitur A, ita B metitur productum D.

Eucl.19. VII.

PROPOS. VIII. THEOR. VI.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, erit productum ex primo in quartum æquale producto ex ſecundo in tertium. Et ſi productum ex primo in quartum æquale fuerit producto ex ſecundo in tertium, erunt quatuor illi numeri proportionales.

Sit prior numerus A ad ſecundũ B in eadem ratione, in qua tertius C ad quartum D, atque ex multiplicatione D in A fiat R, & ex multiplicatione C in B fiat S.

R 40		H 50		S 40	
A 4				B 5	
D 10				C 8	
		X 1			

Dico numeros R, & S æquales eſſe in-
a def.9. huius. ter ſe. Ex [a] multiplicatione D in B fiat H. Et quia D, multiplicans A, & B, fa-
b pr.7.huius cit R, & H; Ergo [b] R ad H eſt, vt A ad B. Rurſus quia C, & D, multiplican-

tes

tes B. faciunt S, & H: Igitur [c] S ad H eſt, vt C ad D, ſeu [d] vt A ad B; Erat autem R ad H, vt A ad B: Ergo R ad H eſt, vt S ad eundem numerum H: & propterea [e] numeri R, & S ęquales ſunt inter ſe.

c pr. 7. huius
d pr. 7. l. 3.
e pr. 4. l. 3.

Secundò R productus ex priore A in quartum D, ęqualis ſit numero S, producto ex ſecundo B in tertium C. Dico A ad B eandem proportionem habere, quam C ad D. Fiat rurſus H ex D in B. Quoniam [f] ęquales R, & S ad eundem numerum H habent eandem rationem, eſtque [g], vt prius dictum eſt A, ad B, vt R ad H: Igitur A ad B eſt, vt S ad H; ſed vt S ad H, ita eſt C ad D. Igitur A ad B eſt, vt C ad D. Quod erat oſtendendum.

f pr. 3. l. 3.
g pr. 7. huius & pr. 7. l. 3.

PROPOS. IX. THEOR. VII.

Eucl. 20. VII.

Si tres numeri proportionales fuerint productum ex primo in tertium ęquale erit producto ex ſecundo in ſe ipſum. Et ſi numerus productus ex primo in tertium ęquale fuerit producto ex ſecundo in ſe ipſum: erunt tres illi numeri proportionales.

Sint primò tres numeri A, B, C proportionales, ſitque R productum ex C in A, & S ſit productum ex B in B. Dico R ęqualem eſſe numero S. Quoniam, vt prior numerus A ad ſecundum B, ita eſt idem numerus B (ſumptus, vt tertius) ad quartum C; ideo [a] R productum ex primo in quartum ęquale erit S producto ex ſecundo in tertium.

a pr. 8. huius.

Secundò ſit R numerus productus ex A in C, & S ſit productus ex B in B, ſiue in ſe ipſũ; ſintque R & S æquales inter ſe. Dico A ad B eandem rationẽ habere, quàm B ad C. Quoniam R productus ex A primo in C quartum ęqualis eſt S facto ex B ſecundo in B tertium. Ergo vt [b] A ad B, ita eſt B ad C. Quod erat oſtendendum.

R	36	H	108	S	36
A	2			B	6
C	18			B	6
		X			

b pr. 8. huius.

PROPOS. X. THEOR. VIII.

Eucl. 16. 17. IX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, non erit, vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium [illegible] Et ſi fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, quorum extremi primi fuerint

fuerint inter ſe; non erit, vt primus ad ſecundum, ita poſtremus ad alium.

Sint primi numeri inter ſe A, & B. Dico reperiri non poſſe alium numerum, ad quem B ſit, vt A ad B. Si enim hoc verũ non eſt, ſit vt A ad B, ita B ad numerum C. Et quoniam A & B primi ſunt, ęquè a metientur numeros B, & C eandem rationem habentes, nimirum A ipſum B, & B ipſum C: Cumque A ſe ipſum metiatur; Igitur A metitur quoque duos numeros A, & B primos inter ſe. Quod b eſt impoſſibile. Non igitur duobus numeris primis A, & B tertius numerus proportionalis reperiri poteſt.

a pr.6.huius

A 5 B 7 C

b pr.1.huius

Secundò ſint continuè proportionales numeri A, B, C, D, quorum extremi A, & D ſint inter ſe primi. Dico reperiri non poſſe numerum, ad quem D eandem proportionem habeat, quam A ad B. Si enim hoc verum non eſt, ſit D ad E, vt A ad B. Ergo c permutando vt A ad D, ita erit B ad E; ſuntque A, & D primi inter ſe; & propterea minimi in ſua proportione: Igitur d ęquè metitur A ipſum B, atque D ipſum E; ſed B metitur ipſum C, e eo quod A ad B eſt, vt B ad C: f Igitur A ipſum C metitur quoque.

c pr 12.l.3.
d pr.6.huius
e def 8. l 3.
f ax.1.l.3.

A 8 B 12 C 18 D 27 E

Rurſus C ad D ponitur, vt A ad B; Igitur g C ipſum D ſimiliter metietur, metiebatur autem prius A ipſum C: Igitur h numerus A extremum numerum D menſurabit; ſed numerus A ſe ipſum quoque menſurat: Igitur duo numeri extremi A, & D menſuram communem habent, nempe numerum A: & propterea i primi inter ſe non erunt, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo vt A ad B, ita erit D ad quemlibet alium numerum E. Quę erant oſtendenda.

g def.8.l.3.
h ax 1 l 3.
i pr.1.huius

Eucl.18.19. IX.

PROPOS. XI. PROBL. III.

Duobus, vel tribus numeris datis tertium, vel quartum proportionalem inuenire: oportet autem productum è ſecundo in ſe ipſum, vel è ſecundo in tertium mĕſurari à primo.

Sint primò duo dati numeri A & B, ſitque productum ex B in ſe ipſum numerus D, & prior numerus A metiatur numerum D, & vt A eſt ad eius multiplicem D, ita vnitas X fiat ad C.

ad C. Dico C eſſe tertium proportionalem duorum numerorum A & B. Quoniam [a] permutando vnitas X ad A, eſt vt C ad D; Ergo [b] idem numerus D procreatur ex multiplicatione prioris numeri A in tertium C, atque ex ſecundo B in ſe ipſum. Ergo [c] vt A ad B, ita erit B ad C.

X 1
A 4 B 6 C 9
D 36

[a] pr. 12. l. 3.
[b] def. 9. huius.
[c] pr. 9. huius.

Secundò ſint dati tres numeri A, B, E; ſitq; D productum ex B ſecundo in E tertium, & A ipſum D metiatur, & quoties prior numerus A metitur numerum D, toties vnitas X numerum C metiatur. Dico vt A ad B, ita eſſe E ad C. Quoniam [d] permutando vt vnitas X ad A, ita eſt C ad D: [e] Ergo idem numerus D gignitur ex multiplicatione prioris numeri A in quartum C, atque ex multiplicatione ſecundi B in tertium E; & ideo [f] vt A ad B, ita eſt E ad C. Quod verò determinatio ſit neceſſaria ſic oſtendetur. Ponatur A non metiri ipſum D, & ſi fieri poteſt C ſit tertius, vel quartus proportionalis. Erit igitur [g] productum ab extremis æquale producto ab intermedijs; eſtque D productum ab intermedijs: Igitur D producitur ex C in A; & propterea, [h] vt vnitas X ad numerum C, ita erit A ad D; Sed vnitas metitur numerum C: Igitur [i] A metitur ipſum D, quod eſt impoſſibile: Ponebatur enim A non menſurare numerum D. Quapropter patet propoſitum.

X 1
A 4 B 8 E 9 C 18
D 72

[d] pr. 12. l. 3.
[e] def. 8. huius.
[f] pr. 8 huius
[g] pr. 8. & 9. huius.
[h] def. 8. huius.
[i] def. 8. l. 3.

PROPOS. XII. THEOR. IX.

Eucl. 32. VII.

Si genitum numerum ex multiplicatione duorum numerorum metiatur aliquis primus numerus, vel qui ad vnum multiplicantium primus ſit, is etiam reliquum multiplicātium metietur.

Numerus B, multiplicans A faciat D, & numerus primus E, vel primus ipſi A metiatur D. Dico E metiri quoque B. Quia E ponitur metiri D, erit D multiplex ipſius E; Fiat ergo numerus H, tam multiplex vnitatis X, quam D eſt multiplex ipſius E: Vnde [a] numerus D procreatus erit ex multiplicatione prioris E in H quartum; ſed idem numerus D efficitur ex multiplicatione ſecundi

A 5 B 6
D 30
E 3 H 10
X 1

[a] def. 9. huius.

b pr 8 huius A in tertium B. Igitur [b] E ad A eandem proportionem habet, *c pr. 6. huius* quam B ad H; ſuntque A, & E numeri primi, & ideo [c] in ſua proportione minimi: Ergo æquè metientur numeros H, B, eandem rationem habentes, A quidem ipſum H, & E ipſum B; & propterea E ipſum B metietur. Quod erat propoſitum.

Eucl 26. 28. VII.

PROPOS. XIII. THEOR. X.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint, & ex illis genitus ad eundem primus erit. Et ſi duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrunque, primi fuerint, & qui ex eis gignuntur primi inter ſe erunt.

Sit vterque numerus A & B ad ipſum C primus, producaturque D ex A in B. Dico D ad C primum eſſe. Si enim hoc verum non eſt, ſit E communis menſura numerorum C, & D. Et quia C, & A primi ſunt, & E metitur C: Igitur [a] E ad A primus eſt, & metitur E ipſum D productum ex A in B; Ergo [b] E metitur reliquum multiplicantium B; metiebatur autem E ipſum C: Quare duo numeri B, & C habent communem menſuram E, quod eſt abſurdum: Erant enim C, & B primi inter ſe. Quare [c] numeri C, & D non erunt commenſurabiles, ſed primi, vt erat propoſitum.

a pr. 5. huius *b pr. 12 huius.* *c pr. 1. huius*

	D 15	
A 5		B 3
	E	
	C 8	

Secundò ſit tam numerus A, quàm B primus, tum ipſi C, cum numero D, atque ex A in B fiat E, nec non ex C in D fiat H. Dico E, & H primos inter ſe eſſe. Quoniam vterque A, & B primus eſt ad C: Ergo [d] E ex illis genitus ad C primus erit. Eadem ratione D ad E primus erit. Cùmque vterque C, & D ad E primus ſit: igitur [e] H ex illis genitus ad E primus erit. Quod erat probandum.

d par 1. huius pr. *e par 1 huius pr*

A 5		B 3
	E 15	
C 2		D 7
	H 14	

Eucl. 27. VII.

COROLLARIVM.

	D 25	
A 5		B 5
	C 8	

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; & numerus ex vno eorum in ſe genitus ad reliquum primus erit.

Nam ſi A æqualis eſt B, & A ad C primus

mus eſt, erit quoque B ad C primus; ideoque *f* D productus ex A in B, ſiue ex A in ſe, erit ad ipſum C primus. *f par. 1. huius pr.*

PROPOS. XIV. THEOR. XI. *Eucl. 31. IX.*

Si impar numerus ad aliquem numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit.

Impar numerus A primus ſit ad numerum B, huius autem duplus ſit C. Dico A ad C quoque primum eſſe. Fiat, vt B ad C, ita vnitas X ad binarium D, & quia binarius D minimè metitur imparem numerum A, (aliàs A compoſitus ex binarijs bifariam diuidi poſſet *a* & par eſſet): propterea D non poteſt eſſe menſura communis duorum numerorum A, & D; Neque ſimiliter numerus maior, quàm D menſura communis eſſe poteſt eorundem numerorum A & D, quia licet metiatur ipſum A, nihilominus numerus maior minorem D non metietur: Vnde *b* A, & D primi inter ſe erunt, cùm binarius A ab vnitate tantùm menſurabilis, ſit *c* numerus primus; erat autem ex hypotheſi B ad ipſum A primus: Igitur duo numeri D, & B ad ipſum A primi erunt. Ergo *d* productum ex D in B ad ipſum A, ſcilicet numerus C ad ipſum A primus erit. Quapropter duplũ ipſius B ad A primus erit. Quod erat, &c.

a def. 3. huius. *b pr. 4. huius.* *c def. 8. huius.* *d pr. 13. huius.*

	X 1
A 5	D 2
	B 7
	C 14

PROPOS. XV. THEOR. XII. *Eucl. 19. VII.*

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, eorum quęlibet poteſtates eiuſdem gradus, primę inter ſe erunt.

Sint numeri A, & B primi inter ſe, & ex A in ſe fiat poteſtas C, atque ex A in C fiat E, nec non ex A in E fiat G, & ſic vlterius; Similiter ex B in ſe fiat D, & ex B in D fiat F, atque ex D in F fiat H, &c. Dico poteſtates C, & D eiuſdem gradus, ideſt tertias proportionales ab vnitate, numeros primos inter ſe eſſe, atque E, & F quartos proportionales ab vnitate primos eſſe & ſic G, & H primos eſſe, &c. Quoniam A, & B ſunt primi inter ſe, erit *a* C factus ex A in *a cor. pr. 13. huius.*

X 1	
A 3	B 2
C 9	D 4
E 27	F 8
X 81	H 16

Yy ſe ad

ſe ad B primus; pariterque D factus ex B in ſe ad A primus erit. Similiter quia C, & B ſunt primi, erit D factus ex B in ſe ad C primus. Quapropter erit vterque A, C ad vtrunque B, D primus, & *b* propterea E factus ex A in C ad F factum ex B in D primus erit. Rurſus quia A, C primi ſunt ad B, erit *c* E ex eis genitus ad B primus, & eadẽ ratione F ad A primus erit. Quapropter vterque A, E ad vtrunque B, F primus erit, & ideo G ad H primus erit (factus ſcilicet ex anterioribus ad factum ex poſtremis) & ſic deinceps, ſi plures extiterint. Quod, &c.

b pr. 13. huius. *c prop. 13. huius.*

Eucl. 35. VII.

PROPOS. XVI. PROBL. IV.

Numeris datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem cum illis rationem habentium.

Sint quilibet numeri A, B, C. Debent reperiri numeri minimi in eiſdem rationibus. Et ſi quidem A, B, C primi fuerint, ipſimet *a* erunt minimi in continuatione ſuarum proportionum; ſi verò primi non fuerint, reperiatur *b* eorum maxima communis menſura D. Et quàm multiplex eſt A ipſius D, tam multiplex fiat numerus E vnitatis X, & vt B ad D, ita fiat F ad vnitatem X; atque vt C ad D, ita fiat G ad vnitatem X. Et quoniam A ad D eſt, vt E ad X, erit permutando *c* A ad E, vt D ad vnitatem X, & B ad F, vt D ad X, atque C ad G, vt D ad vnitatem X. Quare *d* proportionales erunt A ad E, B ad F, atque C ad G. Et permutando *e* vt A ad B, ita erit E ad F, & vt B ad C, ita erit F ad G. Dico iam E, F, G minimos eſſe omnium, eandem rationem habentium, quam A, B, & C. Si enim hoc verum non eſt, ſint alij numeri H, I, & K minimi in eiſdem rationibus, ſi fieri poteſt. Quare *f* æquè metientur numeros A, B, & C, eo quod ponuntur minimi. Fiat ergo vnitas X ad numerum L, vt eſt pars H ipſius A, vel vt I pars eſt ipſius B, aut K ipſius C. Et quoniam H ponitur minor, quàm E, habebit *g* eadem A ad H maiorem proportionem, quàm ad E; eſtque L ad X, vt A ad H: Ergo *h* L ad X maiorem rationem habet, quàm A ad E; ſed vt A ad E, ita eſt D ad X: Igitur *i* L ad X maiorem proportionem habet, quàm D ad eandẽ vnitatem X; & propterea

A	6	B	4	C	8
		D	2		
E	3	F	2	G	4
H		I		K	
		L			
		X	1		

a pr. 7 huius. *b pr. 3. huius.* *c pr. 12. l. 3* *d pr. 7 l. 3.* *e pr 12. lib. 3* *f pr. 6. huius* *g pr. 2. lib 3* *h pr 6 lib 3* *i pr. 6. lib. 3.*

pterea k L maior erit, quàm D; erat autem prius A ad H, vt L ad X. Ergo permutando l A ad L erit, vt H ad vnitatem X. Similiter oſtendetur B ad L, vt I ad X, atque C ad L, vt K ad vnitatem X. Vnde numerus L maior exiſtens, quàm D, pars erit; ideoque communis menſura numerorum A, B, C; quod eſt abſurdum. Factus enim fuit D maxima menſura communis numerorũ A, B, & C. Non ergo reperiri poterunt numeri minores, quàm E, F, G in rationibus A, B, C; & propterea E, F, G minimi erunt. Quod erat faciendum.

k pr. 5. lib. 3
l prop. 12. lib. 3

PROPOS. XVII. PROBL. V.

Eucl. 36. VII.

Duobus numeris datis, reperire numerum minimum, quem illi metiuntur.

Sint dati numeri A, & B. Reperiri debet numerus minimus omnium menſurabilium ab ipſis A, & B. Et primùm A, B ſint inter ſe primi. Ex multiplicatione A in B fiat numerus C. Et quia a vnitas X eſt ad A, vt B ad C, & vnitas X metitur numerum A. Igitur b B metitur numerum C. Cùmque permutando c ſit X ad B, vt A ad C: Ergo d A metitur C, ſicuti vnitas X metitur numerum B. Quare A, & B metiuntur C. Dico iam C eſſe minimum omnium menſurabilium ab A, & B. Si hoc verum non eſt, ſit D minor, quàm C menſurabilis ab eis, & vt D multiplex eſt ipſius A, ita fiat E multiplex vnitatis X. Quare e D fiet ex A ducto in E; metitur autem B ipſum D, & eſt B primus ad multiplicãtem A: Igitur f B metitur E. Poſtea quia, vt X ad E, ita erat A ad D: Ergo permutando g X ad A eſt, vt E ad D; ſed vt X ad A ita erat B ad C: Ergo h B ad C eſt, vt E ad D; metitur autem primus B ipſum E tertium: Ergo i ſecundus C metitur quartum D, maior minorem, quod eſt impoſſibile. Nullus ergo numerus minor, quàm C, menſurabitur à numeris A, & B.

X 1
A 4 B 5
C 20
D
E

a def. 9 huius.
b def. 8 lib. 3.
c pr 12 l. 3
d def. 8. l. 3.
e d.f. 8 huius.
f pr 12. huius.
g pr 12 l. 3.
h pr 3. lib. 3
i pr. 10. lib 3

Secundò ſint A, B non primi inter ſe, & reperiantur k C, D, minimi in data ratione A ad B, & ex multiplicatione A in D fiat numerus E. Patet E menſurari à numeris A, & D, ex quorum multiplicatione efficitur. Cùmque numeri A, B, C, & D ſint proportionales, idem l numerus efficietur ex primo A in quartum D, atque ex ſecundo B in tertium C; & ideo nume-

k pr. 16. huius.
l pr. 8. huius

tus E menſurabitur quoque à numero B. Dico iam E eſſe minimum omnium menſurabilium à numeris A, & B. Si enim hoc verum non eſt, ſit F minimus menſurabilium ab eis, ſitque F minor, quàm E. Et quoties A metitur F, toties vnitas metiatur numerum H; Vnde ex m multiplicatione numeri A in H efficietur numerus F. Similiter quæ pars eſt B numeri F fiat vnitas numeri G: Vnde idem numerus F efficietur ex multiplicatione prioris A in H quartum, atque ex multiplicatione ſecundi B in tertium G: Quare n vt A ad B, ſeu vt C ad D, ita erit G ad H. Cùmque C, & D ſint minimi in ſua proportione: Ergo o metientur numeros G, H eiuſdem rationis; ideoque D metitur H. Sed p vt vnitas ad A, ita eſt D ad E, & vt eadem vnitas ad eandem A, ita eſt H ad F: Ergo q vt D ad E, ita eſt H ad F; & permutando r D ad H erit, vt E ad F; Metiebatur autem D ipſum H: Ergo ſ E metitur F, maior minorem, quod eſt impoſſibile. Non ergo minor numerus, quàm E, menſurabitur ab A, & B; & propterea E minimus eſt omnium menſurabilium ab eis. Quod erat, &c.

X 1	
A 4	B 6
C 2	D 3
E 12	
F	
G	H

m def. 9. huius.
n pr. 8 huius.
o pr. 6 huius
p def. 9. huius.
q pr. 7 lib. 3
r pr. 12 lib 3
ſ def. 8. lib. 3

Eucl. 37. VII.

PROPOS. XVIII. THEOR. XIII.

Si duo numeri quempiam numerum metiantur, etiam minimus ab illis menſuratus eundem metietur.

Duo numeri A, & B metiantur numerum C; & D ſit minimus numerus menſuratus ab A, & B. Dico D menſurare numerum C. Si enim hoc verũ non eſt, ſubtracto D ex C, quoties poteſt, relinquat numerum F minorem, quàm D, ſitque pars ſubtracta E. Et quia tam A, quàm B metiuntur D, atque D metitur ipſum E: Ergo a tam A, quàm B metiuntur ablatum numerum E; ſed ex hypotheſi A, & B metiuntur totum numerum C: Igitur b tam A, quàm B metiuntur reſiduum numerum F minorem minimo D, menſurato ab A, & B, quod eſt impoſſibile. Non ergo reſiduus F eſſe poteſt minor, quàm D; & propterea D metietur numerum C, vt fuit propoſitum.

A 2	B 3	
	C 18	D 6
E 12	F	

a ax. 1. l. 3.
b ax. 6. l. 1.

PRO-

PROPOS. XIX. PROBL. VI.

Eucl. 38. VII.

Datis pluribus, quàm duobus numeris, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

Sint quotcunque numeri A, B, C, & D. Reperiri debet minimus numerus, quem illi metiuntur. Inueniatur a numerus E minimus omnium menſurabilium à duobus A, & B; poſtea reperiatur numerus F minimus omnium, quem E, & C metiuntur. Et quoniam A, & B metiuntur E, & E metitur F: Ergo b nedùm C, ſed etiam A, & B metientur numerum F. Dico iam F eſſe minimum omnium, quos A, B, & C metiri poſſunt. Si enim hoc verum non eſt, ſit G minor, quàm F minimus menſurabilium ab eiſdem A, B, C. Et quoniam A, & B ipſum G metiri conceduntur, eſtque E minimus omnium menſurabilium à duobus A, & B: Ergo c E metietur ipſum G; Vnde duo numeri E, & C metientur numerum G; eſtque F minimus omnium, quos E, & C metiri poſſunt: Igitur d F metietur numerum G, maior minorem, quod eſt abſurdum: Nullus ergo numerus minor, quàm F, menſurari poterit à tribus numeris A, B, & C. Et propterea ipſe numerus F minimus erit menſurabilium ab eiſdem A, B, & C. Poſtea reperiatur numerus H minimus omnium, quos F, & D metiuntur: erit, vt prius, H minimus omnium, quos A, B, C, & D menſurare poſſunt, & ſic vlterius. Et hoc erat faciendum.

A 3 B 4 C 6 D 8
E 12 F 12 H 24
G

a prop. 17. huius.
b ax. 1. lib. 3.
c prop. 18. huius.
d prop. 18. huius.

PROPOS. XX. THEOR. XIV.

Eucl. 14. IX.

Si primi numeri metiantur minimum omnium, quos menſurare poſſunt, nullus alius numerus primus illum metietur.

Sit numerus A minimus, quem metiuntur primi numeri B, C, & D. Dico nullum alium primum numerum pręter B, C, D metiri eundem A. Si enim hoc verum non eſt, alius primus numerus E pręter illos metietur numerum A, & quoties E metitur A, toties vnitas metiatur numerum F: Quare a ex multiplicatione E in F fiet A: b Igitur

A 30
B 2 C 3 D 5
E F

a def. 9. huius.
b prop. 12. huius.

ſinguli

ſinguli B, C, D, qui primi ſunt ad E (cùm omnes primi ſupponantur) metientur F alterum multiplicantium, eſtque F minor, quàm A multiplicatus: Ergo B, C, D metiuntur minorẽ numerum, quàm minimum A menſurabilium, quod eſt abſurdum. Nullus ergo primus numerus præter A, B, C metietur numerum A. quod erat oſtendendum.

Eucl. 20. IX.

PROPOS. XXI. PROBL. VII.

Quotcunque numeros reperire, quorum quilibet primus ſit.

Sumatur quilibet numerus primus A, cui addita vnitate fiat numerus B. Iam ſi B eſt numerus primus, erunt ambo numeri A, & B primi; ſi verò B non eſt primus numerus, repe-
a ſcb pr. 2. huius. riatur a eius minima menſura, quæ ſit C, eritque numerus C primus. Dico iam C diuerſum eſſe à numero A. Nam ſi idem eſſet, cùm C metiatur totũ B, & ablatum A, metietur b quo-
b ax 6. lib. 1 que ipſe numerus C reſiduam vnitatem, quod eſt impoſſibile. Igitur numerus primus C non eſt idem ac primus numerus A.

c prop 17. huius. Poſtea c reperiatur numerus D, quem A, & C metiantur, & ipſi D addita vnitate fiat numerus E. Iam ſi E eſt primus numerus, erunt tres inuenti numeri A, C, & E primi. Si verò E
d ſcb. pr 2. huius. nõ eſt primus, reperiatur d minima eius menſura F, eritque F numerus primus. Dico pariter F diuerſũ eſſe à numeris A, & C. Nam ſi eſſet æqualis vni eorum, vt ipſi A, cùm F, ſiue A metiatur totum numerum E, & ablatum D, e metietur quoque idem numerus F
e ax. 6. lib. 1. reſiduam vnitatem, quod eſt impoſſibile. Igitur numerus primus F non erit æqualis numero primo A, & eadem ratione nec erit æqualis numero primo C. Non aliter inueniri poteſt quartus, & alij infiniti numeri primi. Quod erat faciendum.

A 7
B 8 C 2
D 14
E 15 F 2

Eucl. 41. VII.

PROPOS. XXII. PROBL. VIII.

Numerum reperire, quis ſit minimus habens datas partes.

Sint quælibet datæ partes, ſemiſſis, tertia, & quarta. Debet reperiri omniũ minimus numerus, qui habeat datas partes. Eadem vnitas X fiat ſemiſſis numeri A, tertia pars numeri B; &

quarta

quarta pars numeri C, & ſic vlterius, ſi plures partes extiterint; Poſtea a reperiatur minimus numerus D omnium, quos A, B, & C menſurare poſſunt, & quoties A metitur D, toties vnitas X metiatur numerum F, atque quoties B, & C metiuntur D, toties vnitas X metietur numeros G, & H. Et quoniã vt X ad F, ita eſt A ad D, erit b permutando X ad A, vt F ad D; Eadem ratione X ad B erit, vt G ad D, atque X ad C erit, vt H ad D: Quare c quę pars eſt vnitas X ſingulorum numerorum A, B, & C eadem pars erunt ſinguli numeri F, G, & H eiuſdem numeri D; ſed vnitas X ſemiſſis eſt ipſius A, & pars tertia numeri B, atque pars quarta numeri C: Igitur numerus F ſemiſſis eſt numeri D, & G tertia, atque H quarta pars eiuſdem numeri D; & propterea numerus D habebit datas partes. Dico iam numerum D eſſe minimum omnium, habentium datas partes. Si enim hoc verum non eſt, ſit numerus M minor, quàm D, habens datas partes, ſitque numerus N ſemiſſis ipſius M, O ſit tertia pars, atque P quarta eiuſdem numeri M; erat autem vnitas X numeri A ſemiſſis, & ipſius B tertia, atque ipſius C quarta pars: Ergo vt X ad A, ita erit N ad M, & d permutando X ad N, erit, vt A ad M; Pari ratione X ad O erit, vt B ad M, atque X ad P erit, vt C ad M; ſed vnitas X pars eſt, & metitur ſingulos numeros N, O, & P: Igitur numeri A, B, & C metiuntur numerum M minorem, quàm D minimum omniũ, quos A, B, C menſurare poſſunt, quod eſt impoſſibile. Non ergo numerus minor, quàm D habere poteſt datas partes; ideoque ipſe numerus D eſt minimus datas partes habens. Vt quęrebatur.

		X 1	
$\frac{1}{2}$	A 2	F 6	N
$\frac{1}{3}$	B 3	G 4	O
$\frac{1}{4}$	C 4	H 3	P
		D 12	
		M	

a pr. 19 huius.

b pr. 12 lib. 3

c def. 8. lib. 3.

d pr. 12 lib 3.

COROLLARIVM I.

Eucl. 39. VII.

Patet, quòd ſi numerus numerum metiatur, dimenſus partem habebit à metiente denominatam.

Nam quia numerus A metiebatur numerum D, oſtenſum eſt D habere partem F denominatã ab A; ideſt talis pars fiet F ipſius D, videlicet ſemiſſis, quę pars eſt vnitas ipſius A, à quo numerus dictus denominatur.

CO-

Eucl. 40. VII.

COROLLARIVM II.

Et ſi numerus partem habuerit quamlibet, metietur illum numerus à parte denominatus.

Nam in poſtrema parte huius propoſitionis dictum eſt numerum M habere tertiam partem, & oſtenſum eſt M metiri à numero O toties, quoties vnitas ternarium B metitur.

Eucl. 1. VIII.

PROPOS. XXIII. THEOR. XV.

Si quorũcunque numerorum continuè proportionalium extremi primi inter ſe fuerint, omnes illi erunt minimi omniũ eandem rationem habentium.

Sint quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, quorum extremi A, & D ſint primi inter ſe. Dico numeros A, B, C, D minimos eſſe omnium, cum eis eandem proportionẽ habentium. Si enim hoc verum non eſt, ſint alij numeri E, F, G, H, minores illis in eadem proportione continua. Quoniam quot

A 8	B 12	C 16	D 27
E	F	G	H

ſunt numeri A, B, C, D, tot ſunt alij ſecundi ordinis E, F, G, H, qui bini ſumuntur in eadem ratione: Ergo [a] ex compoſitione ordinata, vt A ad D, ita erit E ad H, & [b] ſunt A, & D minimi in ſua proportione, quandoquidem primi inter ſe ſupponuntur: Igitur tam A numerum E, quam D ipſum H ęquè metitur, maiores quidem minores, quod eſt impoſſibile: Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D reperiri poſſunt, qui eandem proportionem habeant cum eis. Quod, &c.

a pr. 19. lib. 5. b pr. 6. huius.

Eucl. 2. VIII

PROPOS. XXIV. PROBL. IX.

Quotcunque numeros reperire continuè proportionales minimos in data ratione.

Sint minimi numeri datę rationis A, B. Inueniendi primò ſint tres numeri minimi in continua proportione data A ad B. Ex [a] multiplicatione A in ſe fiat C, & ex A in B fiat D, atque ex B ducto in ſe ipſum fiat E. Et quia A multiplicans duos numeros A, & B efficit numeros C, & D, erit, [b] vt A ad B, ita C ad D.

a def. 9. huius. b pr. 7. huius.

ad D. Rurſus quia A, & B, multiplicantes ipſam B producunt duos numeros D, & E, erit [c] D ad E, vt A ad B. Quare [d] C, D, E continuè proportionales ſunt in ratione A ad B. Dico iam C, D, E minimos eſſe in ratione A ad B. Quoniam A, & B primi [e] numeri inter ſe (cùm ſint minimi datæ rationis) in ſe ducti efficiunt extremos numeros C, & E: erunt [f] ipſi C, & E inter ſe primi. Quare [g] continuè proportionales C, D, & E minimi ſunt in proportione A ad B.

X 1
A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27

c pr. 7. huius.
d pr. 7. lib. 3
e pr. 6 huius
f pr. 15. huius.
g prop 23. huius.

Secundò vt vnitas X ad numerum A, ita fiant tres numeri C, D, E ad numeros F, G, H. Quare, vt prius, erunt [h] numeri F, G, H continuè proportionales in ratione A ad B, veluti ſunt numeri C, D, E. Deinde fiat, vt vnitas X ad numerum B, ita E, ad numerum K. Vnde [i] permutando erit X ad E, vt B ad K; ſed vt X ad A, ita erat E ad H, erit permutando pariter vt X ad E, ita A ad numerum H: Igitur [k] H ad K eſt, vt A ad B; ideoque quatuor [l] numeri F, G, H, K continuè proportionales ſunt in ratione A ad B. Oſtendendum modò eſt numeros F, G, H, & K minimos eſſe in continua proportione data A ad B. Quoniam A, & B primi [m] inter ſe ſunt, cùm ſint minimi in ſua proportione, ſintque, F, & K geniti eiuſdem gradus ab ipſis A, & B: erunt [n] extremi F, & K inter ſe quoque primi; & propterea [o] F, G, H, K minimi erunt in ſua proportione, ſcilicet A ad B; & ſic procedendum eſt, ſi plures numeri, quàm quatuor, quærantur. Et hoc erat faciendum.

h pr. 7 huius, & prop. 7 lib. 3.
i pr. 12. lib. 3.
k pr. 7. huius.
l pr. 7. lib. 3.
m prop. 6. huius.
n pr. 15 huius.
o pr. 23. huius.

PROPOS. XXV. THEOR. XVI.

Eucl. 3. VIII.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales minimi omnium, eandem cum eis rationem habentium, illorum extremi primi inter ſe erunt.

Sint numeri A, B, C, D minimi continuè proportionales. Dico extremos A, & D inter ſe primos eſſe. Inueniãtur [a] duo numeri E, F minimi in ratione A ad B, vel B ad C, &c. Deinde, vt in præcedenti factum eſt, reperiantur tot minimi numeri K, L, M, N in ratione E ad F, quot ſunt dati A, B, C, D. Patet [b] eſſe K, & N extremos, primos inter ſe; & ideo erunt continuè proportionales K, L, M, N, minimi in ratione E

a pr. 16. huius.
b prop. 15 huius.

A 8 B 12 C 18 D 27
E 2 F 3.
K 8 L 12 M 18 N 27

ad F; erant autem A, B, C, D, minimi in ratione E ad F: Igitur ſinguli ſingulis ęquales erunt (aliàs minores minimis reperirentur in eadem proportione), nimirum A ęqualis erit ipſi K, & D ipſi N; oſtenſi autem fuerunt K, & N inter ſe primi. Ergo *c* A, & D inter ſe quoque primi erunt. Quod erat oſtendendum.

c pr. 1 huius.

Xuel 4. VIII.

PROPOS. XXVI. PROBL. X.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primò datę duę rationes A ad B, & C ad D in minimis numeris. Debent reperiri tres numeri deinceps proportionales minimi in datis proportionibus. Reperiatur *a* numerus E minimus omnium menſurabilium ab ipſis B, & C, & quàm multiplex eſt E ipſius B, fiat F, tam multiplex alterius A. Similiter D alterius G fiat eadem pars, ac eſt C ipſius E. Et quoniam *b* A ad F eſt, vt B ad E, erit permutando, *c* vt A ad B, ita F ad E. Pari ratione quia, vt C ad E ita eſt D ad G, permutando vt C ad D, ita erit E ad G; & propterea tres numeri F, E, G deinceps proportionales erunt in datis rationibus A ad B, & C ad D. Dico iam numeros F, E, G minimos eſſe in datis rationibus. Si enim hoc verum non eſt: erunt aliqui alij illis minores ſinguli ſingulis in eiſdem rationibus. Ponantur eſſe I K, & L. Iam quia A, & B minimi ſunt in ſua proportione ipſi *d* metientur ęquè numeros I, & K, eandem proportionem habentes, nimirum B ipſum K. Eadem ratione cùm C, & D ſint minimi in ſua proportione, ſeu in ea, quam habet K ad L: Igitur antecedens C antecedentem K metietur. Cùmque B, & C eundem K metiantur, menſurabit *e* quoque eundem K numerus E, qui minimus erat omnium menſurabilium ab ipſis B, & C, quod eſt abſurdum: Eſt enim K minor, quàm E: Non ergo reperiri poſſunt numeri alij minores ipſis F, E, G deinceps proportionales in datis rationibus; & propterea ipſimet minimi ſunt in datis rationibus.

A 2 B 3 C 4 D 5
F 8 E 12 G 15
I K L

a pr. 37. huius.
b def. 8. lib. 3.
c pr. 12. lib. 3.
d pr. 6. huius
e prop. 18. huius.

Sint ſecundò datę tres rationes A ad B, C ad D, & E ad F in mini-

minimis numeris. Inueniri debent quatuor numeri deinceps proportionales minimi in datis rationibus. Inueniantur, vt prius, tres numeri G, H, & I deinceps proportionales minimi in datis duabus rationibus A ad B, & C ad D, & *f* inueniatur numerus K minimus omnium, quos menſurare poſſunt numeri I, & E; & quoties I metitur ipſum K, toties G numerum L, atque H numerum M metiatur, & quoties E metitur K, toties F ipſum N metiatur. Et quoniam numeri G, H, I ipſos L, M, K æquè metiuntur: erunt *g* L, M, K deinceps proportionales in datis rationibus, vt ſunt G, H, I. Similiter, vt E ad F, ita erit tandem K ad N, eo quod E, F æquè metiuntur ipſos K, & N: Vnde L, M, K, N deinceps proportionales erũt in datis rationibus A ad B, & C ad D, atque E ad F. Dico iam numeros L, M, K, N minimos eſſe in eiſdẽ rationibus. Si enim hoc verum non eſt, ſint alij numeri O, P, Q, R deinceps proportionales minimi, in datis rationibus, minores illis. Et quoniam A, B minimi ſunt in ſua proportione, ipſi *h* metientur æquè O, & P eandem rationem habentes. Quare B ipſũ P metietur. Eadem ratione C metietur eundem P. Cùm que B, & C metiantur numerum P, menſurabit *i* quoque H minimus, quem *k* illi metiuntur, eundem numerum P. Cùmque *l* H ad I ſit, vt P ad Q; permutando *m* erit I eadem pars ipſius Q, quæ H ipſius P. Cùmque E, & F minimi ſint in proportione Q ad R, metietur *n* quoque E eundem Q. Quapropter duo numeri I, & E metiuntur numerum Q: & ideo *o* eundem Q metietur maior numerus K, qui minimus factus fuit omnium menſurabilium ab ipſis I, & E, quod eſt impoſſibile: Non ergo alij numeri minores ipſis L, M, K, N, ſed ipſimet, minimi erunt deinceps proportionales in datis rationibus. Eodem modo procedendum eſt vlterius, ſi plures, quàm tres fuerint datæ proportiones. Et hoc erat faciendnm.

A 2	B 3,	C 4	D 5,	E 6	F 5
	G 8	H 12	I 15		
L 16	M 24	K 30	N 25		
O	P	Q	R		

f prop. 17. huius.
g pr. 11. & pr. 7. lib. 3.
h pr. 6. huius.
i pr. 18. huius.
k por. 1. huius.
l pr. 7. lib. 3.
m prop. 12. lib. 3.
n pr. 6. huius.
o prop. 18. huius.

PROPOS. XXVII. THEOR. XVII.

Eucl. 7. VIII.

Si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & primus poſtremi multiplex, aut pars fuerit: erit ille multiplex, vel pars quoque ſecundi.

Sint continuè proportionales numeri A, B, C, D, & A ipſius D multiplex, aut pars ſit, veluti vnitas H pars eſt ipſius K, vel contrà. Dico A ipſius B partem quoque, aut multiplicem eſſe. Si enim A neque multiplex, neque pars conceditur numeri B: erit ſaltem *a* A partes ipſius B (cùm numeri ſint commenſurabiles ſaltem ab vnitate). Ponaturque E, ſi fieri poteſt, communis menſura numerorũ A, & B, & erit E minor, quàm A, & B, aliàs ſi vni eorum ęqualis eſſet, A ipſius B multiplex, aut pars eſſet, quod non ponitur. Et quia B ad C, atque C ad D eſt, vt A ad B; ponitur verò A ipſius B partes: Igitur *b* B ipſius C, atque C alterius D eædem partes erunt, atque A partes eſt ipſius B. Sintque F, & M ipſarum B, C, & D communes menſurę eędem, quę eſt E ipſorum numerorum A, & B. Et quoniam A ipſius E, atque B ipſius F ęquè multiplices ſunt, erit *c* E ad F, vt A ad B, ſeu vt B ad C. Pari ratione erit F ad M, vt B ad C, atque C ad D; eſtque B ipſius C partes: Igitur *d* E ipſius F, nec non F alterius M eędem partes erunt; & propterea habebunt eaſdem communes menſuras, quę ſint G, & N. Et, vt prius, oſtendetur G ipſius N partes, ſicuti E partes erat alterius F: Vnde *e* G, & N habebunt communem aliquam menſuram, ſit illa O. Cùm igitur O metiatur numerum G; G verò ipſum E menſurat, atque E metitur numerum A: Igitur *f* O metitur numerum poſtremum A. Eadem ratione quia O metitur numerum N, N verò ipſum M, atque M ipſum D, metietur quoque O poſtremum D; cùmque numeri A, & D habeant O communem menſuram (quę minor erit tam ipſius A, quàm D, vt in principio huius propoſitionis oſtenſum eſt) erit A ipſius D partes: Facta autem fuit H ad K, vt A ad D: Igitur H ipſius K partes erit, vnitas numeri, vel numerus vnitatis, quod eſt impoſſibile. Non igitur A ipſius B partes erit; ſed aut multiplex, aut pars neceſſariò. Quod erat oſtendendum.

A 8 B 16 C 32 D 64
E F M
G N
O
H 1 K 8

a def. 3. lib. 3
b def. 8. lib. 3
c prop. 11. lib. 3.
d def. 8. lib. 3.
e def. 6. lib. 3
f ax. 1. lib. 3

Eucl. 6. VIII.

COROLLARIVM.

Colligitur ex hac propoſitione, quòd, ſi quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & prior neque multiplex,

plex, neque pars ſit ſecundi, neque alius quiſpiam eiuſdem ordinis multiplex, aut pars erit poſtremi.

Nam in demonſtratione huius propoſitionis poſitus fuit numerus A ipſius B partes tantummodo, & hinc deduximus A ipſius C, vel A ipſius D, aut B alterius D partes eſſe; & propterea inter ſe nequeunt habere candē proportionem, quam vnitas H ad numerum k; vel contrà rationem, quam habet numerus H ad vnitatem K. Si enim A verbi gratia ad D eandem rationem haberet, quam vnitas H ad numerum K, non eſſet A ipſius D partes. Vnde patet propoſitum.

PROPOS. XXVIII. THEOR. XVIII.

Eucl. 8. VIII.

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri, quot inter eos medij cadunt, tot inter alios eandem cum illis rationem habentes, medij continua proportione cadent.

Inter duos numeros A, & B cadant medij proportionales continuè numeri C, D, ſitque, vt A ad B, ita E ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales reperiri poſſe inter E, & F, quot inter A, & B. Sumantur a totidem numeri G, H, I, k minimi in ratione A ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B: erit b ex compoſitione ordinata, vt A ad B, ſiue vt E ad F, ita G ad k. Cùmque c G, & k ſint inter ſe primi, eo quod ſunt extremi minimorum numerorum: d erunt ipſimet in ſua proportione minimi; & ideo e æquè metietur G ipſum E, atque k ipſum F. Fiant ergo L ipſius H, atque M ipſius I tam multiplices, quàm eſt E ipſius G, vel F multiplex ipſius k: Igitur permutando f vt G ad H, ſiue vt A ad C, ita erit E ad L, atque vt H ad I, ſiue C ad D, ita erit L ad M; pariterque vt I ad k, ſiue vt D ad B, ita erit M ad F: Quare E, L, M, F continuè proportionales ſunt, & eius multitudo æqualis eſt multitudini A, C, D, B. Ergo tot medij continuè proportionales cadent inter E, & F, quot inter A, & B. Quod erat demonſtrandum.

A 24	C 36	D 54	B 81
E 32	L 48	M 72	F 108
G 8	H 12	I 18	K 27

a pr. 24. huius.
b pr. 19. lib. 3.
c pr. 25. huius.
d pr. 6. huius.
e pr. 6. huius.
f pr. 12. & 7. lib. 3.

PRO-

Eucl. 9. VIII.

PROPOS. XXIX. THEOR. XIX.

Si duo numeri fuerint inter ſe primi, quot inter eos medij cō-tinua proportione cadunt, tot inter vtrunque eorum, & vnitatem medii continua proportione cadent.

Inter primos numeros A, & B cadant C, D medij in continua proportione, ſitque X vnitas. Dico tā inter X, & A, quàm inter X, & B cadere tot numeros medios proportionales in continua ratione, quot inter A, & B cadunt. Inueniantur *a* duo numeri E, F minimi in ratione A ad C, & *b* ſumantur in eadem proportione tres numeri G, H, I, deinde quatuor K, L, M, N, quouſque multitudo poſtremorum numerorum ęqualis ſit multitudini A, C, D, B. Quoniam A, B extremi inter ſe ſunt primi, erunt *c* A, C, D, B, minimi in proportione E ad F; ſed totidem ſunt K, L, M, N facti in eadem proportione minimi: Ergo ſinguli K, L, M, N, ęquales ſunt ſingulis A, C, D, B, ſcilicet K ipſi A, & N ęqualis ipſi B; cùm minores minimis dari non poſſint. Et quia, vnitas X ad E (vt in coſtructione 25. huius dictum eſt) eſt vt E ad G, & ita G ad K; erunt X, E, G, K continuè proportionales. Simili ratione X, F, I, N continuè proportionales erunt; eſtque tam multitudo X, E, G, K, quàm X, F, I, N, ęqualis multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, vt conſtat ex 25. prop. huius. Igitur tot cadent medij continuè proportionales inter vnitatem X, & numerum K, ſeu ei ęqualem A, & inter vnitatem X, & numerum N, ſiue ſibi ęqualem B, quot inter numeros A, & B cadunt. Et hoc erat oſtendendum.

A 8 C 12 D 18 B 27
K 8 L 12 M 18 N 12
G 4 H 6 I 9
E 2 F 3
X 1

a pr. 16. huius.
b prop. 24. huius.
c pr. 23. huius.

Eucl. 10. VIII.

PROPOS. XXX. THEOR. XX.

Si ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium fuerint, & multitudine ęqualium, quot inter vtrunque extremum, & vnitatem medij continua proportione cadunt, tot inter extremos medij continua proportione cadent in ratione, quam habent numeri vnitati proximi.

Inter

Inter vnitatem X, & numerum A cadant medij proportionales C, D atque inter X, & B totidem medij ſint proportionales E, F. Dico inter A, & B tot medios numeros proportionales cadere in eadem ratione C ad E, quot inter A, & X. Vt vnitas X ad C, ita fiat E ad G; & G ad H, atque F ad L. Quoniam vt X ad C, ita ſupponitur eſſe C ad D, eſtque E ad G, vt X ad C: Igitur a C ad D eſt, vt E ad G. Et permutando b vt C ad E, ita eſt D ad G. Rurſus quoniam X ad C, eſt vt E ad G, erit permutando, vt X ad E, ita C ad G; atque vt X ad E ita ponitur E ad F: Ergo c C ad G eſt, vt E ad F: Et rurſus d permutando vt C ad E, ita eſt G ad F: Quare tres numeri D, G, F continuè proportionales ſunt in ratione C ad E, & ſunt totidem quot ſunt X, C, D. Deinde quoniam, vt X ad C, ita ex hypotheſi eſt D ad A, & vt eadem vnitas X ad eundem numerum C, ita erat ex conſtructione G ad H, atque F ad L: Igitur e veluti D, G, F proportionales ſunt continuè, ita erũt A, H, & L. Tandem quia erat vt X ad C, ita F ad L; f Ergo permutando X ad F erit, vt C ad L. Rurſus quia, vt X ad E, ita erat F ad B; erit permutando X ad F, vt E ad B; & propterea g vt C ad E, ita erit L ad B: Quare numeri A, H, L & B cõtinuè proportionales ſunt in ratione C ad E; & eorum multitudo ęqualis eſt multitudini X, C, D, A; & ſic vlterius ſi plures fuerint. Quare inter A, & B tot medij proportionales cadũt H, & L, quot sũt C, & D inter X, & A; ſiue E, & F inter X, & B. Quod erat oſtendendum.

a pr. 7. lib. 3. b pr. 12. lib. 3. c pr. 7. lib. 3. d pr. 12. lib. 3. e def. 9. & pr. 7. huius. f pr. 12. lib. 3. g def. 9. & pr. 7. huius.

A 27	H 36	L 48	B 64
	D 9	G 12	F 16
	C 3	E 4	
		X 1	

PROPOS. XXXI. THEOR. XXI.

Eucl. 5. VIII.

Plani numeri rationem habent compoſitam ex duabus rationibus laterum. Et ſolidi numeri rationem habent compoſitam ex tribus rationibus laterum, & antecedentia ſunt eiuſdem plani, aut ſolidi latera.

Sit numerus A planus, genitus ex D ducta in C, ideſt ſit vnitas X ad D, vt C ad A, atque numerus B genitus ex ductu H in E. Dico rationem plani A ad planum B compoſitã eſſe ex rationibus C ad E, & D ad H. Sic enim antecedentia erunt latera eiuſdem plani. Fiat E ad G, vt eſt vnitas X ad D. Et quia eadem D ducta in C, & E gignit numeros A, & G:

A 6	G 12	B 20
C 2		E 4
D 3		H 5
	X 1	

a pr 7 huius. & G: erit a A ad G, vt C ad E. Rurſus quia D, & H ductæ in eãdem E efficiunt G, & B: erit b G ad B, vt D ad H. Habet c verò A ad B proportionem compoſitam ex ratione A ad G, ſeu C ad E, & ex ratione G ad B, ſeu D ad H. Igitur proportio A ad B componitur ex ratione lateris C ad latus E, & ex ratione lateris D ad latus H.

b pr 7 huius
c pr 19. & 7.lib.3.

Secundò ſit A numerus genitus ex ductu trium laterum C, D, & E, ita vt ex C in D fiat M, atque ex ductu E in M fiat A; ſitq; pariter B factus ex ductu triũ laterũ F, G, & H, ita vt ſit X ad G, vt F ad O; atque vt X ad H, ita fiat O ad B. Dico rationem A ad B compoſitam eſſe è tribus rationibus laterum C ad F, & D ad G, atque E ad H. Fiat d N ex D in F, & ex ductu E in N fiat R, pariterque ex ductu E in O fiat S; erit e M ad N, vt C ad F, & N ad O erit, vt D ad G; eſtque f A ad R, vt M ad N, cùm ex ductu E in M, & N fiant A, & R; igitur g A ad R eſt, vt C ad F; Pari ratione R ad S erit, vt N ad O, ſiue vt D ad G. Tandem quia duę E, & H ductę in eãdem O efficiunt S, & B: erit h S ad B, vt latus E ad H. Cùmque i proportio A ad B componatur ex rationibus A ad R, R ad S, atque S ad B: erit quoque proportio A ad B compoſita ex rationibus C ad F, D ad G, & E ad H, & ſic vlterius ſi plura fuerint latera, producentia numeros A, & B. Quod erat oſtendendum.

d def 9. huius.
e par.1. huius pr.
f pr.7.huius
g pr.7.lib.3
h pr.7 huius
i pr.19 lib.3

A 48	R 96	S 160	B 140	
	M 6	N 12	O 20	
C 2			F 4	
D 3			G 5	
E 8			H 7	
		X 1		

Eucl 11.12. VIII.

PROPOS. XXXII. THEOR. XXII.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit, atque inter duos cubos duo numeri medij proportionales intercedunt in continua proportione laterum.

Sit primò quadratus numerus A genitus ex multiplicatione lateris C in ſe ipſum, atque quadratus numerus B ſit genitus ex multiplicatione lateris D in D. Dico inter numeros A, & B cadere vnum numerum medium proportionalem. Reperiantur a tres numeri M, N, O, continuè proportionales minimi in ratione lateris C ad D. Quoniam b numerus M ad O proportionem habet compoſitã ex ratione M ad N, & N ad O, eſtque M ad N, atque N ad O, vt latus C ad D: Igitur proportio

a pr. 16. & 24.huius.
b pr.19. lib. 3.

portio numeri M ad O compoſita eſt ex ratione C ad D, & ex altera ratione eiuſdem C ad D; Eſt verò *c* proportio numeri plani A ad planum B compoſita ex ratione lateris multiplicati C in multiplicatum D, atque ex ratione lateris multiplicantis C in multiplicantem D: Igitur *d* vt M ad O, ita eſt A ad B; cadit vero inter M, & O vnus medius proportionalis numerus, nempe N in continua proportione C ad D: Igitur *e* inter A, & B vnus medius proportionalis numerus cadet, qui ſit E, in continua ratione lateris C, ad D; eruntque propterea A, E, B, continuè proportionales in ratione laterum C ad D.

A 16	E 24	B 36
C 4		D 6
M 4	N 6	O 9

c pr. 3. huius.
d cor. 3. pr. 19. lib. 3.
e pr. 29. huius, & cor. 3 pr. 19. lib. 3.

Secundò ſit A numerus cubus, genitus ex multiplicatione lateris C ter in ſe ipſum ducti, pariterque cubus numerus B genitus ſit ex multiplicatione lateris D ter in ſe multiplicati. Dico inter A, & B duos medios proportionales numeros cadere. Reperiantur *f* quatuor numeri M, N, O, R continuè proportionales minimi in ratione lateris C ad D; Erit *g* igitur proportio M ad R triplicata proportionis M ad N, ſeu C ad D; ideſt compoſita erit ex tribus rationibus lateris C ad D: Eſt verò *h* proportio ſolidi numeri A ad ſolidum B compoſita ex eiſdem rationibus laterum, ſcilicet ex tribus rationibus lateris C ad D: Igitur *i* tam proportio M ad R, quàm numeri A ad B triplicata eſt eiuſdem proportionis lateris C ad D; ideoque *k* vt M ad R, ita erit numerus A ad B; ſed inter numeros M, & R duo medij proportionales numeri cadunt, nempe N, & O. Igitur *l* inter A, & B duo numeri pariter medij continuè proportionales intercedent, qui ſint E, & F in continua proportione lateris C ad D. Quod erat oſtendendum.

A 64	E 96	F 144	B 216
C 4			D 6
M 8	N 12	O 18	R 27

f pr. 16. & 24. huius.
g pr. 19. lib. 3.
h pr. 32. huius.
i pr. 19. lib. 3.
k cor. 3. pr. 19. lib. 3.
l pr. 29. huius, & cor. 3 pr. 19. lib. 3.

COROLLARIVM.

Eucl. 13. VIII.

Hinc deducitur, quòd ſi quotlibet numeri proportionales fuerint, erunt poteſtates eiuſdem gradus proportionales quoque. Nam ſi trium proportionalium numerorum A, B, C ſint D, E, F poteſtates eiuſdem gradus, ideſt aut omnes quadrati, aut cubi, &c. erunt proportiones D ad E,

	X	
A	B	C
D	E	F

& E ad F duplicatæ, vel triplicatæ ſint ipſum proportionum A
m cor. 2. pr. 19. lib. 3. ad B, & B ad C; & propterea m D, E, F proportionales erunt.

Eucl. 18. 20 VIII.

PROPOS. XXXIII. THEOR. XXIII.

Inter duos numeros planos ſimiles vnus medius numerus proportionalis cadit in continua proportione laterum homologorum. Et ſi inter duos numeros vnus medius proportionalis ceciderit: illi erunt plani numeri ſimiles.

Sint primò duo numeri A & B plani ſimiles, id eſt A genitus ſit ex multiplicatione laterum C, & D, atque B ſit genitus ex multiplicatione laterum E in F, ſitque C ad D in eadem pro-
a def. 12. buius. portione, quam E habet ad F (ſic a enim plani numeri ſimiles erunt). Dico inter A, & B vnum medium proportionalem numerum cadere in continua proportione lateris C ad eius homologũ
b pr. 16 & 24. buius. E. Reperiantur b tres numeri M, N, & O minimi in continua proportione lateris C ad E. Et quia C ad D eſt, vt E ad F: Ergo c permutando C ad E
c pr 12. lib 3
d pr. 19 lib. 3. erit, vt D ad F; Et eſt d proportio numeri M ad O duplicata proportionis M ad N, ſeu duplicata ipſius C ad E, vel D ad F;
e pr. 32. buius atq; proportio e plani numeri A ad planum B compoſita eſt ex ratione lateris C ad E, atque D ad F, ſeu f duplicata rationis C
f pr 19. lib. 3 ad E; Igitur tam proportio numeri A ad B, quàm M ad O duplicata eſt eiuſdem proportionis C ad E; & propterea g vt M
g cor. 3 pr. 19. lib 3.
h pr 20. buius, & cor. 3 pr. 19 lib 3. ad O, ita erit A ad B; cadit autẽ inter numeros M, & O vnus medius proportionalis, nempe N. Igitur h inter numeros A, & B vnus medius proportionalis cadit numerus, qui ſit G in continua proportione lateris C ad E.

A 6	G 12	B 24
C 2		E 4
D 3		F 6
M 2	N 4	O 8

Secundò inter numeros A, & B cadat vnus numerus medius proportionalis G. Dico numeros A, & B ſimiles eſ-
i pr. 16. buius. ſe. Reperiantur i duo numeri C, & E minimi in ratione A ad G, vel G ad B: erunt k C, & E primi inter ſe; & ideo l æquè me-
k pr 6. buius tientur numeros eandem cum illis rationem habentes; ſcili-
l prop 6. buius. cet toties C ipſum A metietur, quoties E ipſum G. pariterque toties C menſurabit ipſum G, quoties E metitur B: Vnde idem numerus E menſurabit tam numerum G, quàm B.

Fiat

Fiat ergo D tam multiplex vnitatis quàm G multiplex eſt ipſius E, atque F fiat tam multiplex eiuſdem vnitatis, quam B multiplex eſt eiuſdem E. Quapropter m vt numerus D, multiplicans ad multiplicantem F, ita erit G ad B; ſed vt G ad B, ita erat n A ad G, atque C ad E erat, vt A ad G: Igitur o vt C ad E, ita erit D ad F. Et quia C ad E eſt, vt A ad G, permutando C ad A erit, vt E ad G; ſed E ad G eſt, vt vnitas ad numerum D: Igitur vt vnitas ad numerum D, ita erit C ad A. Quare p C, & D erunt latera, ex quibus gignitur planus numerus A, pariterque E, & F erunt latera plani numeri B. Suntque oſtenſa prędicta latera proportionalia. Igitur q plani numeri A, & B ſimiles inter ſe ſunt. Quod erat oſtendendum.

A 8	G 12	B 18
C 2		E 3
D 4		F 6

m def.9. & pr.9. huius.
n pr.7. lib. 5
o pr.12. lib. 3.
p def.9. huius.
q def. 12. huius.

PROPOS. XXXIV. THEOR. XXIV.

Eucl. 19. 21 VIII.

Inter duos numeros ſolidos inter ſe ſimiles, duo medij proportionales cadunt in continua proportione laterum homologorum. Et ſi inter duos numeros duo medij proportionales ceciderint, erunt illi ſimiles ſolidi.

Sint numeri C, D, E latera numeri ſolidi A, & ex trium laterum F, G, H multiplicatione producatur numerus ſolidus B; ſitque vt C ad D, ita F ad G, atque vt D ad E, ita G ad H (ſic enim a ſolidi A, & B ſimiles ſunt). Dico inter A, & B duos medios proportionales cadere in proportione continua laterum homologorum C ad F, vel D ad G, aut E ad H. Reperiantur b quatuor numeri M, N, O, R minimi in continua proportione lateris C ad F. Patet c proportionem M ad R triplicatam eſſe vnius rationis M ad N, vel C ad F; Eſt verò d proportio A ad B compoſita ex rationibus laterum C ad F, D ad G, atque E ad H, ſuntque hę tres proportiones eędem: Igitur e proportio A ad B pariter triplicata eſt eiuſdem rationis C ad F; & propterea vt M ad R, ita erit A ad B. Quare f inter A, & B duo medij numeri proportionales cadent nempe P & Q, veluti inter M, & R cadunt duo medii proportionales N, & O in ratione C ad F.

A 64	P 96	Q 144	B 216
C 2			F 3
D 4			G 6
E 8			H 12
M 8	N 12	O 18	R 27

a def 12. huius.
b pr.16. & 24 huius.
c pr.10. lib. 3.
d pr.31. huius.
e pr.19. lib. 3.
f pr.29. huius, & cor 3 pr.19. lib. 3.

Quare A, P, Q, B continuè proportionales erunt in ratione lateris C ad eius homologum F.

Secundò inter numeros A, & B cadant duo medij proportionales P, & Q. Dico A, & B ſimiles ſolidos numeros eſſe. Reperiantur g duo numeri E, & H minimi in proportione A ad P: erunt h igitur E, & H primi inter ſe, & propterea ęquè metiētur numeros eandem cum eis rationem habentes. Vnde quoties E metitur ipſum A, toties H metietur ipſum P; Similiter toties E metietur numerum P, quoties H menſurat ipſum Q; pariterque toties E menſurabit numerum Q, quoties H menſurat numerum B.

g pr. 16. huius.
h prop. 6. huius.

A 64 P 96 Q 144 B 216
I 32 L 48 K 72
C 8 F 12
D 4 G 6
E 2 H 3
X 1

Fiat igitur vnitas X ad I, vt eſt E ad A, atque X ad L fiat, vt E ad P: pariterque X ad k fiat vt E ad Q. Manifeſtum i eſt multiplicantes numeros I, L & k continuè proportionales eſſe in eadem ratione, in qua ſunt A, P, & Q. Cumque inter I, & k cadat L medius proportionalis: erunt k I, & K numeri plani ſimiles; & propterea l duo latera, ex quorum multiplicatione generatur numerus I, quę ſint C, & D proportionalia erunt duobus lateribus, ex quibus procreatur numerus planus K, quę ſint F, & G; eritque latus C ad eius homologum F, vt D ad G, ſiue vt I ad L, vel vt A ad P, vel vt E ad H. Et quoniam ex mutua multiplicatione trium laterum C, D, E gignitur numerus A, eo quod ex C in D efficitur planus numerus I, atque ex numero E in I ducto efficitur numerus A, pariterque ex mutua multiplicatione laterum F, G, & H procreatur numerus ſolidus B, eſtque proportio lateris C ad F, vt D ad G, & vt E ad H, ſiue vt A ad P: Igitur m ſolidi numeri A, & B ſimiles erunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

i def. 9. & pr 7. huius.
k pr 33 huius
l def 12. huius
m def. 12. huius.

Eucl. 14. 15. 16. 17. VIII

PROPOS. XXXV. THEOR. XXV.

Si quadratus numerus quadrati numeri, vel cubus numerus cubi numeri multiplex aut pars, vel partes tantùm fuerit: erit quoque latus lateris multiplex, aut pars, vel ſolummodo partes. Si verò latus lateris multiplex, vel pars, aut partes tantùm fuerit: erit quoque quadratus numerus quadrati, vel cubus cubi numeri multiplex, aut pars, parteſue.

Sint primò A, B duo numeri quadrati, quorum latera C, D, atque A ipſius B multiplex ſit. Dico C ipſius D multiplicem eſſe. Quoniam ^a inter numeros quadratos A, & B vnus medius proportionalis cadit, qui ſit E, atque eſt A ad E, & E ad B, vt latus C ad D, & ponitur A multiplex poſtremi B: erit ^b quoque A mutiplex ſecundi E. Quare ^c C ipſius D multiplex quoque erit, cùm ſit C ad D, vt A ad E. a pr. 32. huius. b pr. 27. huius. c def. 8. lib. 3.

A 16 E 8 B 4
C 4 D 2

Sint ſecundò A, & B numeri cubi, quorum latera C, & D; ſitque A multiplex ipſius B. Dico C ipſius D multiplicem quoque eſſe. Nam ^d inter numeros cubos duo medij proportionales cadunt, qui ſint E, F in ratione laterũ C ad D; ponitur verò A ipſius B multiplex: Igitur ^e erit A ipſius E; ſiue C ipſius D multiplex quoque. Pari ratione, cùm A ipſius B pars ſupponitur, ſequitur quoque, eadem ratione latus C ipſius D partem eſſe: & è conuerſo, cùm latus C ipſius D pars ſupponitur, eſt quoque numerus A pars poſtremi B. d pr. 32. huius. e pr. 27. huius, & def. 8 lib. 3.

A 64 E 32 F 16 B 8
C 4 D 2

Tandẽ numerus quadratus A quadrati numeri B, vel cubus cubi ſit tantũmodo partes; ideſt neque multiplex, neque pars illius ſit. Pari ratione inuentis medijs proportionalibus: ^f erit primus A ſecundi E partes tantummodo; & propterea C ipſius lateris D partes ſolummodo erit. Et contra cùm latus C ipſius D neque multiplex, neque pars ſupponitur: erit neceſſariò A ipſius ſecundi E partes tantumodo; & ideo erit prior numerus A poſtremi B partes tantummodo. Quę erant oſtẽdenda. f per pr. 27. huius.

PROPOS. XXXVI. THEOR. XXVI.

Si ab eodem numero ad duos alios extremos vel ad numerum, & vnitatem continuentur ęquales multitudines proportionalium numerorum: inter extremos totidem medij cõtinua proprtione cadent numeri.

Inter numerum A, & C intercedant medij continua proportione D & E, atque inter numerum, vel vnitatem B, & eundem numerum C totidem interponantur numeri F, G medij continua proportione. Dico inter A, & B tot numeros medios continua proportione cadere, quot inter A, & C, vel inter

a pr. 16. & 24. huius. inter B, & C interponuntur. Reperiantur *a* tres minimi numeri K, L, M in ratione E ad G; & ratio D ad E, vel E ad C vocetur X, & proportio C ad G, vel ei ſimilis G ad F vocetur Z. Et quia *b* proportio D ad F componitur ex rationibus D ad C, & C ad F, eſtque ratio D ad C duplicata rationis D ad E, ſeu X, & proportio C ad F duplicata rationis C ad G, ſeu Z; ergo *c* proportio D ad F componitur ex his rationibus X, X, Z, Z; ſed *d* quocunque ordine prædictę proportiones diſponantur, ſemper componunt eandem proportionem: Ergo proportio D ad F compoſita erit ex rationibus X, Z, X, Z; ideſt ex duabus proportionibus *e* ſimilibus, quarũ ſingulę ex rationibus X, Z componuntur; & propterea proportio D ad F duplicata erit rationum X, Z; ſed E ad G componitur ex rationibus E ad C, & C ad G; ſcilicet ex rationibus X, & Z: Ergo D ad F proportionem duplicatam habet rationis E ad G; erat autem proportio K ad M duplicata rationis E ad G: Ergo *f* vt K ad M, ita eſt D ad F; cadit verò inter K, & M vnus medius proportionalis L: Igitur *g* inter D, & F vnus medius proportionalis cadet. Simili ratione inter numeros A, & B duo medij proportionales cadent in ratione E ad G; Quod erat, &c.

b pr. 19. lib. 8. — *c pr. 19. lib. 8.* — *d cor. 1. pr. 21. lib. 3.* — *e pr. 19. lib. 3.* — *f cor. 3. pr. 19. lib. 3.* — *g pr. 28. huius.*

A 27 O 9 P 3 B 1
D 18 N 6 F 2
E 12 G 4
C 8
K 9 L 3 M 1

Eucl. 22. 23. VIII.

COROLLARIVM.

Facilè colligitur, quòd ſi tres numeri proportionales fuerint, at primus ſit quadratus, erit tertius quadratus quoque. Et ſi quatuor numerorum continuè proportionalium prior ſit cubus, erit quartus cubus quoque. Nam trium proportionalium O, N, G, ſi G quadratus fuerit, *h* interponetur inter vnitatẽ B, & numerũ G vnus medius proportionalis F; & ideo ex hac propoſitione inter extremũ O, & vnitatẽ B vnus quoq; numerus medius proportionalis intercedet, & propterea *i* O quadratus erit. Si verò quatuor cõtinuè proportionaliũ C, E, D, A prior C fuerit cubus *k* interponentur inter cubum C, & vnitatem B duo medij continuè proportionales, quot nimirum inter C, & A interponuntur. Igitur ex hac propoſitione inter vnitatem B, & numerum A duo medij quoque in continua proportione cadent; ideoque *l* numerus A cubus erit.

h def. 10. huius. — *i def. 10. huius.* — *k def. 11. huius.* — *l d. f. 11. huius.*

PRO-

PROPOS. XXXVI. THEOR. XXVII.

Eucl. 24. 26. 25. 27. VIII.

Si duo numeri inter ſe eandem rationem habuerint, quam duo numeri quadrati, erunt aut ambo quadrati, aut ambo ſimiles plani numeri; Et duo numeri plani ſimiles, ſunt inter ſe, vt duo numeri quadrati; At numeri eãdem rationem habentes, quam duo cubi numeri, erunt, aut ambo cubi, aut ſimiles numeri ſolidi; Et ſi numeri ſolidi ſimiles fuerint, erunt, vt duo cubi numeri.

Sit primò numerus A ad B in eadem ratione, quam habet numerus quadratus C ad quadratum D. Dico A, & B quadratos eſſe; aut ſimiles planos. Quoniam inter *a* quadratos numeros C, & D vnus medius proportionalis cadit, nempe E; eſtque A ad B, vt C ad D: *b* Igitur inter A, & B vnus medius proportionalis numerus cadet, qui ſit F. Quare erunt tres numeri continuè proportionales A, F, B, & ideo ſi A quadratus eſt, *c* erit quoque B quadratus; ſin minùs, *d* erunt A, & B ſimiles numeri plani.

A 8	F 12	B 18
N 2		O 3
C 4	E 6	D 9

a prop. 32. buius. b prop. 28. buius. c cor. prop. 36 buius. d prop. 33. buius.

Secundò ſint A, & B ſimiles numeri plani, quorum latera homologa N, & O; & fiant C, D quadrata laterum N, & O. Dico A ad B eſſe, vt C ad D. Quoniam *e* tam proportio quadratorum C, D quàm ſimilium *f* planorum A, B duplicata eſt rationis laterum N ad O; Ergo *g* A ad B eſt, vt C ad D.

e prop. 32. buius. f prop. 33. buius. g cor. 3. pr. 19 lib 3.

Tertiò ſit numerus A ad B in eadem ratione, quam habet cubus numerus C ad cubum D. Dico A, & B eſſe cubos, vel ſolidos numeros ſimiles. Quoniam *h* inter duos cubos numeros C, & D cadunt duo medij proportionales, nempe E, & F; eſtque A ad B, vt C ad D. *i* Igitur inter A, & B duo medij proportionales numeri cadunt, qui ſint G, & H; & propterea erunt quatuor numeri continuè proportionales A, G, H, B; vnde quando prior A cubus eſt, erit *k* quoque poſtremus numerus B cubus, vel *l* ſaltem A, & B ſimiles plani erunt.

A 16	G 24	H 36	B 54
N 2			O 3
C 8	E 12	F 18	D 27

h prop. 32. buius. i prop. 28. buius. k cor. prop. 36 buius. l prop. 34. buius.

Quartò ſint A, & B numeri ſolidi ſimiles, quorum homologa latera N, & O, & fiant laterum N, & O cubi numeri C, & D. Dico A ad B eſſe, vt C ad D. Quoniam *m* tam proportio

m prop. 32 buius.

n prop. 34. huius. tio cuborum numerorum C, D, quam *n* ſimilium ſolidorum numerorum A, B triplicata eſt eiuſdem rationis laterum N ad *o cor. 3. pr. 19. lib. 3.* O. Ergo *o* numerus A ad B eandē rationem habet, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. Quę erant oſtendenda.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt, quòd duorum numerorum, ſi vterque primus ſit, ipſi non erunt inter ſe, vt duo numeri quadrati: Nam ſi primus numerus A ad numerum primum B eſſet, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, ſaltem ex hac propoſitione numeri A, & B eſſent plani ſimiles; & ideo inter *p* eos vnus medius proportionalis caderet, nempe C; Cùmque trium numerorum proportionalium A, C, B extremi A, & B ſint primi, & ideo *q* primi inter ſe; cadet *r* inter vtrunque eorum, & vnitatem X vnus medius proportionalis numerus D, atque F: & ideo *ſ* A, & B numeri quadrati eſſent; & propterea menſurabiles à ſuis lateribus D, & F, quod eſt abſurdum: erat *t* enim vterque numerus primus.

A 7 C B 5
D F
X 1

p prop 35. huius.
q pr. 4. huius.
r prop. 29. huius.
ſ def. 10. huius.
t pr. 1. huius

Eucl. 1. 2.
IX.

PROPOS. XXXVIII. THEOR. XXVIII.

Ex multiplicatione duorum planorum numerorū ſimilium, efficitur quadratus numerus. Et duo latera, quadratum efficientia, erunt numeri plani ſimiles.

Sint numeri A, & B ſimiles plani, & ex A multiplicato in B *a def. 10. huius.* fiat numerus C. Dico C quadratum eſſe. Ex A in ſe fiat *a* numerus quadratus D. Et quia A, multiplicans numeros A, & B *b pr. 7. huius.* producit numeros D, & C, *b* erunt producti D, & C inter ſe, vt multiplicati A, & B; ſed *c* inter A, & B cadit vnus medius *c prop. 33. huius.* proportionalis, eo quod ſunt plani ſimiles; Ergo *d* inter D, & C vnus medius proportionalis cadet, qui ſit E: *d prop. 28. huius.* Cùmque D, E, C continuè proportionales ſint, & prior D quadratus ſit, erit *e* poſtremus numerus C quadratus quoque. *e cor prop. 30. huius.*

A 6 H 24 B 96
D 36 E 144 C 576

Secūdò ex multiplicatione numeri A in B producatur quadratus

dratus numerus C. Dico A, & B ſimiles planos eſſe. Fiat *f* rurſus ex A in ſe quadratus numerus D. Erit igitur *g* quadratus numerus D ad quadratum C, nempe producti in eadem proportione, quam multiplicati A ad B, ſed *h* inter quadratos D, & C cadit vnus medius proportionalis: Igitur inter A, & B vnus medius proportionalis cadet qui ſit H; ideoque *i* numeri A, & B ſimiles plani erunt. Quod erat oſtendendum. *f def. 10 huius. g pr. 7. huius. h prop. 32. huius. i pr. 37. huius.*

COROLLARIVM.

Conſtat numerum productum ex multiplicatione duorum quadratorum, quadratum eſſe; eo quod quadrati numeri plani ſimiles ſunt.

PROPOS. XXXIX. THEOR. XXIX.

Eucl. 3. 4. 5. 6. IX.

Numerus productus ex multiplicatione cubi numeri in ſe ipſum, vel in alium cubum, erit quoque cubus numerus. Et ſi ex multiplicatione alicuius numeri in ſe ipſum, vel in aliquem cubum numerum procreatur numerus cubus, & ille cubus erit.

Sit primò numerus A cubus, & vt vnitas X ad A, ita fiat A ad B. Dico numerum B productum ex A in ſe cubum eſſe. Sit C latus cubi A, & *a* ex C fiat numerus D; Erit igitur D quadratus numeri C; ideoque *b* ex multiplicatione numeri C in D efficietur numerus cubus A; *a def 9 & 10. huius. b def 11. huius.*

A 8 E 16 F 32 B 64
D 4
C 2
X 1

Quare vnitas X, & C, D, A continuè proportionales ſunt. Eſtque vnitas X ad A, vt numerus A ad B; Igitur *c* inter A, & B duo medij proportionales E, F cadent, quot ſunt numeri C, & D medij in continua proportione inter X, & A poſiti: Cùmque A, E, F, & B continuè proportionales ſint, ſitq; prior A numerus cubus, erit *d* quartus B cubus quoque. *c prop. 28. huius. d cor. prop. 36. huius.*

Secundò ex multiplicatione cubi numeri A in numerum cubum B fiat numerus C. Dico productum numerum C cubum eſſe. Rurſus ex *e* A cubo in ſe ipſum fiat numerus D; Erit igitur *f* D cubus: Et quoniam idem numerus A multiplicans duos numeros A, & B efficit duos nu- *e def. 11. huius. f par. 1. huius pr.*

A 8 B 27
D 64 C 216

g pr.7.huius meros D & C, erit *g* productus numerus D ad C vt multipli-
h prop.32. huius catus A ad multiplicatum B; ſed *h* inter A, & B duo medij proportionales cadunt, cùm ſint A, & B cubi: Igitur *i* inter D,
i prop.28. huius. & C cadent quoque duo medij numeri proportionales. Eſtq;
k cor prop. 36.huius. prior numerus D cubus: Quare *k* poſtremus C cubus erit.

Tertiò ex multiplicatione numeri A in numerum cubum B fiat numerus cubus C. Dico numerum multiplicantem A cubum quoque eſſe.

A 27 B 8

C 216 D 64

l def.9 huius. Fiat *l* numerus D ex multiplicatione cubi numeri B in ſe ipſum. Conſtat, ex prima parte, D cubum eſſe; Et quoniam B multiplicans ſe ipſum, &
m pr.7. huius. numerum A, efficit duos numeros D, & C: erit *m* D ad C, vt B ad A; ſed *n* inter duos cubos numeros D, & C duo medij
n prop.32. huius. numeri proportionales cadunt: Igitur *o* inter A, & B duo quo-
o prop.28. huius. que medij proportionales cadent: Cùmque prior B cubus ſit: erit *p* poſtremus A cubus.

p cor prop. 36.huius. Quartò numerus A, ſe ipſum multiplicans, efficiat numerum cubum B. Dico A cubum eſſe. Fiat *q* ex multiplicatione
q def.9.huius. numeri A in B ipſe numerus C; Conſtat *r* numerum C cubum eſſe, eo quod inter vnitatem, & numerum C duo medij pro-
r def.11.huius. portionales cadunt A, & B: Et quia

X 1 A 8 B 64 C 512

ſ par.3. huius pr. cubus numerus B, multiplicans numerum A efficit cubum numerum C: erit *ſ* numerus A cubus. Et hęc omnia oſtendenda erant.

Eucl.8.IX.

PROPOS. XL. THEOR. XXX.

Si ab vnitate fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, tertius ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes, omnes; quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes, omnes: Septimus verò cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes, omnes.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri A, B, C, D, E, F, &c. continuè proportionales. Dico primò tertium ab vnitate, qualis eſt B eſſe quadratum, & vnum intermittentes, omnes, quales ſunt D, F, &c. Quoniam, vt vnitas X ad latus A, ita eſt
a def 10. huius. A ad B, *a* erit B numerus quadratus; Et quoniam tres numeri B, C, & D continuè proportionales ſunt, & eſt prior B qua-
b cor prop. 36. huius. dratus, *b* erit poſterior D quadratus quoque. Similiter F tertius à numero quadrato D, erit quoq; quadratus, & ſic reliqui omnes.

Secundò

Secundò dico numerum C quartum ab vnitate cubum eſſe, & duos intermittẽtes, omnes, vt eſt numerus F, &c. Quoniam vt vnitas X ad A, ita eſt A ad B, & ita B ad C, c erit C cubus genitus ex triplici multiplicatione lateris A; Cùmque inter C, & F intercedant duo medij proportionales D, & E, ſitque prior C oſtenſus cubus, d erit quartus F proportionalis, cubus quoque.

X. A 2 B 4 C 8
D 16
F 32
F 64 M

c def. 11. huius.
d ex. prop. 36. huius.

Tertiò dico ſeptimum ab vnitate veluti eſt F, cubum ſimul, & quadratum eſſe, & ſic quinque intermittentes, omnes. Quoniam e numerus F ſeptimus ab vnitate oſtenſus eſt quadratus, & ſimiliter f F cubus oſtenſus eſt. Igitur F cubus ſimul, & quadratus eſt. Continuentur poſtea poſt numerum F ſex alij numeri continuè proportionales in eadem ratione, in qua eſt X ad A, vel A ad B, ita vt inter F, & poſtremum M quinque medij numeri proportionales intercedant; propterea, quia M ſeptimus eſt ab ipſo numero F, erit g quadratus, & ſimiliter cubus. Quare patet propoſitum.

e par. 1. huius pr.
f par. 2. huius pr.
g par. 1. & 2 huius pr.

PROPOS. XLI. THEOR. XXXI.

Eucl. 9. IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & qui eſt poſt vnitatem ſit quadratus, erunt reliqui omnes quadrati, At ſi ille, qui eſt poſt vnitatem, ſit cubus, reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, &c. Et primò ſit numerus A proximus vnitati quadratus. Dico reliquos omnes quadratos eſſe. Quoniam a tertius ab vnitate, vt eſt B, & vnum intermittentes, omnes, vt D, & F quadrati oſtenſi ſunt; & ponitur A quadratus, atque tres numeri A, B, C continuè proportionales: Igitur b tertius C quadratus quoque erit: Similiter E tertius poſt quadratum C, erit quoque quadratus, & ſic reliqui omnes quadrati erunt.

X 1 A 4 B 16 C 64
D 256
E 1024
F 4096

a pr. 40 huius.
b cor. prop. 30. huius.

Secũdò ſit A proximus vnitati cubus. Dico reliquos omnes cubos eſſe. Quoniam vt vnitas X ad A, ita eſt A ad B: c Igitur ex multiplicatione cubi A in ſe ipſum efficietur numerus cubus

c prop. 39. huius.

bus B. Rurſus quia numerus C quartus proportionalis ab vnitate producitur ex multiplicatione numeri A in B, ſuntque A, & B cubi; Igitur [d] productus C cubus quoque erit. Similiter quia vt vnitas X ad A, ita eſt C ad D; erit [e] productum ex ſecundo A in tertium C æquale producto ex vnitate X in quartum D; propterea numerus D producetur ex multiplicatione cubi numeri A in cubum numerum C; & propterea [f] D cubus erit. Simili ratione numerus E producitur ex multiplicatione cubi numeri A in cubum numerum D; & propterea productus E cubus quoque erit, & ſic reliqui omnes. Quare patet propoſitum.

d prop. 39. huius.
e pr 8. huius
f prop. 39. huius.

X 1 A 8 B 64 C 512
D 4096
E 32768
F 262144

Eucl. 10. IX.

PROPOS. XLII. THEOR. XXXII.

Si fuerint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales, & vnitati proximus non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes. At ſi proximus vnitati non ſit cubus, neque vllus alius præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes, omnes, cubus erit.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, &c. Et primò, proximus vnitati A, non ſit quadratus. Dico neque alium vllum quadratum eſſe præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes. Si enim hoc verum non eſt, ſit numerus C, ſi fieri poteſt, quadratus; Cùmque [a] numerus B ſit quadratus, cùm tertius ſit ab vnitate, pariterque D quadratus ſit, cùm tertius ſit à quadrato numero B, ſitque C ad D, vt A ad B, erit [b] inuertendo B ad A, vt D ad C: Quare numerus B ad A eandem proportionem habet, quam quadratus numerus D ad quadratum numerum C, eſtque B quadratus; Igitur [c] numerus A, proximus vnitati, quadratus quoque erit, quod eſt contra hypotheſin: Non igitur numerus C quadratus erit; & ſic reliqui alij in locis paribus poſiti.

a prop. 40. huius.
b pr. 9. lib. 3
c cor. prop. 36. huius.

X 1 A 3 B 9 C 27
D 81
E 243
F 729

Secundò ſit A, proximus vnitati, non cubus. Dico nullum alium eſſe cubum præter quartum ab vnitate, & duos intermitten-

mittentes, omnes, vt ſunt C, F, &c. Si enim hoc verum non eſt ſit D cubus, ſi fieri poteſt. Et quia *d* vt A ad cubum numerum C, ita eſt D ad F (cùm inter eos ſinguli medij proportionales intercedant) habebit *e* inuertendo cubus C ad A eandem proportionem, quam cubus numerus F ad cubum numerum D; & propterea *f* numerus A vnitati proximus cubus quoque erit, quod eſt contra hypotſin: Non igitur numerus D cubus erit. Eidem ratione nullus alius numerus cubus erit prẹter eos, qui in locis determinatis collocati ſunt. Quod erat oſtendendendum.

d cor. 3. pr. 19. lib. 3.
e pr. 9 lib. 3
f pr. 32. & cor pr. 36. huius.

PROPOS. XLIII. THEOR. XXXIII.

Eucl. 11. & 12. IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint; vnitas & quilibet minor ẹquè metientur numeros maiores ẹquè remotos; & quilibet primus numerus poſtremum metiens, etiã eum, qui vnitati proximus eſt, metietur.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F. Dico primùm quemlibet minorem numerum B eandem partem eſſe numeri maioris F atque eſt vnitas pars numeri D ẹquè recedentis ab ea. Quoniam *a* ex compoſitione ordinata, vt eſt X ad D: ita eſt B ad F, propterea quod vtrẹquẹ proportiones quadruplicatẹ ſunt ſimplicium proportionum C ad D, vel X ad A, & eſt vnitas numeri D pars: Igitur *b* B ipſius F eadem pars erit, ac eſt vnitas X ipſius D. Quod erat oſtendendum.

a prop. 19. lib. 3.
b def. 8 lib. 3.

Secundò primus numerus H metiatur vltimum F. Dico H ipſum A metiri. Si enim hoc verum non eſt, erit *c* H ad A primus, cùm H primus numerus ſupponatur: Cùmque *d* B fiat ex multiplicatione A in ſe, eo quod eſt vt X ad A, ita A ad B, erit *e* B ad H primus. Et quia ambo A, & B ſunt ad numerum H primi, *f* atque C fit ex ductu A in B, eo quod eſt vt X ad A, ita B ad C; Igitur *g* C ad H

X 1 A 6 B 36 C 216
H 3 D 1296
E 8776
F 526 S 6

primus eſt quoque: Cùmque duo numeri A, & C ad ipſum H primi ſint, & *h* gignitur numerus D ex multiplicatione A in C, eo quod X ad A eſt vt C ad D: Igitur H ad ipſum D primus eſt; eadem ratione H primus erit ad E & ad F. Quare *i* numerus

c pr. 4. huius.
d def 9. & 10. huius.
e cor pr 13. huius.
f def 9. & 11. huius.
g prop 13. huius.
h pr 8 huius.
i conu pr. 4. huius.

merus H ipſum F non metitur; quod eſt contra hypotheſin: Et propterea H ipſum A metietur. Vt propoſitum fuerat.

Eucl. 13. IX

PROPOS. XLIV. THEOR. XXXIV.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, atque numerus poſt vnitatem primus ſit, maximum nullus alius metietur præter eos, qui ſunt in eadem continua proportionalitate.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri A, B, C, D continuè proportionales, quorum A proximus vnitati ſit numerus primus. Dico nullũ aliũ numerũ præter A, B, C metiri maximum D. Si enim hoc verum non eſt, metiatur ipſum D

X 1 A 5 B 25 C 125 D 625
F H G E

alius numerus E præter ipſos A, B, C; & primo loco patet, quòd numerus E non eſt primus, aliàs cùm metiatur extremum D *a* metietur quoque numerum primum A vnitati proximum, quod eſt impoſſibile; Erit igitur E non primus & propterea *b* eum menſurabit aliquis primus numerus, hic verò alius non erit, quàm A; Nam cùm E metiatur extremum D, alius primus numerus, qui ponitur menſura ipſius E, *c* menſurabit quoque extremum D, & *d* propterea ipſum primum A proximum vnitati, quod eſt impoſſibile; Vnde conſtat, quod quilibet numerus, dimetiens maximum quotcunque numerorum ab vnitate continuè proportionalium, quorum proximus vnitati ſit primus, multiplex erit neceſſariò numeri, qui vnitati ſuccedit. Poſtea quoties E metitur ipſum D, toties vnitas metiatur numerum G. Quare idem numerus D efficietur ex multiplicatione *e* A in C, & ex G in E: Ergo, *f* vt A ad G, ita eſt E ad C; Et quia *g* vt X ad G, ita erat E ad D, erit *h* permutando, vt X ad E, ita G ad D; ſed vnitas X metitur ipſum E: Igitur G metitur ipſum D; & propterea (vt prius oſtenſum eſt de numero E) erit G multiplex ipſius A; erat autem, vt A ad G, ita E ad C; Igitur E metitur quoque numerum C. Rurſus quoties E metitur numerum C, toties vnitas X metiatur H; Vnde (vt antea dictum eſt) H metietur ipſum C, & multiplex erit ipſius A. Cumque idem numerus C fiat ex ductu A in B, atque ex multiplicatione H in E, *i* erit vt A ad H, ita E ad B; ſed A menſurabat ipſum H; Quare E menſurabit quoque nume-

a prop. 43. huius.
b pr. 4. huius.
c ax. 1. lib. 3
d prop. 43. huius.
e def. 9. huius.
f pr. 8. huius
g def. 9 huius.
h pr. 12. lib. 3.
i pr. 8. huius

numerum B. Tandem quoties E metitur B, toties X metiatur ipſum F. Vnde, vt prius F menſurabit numerũ B, & multiplex erit ipſius A. Et quia idem numerus B procreatur ex ductu E in F, atque ex ductu A in ſe ipſum *k* erit vt A ad F, ita E ad A; *k pr. 9. huius.* Sed A metitur ipſum F: Igitur E metitur ipſum A, maior minorem numerum primum, quod eſt impoſſibile. Quapropter nullus alius numerus pręter A, B, C menſurabit maximum numerum D. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. XLV. THEOR. XXXV.

Eucl. 15. IX

Si tres numeri continuè proportionales minimi fuerint omnium cum ipſis eandem rationem habentium, duo quilibet ſimul ſumpti ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C continuè proportionales minimi omnium cum eis eandem rationem habentium. Dico primo loco A, & B ſimul ſumptos ad ipſum C primos eſſe. Reperiãtur *a* duo numeri D, & E minimi in ratione A ad B, aut B ad C, & fiat F ęqualis D, & E ſimul ſumptis, atque G ſit quadratum ipſius F. Manifeſtum eſt (ex ijs, quę dicta ſunt in propoſitione 24 & 25 huius) vnitatem X ad D eſſe, vt D ad A, & vt X ad D, ita eſſe E ad B, atque vt X ad E, ita eſſe E ad C & D ad B. Vnde conſtat quod, *b* vt vnitas X ad D, ita ſunt D, & E ſimul, ideſt F, ad A, & B ſimul. Et quoniam D, & E minimi ſunt in ſua proportione, erunt *c* inter ſe primi; ideoque *d* D, & E ſimul ſumpti, ideſt F ad ipſum E primus erit. Eſt verò D ad E etiam primus: Igitur D, & F primi ſunt ad eundem numerum E: Vnde *e* productus ex D in F, ideſt A vnà cum B, primi erunt ad productum ex E in ſe ipsũ, ideoque numerus C, primus erit ad aggregatum ex A, & B. Dico ſecundò duos extremos A, & C, ſimul ſumptos, ad ipſum B intermedium primos eſſe. Quoniam D, & E primi ſunt inter ſe: Ergo *f* eorum ſumma F ad quemlibet ipſorum D, vel E prima eſt: Igitur *g* productum ex D in E, ſcilicet numerus B, primus quoque erit ad G productum ex F in ſe ipſum. Et quia, vt dictum eſt, X ad D eſt, vt F ad ſummam A, B, & vt X ad E, ita eſt F ad ſummam B C: Ergo *h* vt X ad D ſimul cum E, ideſt ad F, ita eſt F ad A, B, vnà cum B, C. Quare *i* numerus G productus

A 9 B 12 C 16
D 3 E 4
X 1
F 7
G 49

a prop. 16. huius.
b prop. 15. lib. 3.
c pr. 6. huius.
d pr. 5. huius.
e prop. 13. huius. & cor. eius.
f pr. 5. huius.
g pr. 13. huius, & cor. eiuſd.
h cor. pr. 12 lib. 3.
i pr. 7. & 4. lib. 3.

ex

ex F in ſe ipſum ęqualis eſt A, & C vnà cum duplo intermedij B: Igitur A, & C vnà cum duplo ipſius B, primi erunt ad numerum B, ſicuti B, & G primi erant; & k eorum differentia, k pr.5. huius. nimirum ſumma numerorum A, C, & B prima erit ad numerum B: & rurſus horum differentia, ſcilicet numeri A, & C, ſimul ſumpti, ad ipſum B primi erunt. Quod erat propoſitum.

COROLLARIVM.

Patet ex hac propoſitione numeri quadratum maioris lateris ſuperare quadratum lateris minoris, & exceſſum ęqualem eſſe quadrato differentiæ laterum cum duplo medij proportionalis inter duos quadratos ex differentia, & ex minori latere factos. Nam quadratus G lateris maioris F ęqualis fuit quadratis A, C cum duplo medij proportionalis B: ergo exceſſus quadrati G maioris lateris F ſupra quadratum A ex latere minori D, ęqualis eſt quadrato C ex differentia E cum duplo ipſius B medij proportionalis inter A, & C.

SCHOLIVM.

Non erit difficile ex hac propoſitione reperire numerum quadratum, cuius duæ portiones, aut vna tantùm, aut neutra ſit numerus quadratus.

E 25
R 8 S 17
A 9 H 16 O 4 N 1
C 5 D 4 X 1

Primò ſumatur quilibet numerus quadratus impar A, & ſecetur in duas portiones C, D vnitate inter ſe differentes, & l *fiat E quadratus ipſius C, & H quadratus ipſius D. Dico quadratos A, & H ęquales eſſe quadrato E. Fiat vnitatis X quadratus N, qui vnitas erit,* m *& fiat productus ex X in D, ſitque O, qui æqualis erit numero D.* n *Quoniam quadratus ex ſumma vnitatis X, & D æqualis eſt quadratis N, & H, cum duplo producti O; eſtque C æqualis ſumma X, D: Ergo quadratus E æqualis eſt quadratis N, H cum duplo producti O; eſt verò vnitas N, ſeu X cum duplo numeri O, ſeu D æqualis numeris C, & D, ideſt numero A: Ergo quadratus E ęqualis eſt quadratis H, & A.*

l def.10. huius. m def 9. huius. n ex pr.45. huius.

Secundò numerus R deficiat ab A vnitate, & numerus S excedat H vnitate. Patet numeros R, S ęquales eſſe duobus numeris quadratis A, & H. Dico R, S non eſſe numeros quadratos. Si enim quadrati eſſent o *vnitas, quæ eſt differentia quadratorum A, & R ſiue H, & S ęqualis eſſet, nedùm quadrato vnitatis, ſed etiam duplo numeri medij proportionalis inter vnitatem, & minorem numerum quadratum, quod eſt impoſſibile.*

o cor. pr. 45 huius.

Tertiò

Tertiò ſumatur quilibet p numerus primus impar A, qui quadratus non erit, q cùm à nullo latere numerus primus metiri poſſit; & facta r eadem conſtructione, erit eadem ratione quadratus numerus E æqualis quadrato numero H, & non quadrato A. p ex pr. 22. huius. q pr. 1. def. 10. huius. r par. 1. huius ſchol.

E 16
A 7 H 9 O 3 N 1
C 4 D 3 X 1

PROPOS. XLVI. THEOR. XXXVI.

Eucl. 33. 33 34. IX.

Quilibet numerus à binario duplus, pariter par eſt tantùm. Et ſi dimidium imparẽ habuerit, pariter impar eſt tantùm. Et ſi dimidium habuerit parem, & non fuerit à binario duplus, pariter par, & pariter impar erit.

Primò ſint quotcunque numeri A, B, C, D à binario A dupli. Dico quemlibet eorum C eſſe pariter parẽ tantùm. Quoniam A, B, C, D ſunt ab vnitate X continuè proportionales, & A vnitati proximus, primus numerus eſt (cùm binarius ab vnitate tantùm metiatur): Igitur a nullus alius numerus præter ipſos A, B, C metietur quemlibet ipſorum, vt C: Suntque b omnes A, B, C, D pares: Ergo tantummodo par numerus per parem numerum metietur numerum C; ideoque c quilibet ipſorum C pariter par eſt tantùm. a prop. 44. huius. b def. 3. huius. c def. 5. huius.

X 1 A 2 B 4 C 8 D 16

Secundò numeri A ſit ſemiſſis B impar, & C ſit binarius, ita vt d impar B metiatur A per parem C. Dico A eſſe tantùm pariter imparem. Si enim hoc verum non eſt, erit quoque numerus A pariter par. e Quare numerum A metietur aliquis par numerus D per alium numerum parem E: Ergo f ex multiplicatione D in E fit numerus A; ſed idem A producitur ex B in C: Ergo g vt D ad B, ita erit C ad E; ſed binarius C neceſſariò pars eſt, & metitur parem numerum E (eo quod par numerus eſt aggregatum pluriũ binariorum): h Igitur par numerus D ipſum B imparem metitur aliquoties, quod eſt impoſſibile. Quare numerus A tantummodo eſt pariter impar. d def. 6. huius. e def. 5. huius. f cor. pr. 7. huius. g pr. 8. huius. h def. 3. & 4. huius.

D E
A 10
B 6 C 2

Tertiò ſit numerus A par, cuius dimidium B ſit par, & A non ſit a binario duplus. Dico A pariter parem eſſe, & pariter imparem. Fiat binarius D ad vnitatem X, vt A ad eius ſemiſ-

n prop. 34. huius. o cor. 3. pr. 19. lib 3. tio cuborum numerorum C, D, quam n ſimilium ſolidorum numerorum A, B triplicata eſt eiuſdem rationis laterum N ad O. Ergo o numerus A ad B eandẽ rationem habet, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. Quę erant oſtendenda.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt, quòd duorum numerorum, ſi vterque primus ſit, ipſi non erunt inter ſe, vt duo numeri quadrati: Nam ſi primus numerus A ad numerum primum B eſſet, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, ſaltem ex hac propoſitione numeri A, & B eſſent plani ſimiles; & ideo inter p eos vnus medius proportionalis caderet, nempe C; Cùmque trium numerorum proportionalium A, C, B extremi A, & B ſint primi, & ideo q primi inter ſe; cadet r inter vtrunque eorum, & vnitatem X vnus medius proportionalis numerus D, atque F: & ideo ſ A, & B numeri quadrati eſſent; & propterea menſurabiles à ſuis lateribus D, & F, quod eſt abſurdum: erat t enim vterque numerus primus.

A 7	C	B 5
D		F
	X 1	

p prop 33. huius. q pr. 4. huius. r prop. 29. huius. ſ def. 10. huius. t pr. 1. huius

Eucl. 1. 2. IX.

PROPOS. XXXVIII. THEOR. XXVIII.

Ex multiplicatione duorum planorum numerorũ ſimilium, efficitur quadratus numerus. Et duo latera, quadratum efficientia, erunt numeri plani ſimiles.

a def. 10. huius. b pr. 7. huius. c prop. 33. huius. d prop. 28. huius. e cor prop. 30. huius.

Sint numeri A, & B ſimiles plani, & ex A multiplicato in B fiat numerus C. Dico C quadratum eſſe. Ex A in ſe fiat a numerus quadratus D. Et quia A, multiplicans numeros A, & B producit numeros D, & C, b erunt producti D, & C inter ſe, vt multiplicati A, & B; ſed c inter A, & B cadit vnus medius proportionalis, eo quod ſunt plani ſimiles; Ergo d inter D, & C vnus medius proportionalis cadet, qui ſit E: Cùmque D, E, C continuè proportionales ſint, & prior D quadratus ſit, erit e poſtremus numerus C quadratus quoque.

A 6	H 24	B 96
D 36	E 144	C 576

Secũdò ex multiplicatione numeri A in B producatur quadratus

dratus numerus C. Dico A, & B ſimiles planos eſſe. Fiat *f* rurſus ex A in ſe quadratus numerus D. Erit igitur *g* quadratus numerus D ad quadratum C, nempe producti in eadem proportione, quam multiplicati A ad B, ſed *h* inter quadratos D, & C cadit vnus medius proportionalis: Igitur inter A, & B vnus medius proportionalis cadet qui ſit H; ideoque *i* numeri A, & B ſimiles plani erunt. Quod erat oſtendendum.

f def. 10 huius. g pr. 7. huius. h prop. 32. huius. i pr. 37. huius.

COROLLARIVM.

Conſtat numerum productum ex multiplicatione duorum quadratorum, quadratum eſſe; eo quod quadrati numeri plani ſimiles ſunt.

PROPOS. XXXIX. THEOR. XXIX.

Eucl. 3. 4. 5. 6. IX.

Numerus productus ex multiplicatione cubi numeri in ſe ipſum, vel in alium cubum, erit quoque cubus numerus. Et ſi ex multiplicatione alicuius numeri in ſe ipſum, vel in aliquem cubum numerum procreatur numerus cubus, & ille cubus erit.

Sit primò numerus A cubus, & vt vnitas X ad A, ita fiat A ad B. Dico numerum B productum ex A in ſe cubum eſſe. Sit C latus cubi A, & *a* ex C fiat numerus D; Erit igitur D quadratus numeri C; ideoque *b* ex multiplicatione numeri C in D efficietur numerus cubus A; Quare vnitas X, & C, D, A continuè proportionales ſunt. Eſtque vnitas X ad A, vt numerus A ad B; Igitur *c* inter A, & B duo medij proportionales E, F cadent, quot ſunt numeri C, & D medij in continua proportione inter X, & A poſiti: Cùmque A, E, F, & B continuè proportionales ſint, ſitq; prior A numerus cubus, erit *d* quartus B cubus quoque.

A 8 E 16 F 32 B 64
D 4
C 2
X 1

a def. 9 & 10. huius. b def. 11. huius. c prop. 28. huius. d cor. prop. 36. huius.

Secundò ex multiplicatione cubi numeri A in numerum cubum B fiat numerus C. Dico productum numerum C cubum eſſe. Rurſus ex *e* A cubo in ſe ipſum fiat numerus D: Erit igitur *f* D cubus: Et quoniam idem numerus A multiplicans duos numeros A, & B efficit duos nu-

A 8 B 27
D 64 C 216

e def. 11. huius. f par. 1. huius pr.

Secundò dico numerum C quartum ab vnitate cubum eſſe, & duos intermittẽtes, omnes, vt eſt numerus F, &c. Quoniam vt vnitas X ad A, ita eſt A ad B, & ita B ad C, c erit C cubus genitus ex triplici multiplicatione lateris A; Cùmque inter C, & F intercedant duo medij proportionales D, & E, ſitque prior C oſtenſus cubus, d erit quartus F proportionalis, cubus quoque.

X. A 2 B 4 C 8
D 16
F 32
F 64 M

c def. 11. huius.
d cor. prop. 36. huius.

Tertiò dico ſeptimum ab vnitate veluti eſt F, cubum ſimul, & quadratum eſſe, & ſic quinque intermittentes, omnes. Quoniam e numerus F ſeptimus ab vnitate oſtenſus eſt quadratus, & ſimiliter f F cubus oſtenſus eſt. Igitur F cubus ſimul, & quadratus eſt. Continuentur poſtea poſt numerum F ſex alij numeri continuè proportionales in eadem ratione, in qua eſt X ad A, vel A ad B, ita vt inter F, & poſtremum M quinque medij numeri proportionales intercedant; propterea, quia M ſeptimus eſt ab ipſo numero F, erit g quadratus, & ſimiliter cubus. Quare patet propoſitum.

e par. 1. huius pr.
f par. 2. huius pr.
g par. 1. & 2 huius pr.

PROPOS. XLI. THEOR. XXXI.

Eucl. 9. IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & qui eſt poſt vnitatem ſit quadratus, erunt reliqui omnes quadrati, At ſi ille, qui eſt poſt vnitatem, ſit cubus, reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, &c. Et primò ſit numerus A proximus vnitati quadratus. Dico reliquos omnes quadratos eſſe. Quoniam a tertius ab vnitate, vt eſt B, & vnum intermittentes, omnes, vt D, & F quadrati oſtenſi ſunt; & ponitur A quadratus, atque tres numeri A, B, C continuè proportionales. Igitur b tertius C quadratus quoque erit: Similiter E tertius poſt quadratum C, erit quoque quadratus, & ſic reliqui omnes quadrati erunt.

X 1 A 4 B 16 C 64
D 256
E 1024
F 4096

a pr. 40 huius.
b cor. prop. 36. huius.

Secũdò ſit A proximus vnitati cubus. Dico reliquos omnes cubos eſſe. Quoniam vt vnitas X ad A, ita eſt A ad B: c Igitur ex multiplicatione cubi A in ſe ipſum efficietur numerus cubus

c prop. 39. huius.

bus B. Rurſus quia numerus C quartus proportionalis ab vnitate producitur ex multiplicatione numeri A in B, ſuntque A, & B cubi; Igitur [d] productus C cubus quoque erit. Similiter quia vt vnitas X ad A, ita eſt C ad D; erit [e] productum ex ſecundo A in tertium C æquale producto ex vnitate X in quartum D; propterea numerus D producetur ex multiplicatione cubi numeri A in cubum numerum C; & propterea [f] D cubus erit. Simili ratione numerus E producitur ex multiplicatione cubi numeri A in cubum numerum D; & propterea productus E cubus quoque erit, & ſic reliqui omnes. Quare patet propoſitum.

d prop. 39. huius.

e pr 8. huius

f prop. 39. huius.

X 1	A 8	B 64	C 512
			D 4096
			E 32768
			F 262144

Eucl. 10. IX.

PROPOS. XLII. THEOR. XXXII.

Si fuerint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales, & vnitati proximus non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes. At ſi proximus vnitati non ſit cubus, neque vllus alius præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes, omnes, cubus erit.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, &c. Et primò, proximus vnitati A, non ſit quadratus. Dico neque alium vllum quadratum eſſe præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes. Si enim hoc verum non eſt, ſit numerus C, ſi fieri poteſt, quadratus; Cùmque [a] numerus B ſit quadratus, cùm tertius ſit ab vnitate, pariterque D quadratus ſit, cùm tertius ſit à quadrato numero B, ſitque C ad D, vt A ad B, erit [b] inuertendo B ad A, vt D ad C: Quare numerus B ad A eandem proportionem habet, quam quadratus numerus D ad quadratum numerum C, eſtque B quadratus; Igitur [c] numerus A, proximus vnitati, quadratus quoque erit, quod eſt contra hypotheſin: Non igitur numerus C quadratus erit; & ſic reliqui alij in locis paribus poſiti.

a prop. 40. huius.

b pr. 9. lib. 3

c cor. prop. 36. huius.

X 1	A 3	B 9	C 27
			D 81
			E 243
			F 729

Secundò ſit A, proximus vnitati, non cubus. Dico nullum alium eſſe cubum præter quartum ab vnitate, & duos intermitten-

mittentes, omnes, vt ſunt C, F, &c. Si enim hoc verum non eſt ſit D cubus, ſi fieri poteſt. Et quia *d* vt A ad cubum numerum C, ita eſt D ad F (cùm inter eos ſinguli medij proportionales intercedant) habebit *e* inuertendo cubus C ad A eandem proportionem, quam cubus numerus F ad cubum numerum D; & propterea *f* numerus A vnitati proximus cubus quoque erit, quod eſt contra hypotſin: Non igitur numerus D cubus erit. Eadem ratione nullus alius numerus cubus erit prǽter eos, qui in locis determinatis collocati ſunt. Quod erat oſtendendendum.

d cor 3. pr. 19. lib. 3.
e pr. 9 lib. 3
f pr. 32. & cor pr. 36. huius.

PROPOS. XLIII. THEOR. XXXIII.

Eucl. 11. & 12. IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint; vnitas & quilibet minor ǽquè metientur numeros maiores ǽquè remotos; & quilibet primus numerus poſtremum metiens, etiã eum, qui vnitati proximus eſt, metietur.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F. Dico primùm quemlibet minorem numerum B eandem partem eſſe numeri maioris F atque eſt vnitas pars numeri D ǽquè recedentis ab ea. Quoniam *a* ex compoſitione ordinata, vt eſt X ad D: ita eſt B ad F, propterea quod vtręquę proportiones quadruplicatę ſunt ſimplicium proportionum C ad D, vel X ad A, & eſt vnitas numeri D pars: Igitur *b* B ipſius F eadem pars erit, ac eſt vnitas X ipſius D. Quod erat oſtendendum.

a prop. 19. lib. 3.
b def. 8 lib. 3.

Secundò primus numerus H metiatur vltimum F. Dico H ipſum A metiri. Si enim hoc verum non eſt, erit *c* H ad A primus, cùm H primus numerus ſupponatur: Cùmque *d* B fiat ex multiplicatione A in ſe, eo quod eſt vt X ad A, ita A ad B, erit *e* B ad H primus. Et quia ambo A, & B ſunt ad numerum H primi, *f* atque C fit ex ductu A in B, eo quod eſt vt X ad A, ita B ad C; Igitur *g* C ad H primus eſt quoque: Cùmque duo numeri A, & C ad ipſum H primi ſint, & *h* gignitur numerus D ex multiplicatione A in C, eo quod X ad A eſt vt C ad D: Igitur H ad ipſum D primus eſt; eadem ratione H primus erit ad E & ad F. Quare *i* numerus

X 1 A 6 B 36 C 216
H 3 D 1296
E 8776
F 526 S 6

c pr. 4. huius.
d def 9. & 10. huius.
e cor pr 13. huius.
f def 9. & 11. huius.
g prop 13. huius.
h pr 8 huius.
i conu pr. 4. huius.

numerum B. Tandem quoties E metitur B, toties X metiatur ipſum F. Vnde, vt prius F menſurabit numerũ B, & multiplex erit ipſius A. Et quia idem numerus B procreatur ex ductu E in F, atque ex ductu A in ſe ipſum *k* erit vt A ad F, ita E ad A; *k pr. 9. huius.* Sed A metitur ipſum F: Igitur E metitur ipſum A, maior minorem numerum primum, quod eſt impoſſibile. Quapropter nullus alius numerus præter A, B, C menſurabit maximum numerum D. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. XLV. THEOR. XXXV. *Eucl. 15. IX*

Si tres numeri continuè proportionales minimi fuerint omnium cum ipſis eandem rationem habentium, duo quilibet ſimul ſumpti ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C continuè proportionales minimi omnium cum eis eandem rationem habentium. Dico primo loco A, & B ſimul ſumptos ad ipſum C primos eſſe. Reperiãtur *a* duo numeri D, & E minimi in ratione A ad B, aut B ad C, *a prop. 16. huius.* & fiat F æqualis D, & E ſimul ſumptis, atque G ſit quadratum ipſius F. Manifeſtum eſt (ex ijs, quæ dicta ſunt in propoſitione 24 & 25 huius) vnitatem X ad D eſſe, vt D ad A, & vt X ad D, ita eſſe E ad B, atque vt X ad E, ita eſſe E ad C & D ad B. Vnde conſtat quod, *b* vt vnitas X ad D, ita ſunt D, & E *b prop. 15. lib. 3.* ſimul, ideſt F, ad A, & B ſimul. Et quoniam D, & E minimi ſunt in ſua proportione, erunt *c* inter ſe primi; ideoque *d* D, & *c pr. 6. huius.* E ſimul ſumpti, ideſt F ad ipſum E primus erit. Eſt verò D ad *d pr. 5. huius.* E etiam primus: Igitur D, & F primi ſunt ad eundem numerum E: Vnde *e* productus ex D in F, ideſt A vnà cum B, primi erunt ad productum ex E in ſe ipsũ, ideoque numerus C, primus erit ad aggregatum ex A, & B. *e prop. 13. huius. & cor. eius.* Dico ſecundò duos extremos A, & C, ſimul ſumptos, ad ipſum B intermedium primos eſſe. *f pr. 5. huius.* Quoniam D, & E primi ſunt inter ſe: Ergo *f* eorum ſumma F ad quemlibet ipſorum D, vel E prima eſt: Igitur *g* productum ex D in E, ſcilicet numerus B, primus quoque erit ad G productum ex F in ſe ipſum. *g pr. 13. huius, & cor. eiuſd.* Et quia, vt dictum eſt, X ad D eſt, vt F ad ſummam A, B, & vt X ad E, ita *h cor. pr. 22 lib. 3.* eſt F ad ſummam B C: Ergo *h* vt X ad D ſimul cum E, ideſt ad F, ita eſt F ad A, B, vnà cum B, C. *i pr. 7 & 4. lib. 3.* Quare *i* numerus G productus

A 9	B 12	C 16
D 3		E 4
	X 1	
	F 7	
	G 49	

ex

ex F in ſe ipſum ęqualis eſt A, & C vnà cum duplo intermedij B: Igitur A, & C vnà cum duplo ipſius B, primi erunt ad numerum B, ſicuti B, & G primi erant; & k eorum differentia; nimirum ſumma numerorum A, C, & B prima erit ad numerum B: & rurſus horum differentia; ſcilicet numeri A, & C, ſimul ſumpti, ad ipſum B primi erunt. Quod erat propoſitum.

k pr.5. huius.

COROLLARIVM.

Patet ex hac propoſitione numerū quadratum maioris lateris ſuperare quadratum lateris minoris, & exceſſum ęqualem eſſe quadrato differentiæ laterum, cum duplo medij proportionalis inter duos quadratos ex differentia, & ex minori latere factos. Nam quadratus G lateris maioris F ęqualis fuit quadratis A, C cum duplo medij proportionalis B: ergo exceſſus quadrati G maioris lateris F ſupra quadratum A ex latere minori D, ęqualis eſt quadrato C ex differentia E cum duplo ipſius B medij proportionalis inter A, & C.

SCHOLIVM.

Non erit difficile ex hac propoſitione reperire numerum quadratum, cuius duæ portiones, aut vna tantùm, aut neutra ſit numerus quadratus.

E 25
R 8 S 17
A 9 H 16 O 4 N 1
C 5 D 4 X 1

Primò ſumatur quilibet numerus quadratus impar A, & ſecetur in duas portiones C, D vnitate inter ſe differentes, & l fiat E quadratus ipſius C, & H quadratus ipſius D. Dico quadratos A, & H ęquales eſſe quadrato E. Fiat vnitatis X quadratus N, qui vnitas erit, m & fiat productus ex X in D, ſitque O, qui æqualis erit numero D. n Quoniam quadratus ex ſumma vnitatis X, & D æqualis eſt quadratis N, & H, cum duplo producti O; eſtque C æqualis ſummæ X, D: Ergo quadratus E æqualis eſt quadratis N, H cum duplo producti O; eſt verò vnitas N, ſeu X cum duplo numeri O, ſeu D æqualis numeris C, & D, ideſt numero A: Ergo quadratus E ęqualis eſt quadratis H, & A.

l def.10. huius.
m def 9. huius.
n ex pr.45. huius.

Secundò numerus R deficiat ab A vnitate, & numerus S excedat H vnitate. Patet numeros R, S ęquales eſſe duobus numeris quadratis A, & H. Dico R, S non eſſe numeros quadratos. Si enim quadrati eſſent o vnitas, quæ eſt differentia quadratorum A, & R ſiue H, & S ęqualis eſſet, non dùm quadrato vnitatis, ſed etiam duplo numeri medij proportionalis inter vnitatem, & minorem numerum quadratum, quod eſt impoſſibile.

o cor.pr. 45 huius.

Tertiò

Tertiò ſumatur quilibet p numerus primus impar A, qui quadratus non erit, q cùm à nullo latere numerus primus metiri poſſit; & facta r eadem conſtructione, erit eadem ratione quadratus numerus E æqualis quadrato numero H, & non quadrato A.

E 16
A 7 H 9 O 3 N 1
C 4 D 3 X 1

p ex pr. 22. huius.
q pr. 1. def. 10. huius.
r par. 1. huius ſchol.

PROPOS. XLVI. THEOR. XXXVI.

Eucl. 32. 33 34. IX.

Quilibet numerus à binario duplus, pariter par eſt tantùm. Et ſi dimidium imparē habuerit, pariter impar eſt tantùm. Et ſi dimidium habuerit parem, & non fuerit à binario duplus, pariter par, & pariter impar erit.

Primò ſint quòtcunque numeri A, B, C, D à binario A dupli. Dico quemlibet eorum C eſſe pariter parē tantùm. Quoniam A, B, C, D ſunt ab vnitate X continuè proportionales, & A vnitati proximus, primus numerus eſt (cùm binarius ab vnitate tantùm metiatur): Igitur a nullus alius numerus præter ipſos A, B, C metietur quemlibet ipſorum, vt C: Suntque b omnes A, B, C, D pares: Ergo tantummodo par numerus per parem numerum metietur numerum C; ideoque c quilibet ipſorum C pariter par eſt tantùm.

X 1 A 2 B 4 C 8 D 16

a prop. 44. huius.
b def. 3. huius.
c def. 5. huius.

Secundò numeri A ſit ſemiſſis B impar, & C ſit binarius, ita vt d impar B metiatur A per parem C. Dico A eſſe tantùm pariter imparem. Si enim hoc verum non eſt, erit quoque numerus A pariter par. e Quare numerum A metietur aliquis par numerus D per alium numerum parem E: Ergo f ex multiplicatione D in E fit numerus A; ſed idem A producitur ex B in C: Ergo g vt D ad B, ita erit C ad E; ſed binarius C neceſſariò pars eſt, & metitur parem numerum E (eo quod par numerus eſt aggregatum pluriū binariorum): Igitur par numerus D ipſum B imparem metitur aliquoties, quod eſt impoſſibile. Quare numerus A tantummodo eſt pariter impar.

D E
A 10
B 6 C 2

d def. 6. huius.
e def. 5. huius.
f cor. pr. 9. huius.
g pr. 8. huius.
h def. 3. & 4. huius.

Tertiò ſit numerus A par, cuius dimidium B ſit par, & A non ſit a binario duplus. Dico A pariter parem eſſe, & pariter imparem. Fiat binarius D ad vnitatem X, vt A ad eius ſemiſ-

i def. 9. huius. ſem B. Igitur i ex multiplicatione paris D in parem B efficitur A, & k propterea A pariter par erit. Poſtea ſit C ſemiſſis ipſius B, & ſic vlterius, peruenietur tandem ad imparem numerum, aliàs non eſſet A à binario non duplus; Sit iam C numerus impar, & fiat E duplus ipſius D, & ſic vlterius, quouſque inuenti termini X, D, E tot ſint, quot ſunt numeri C, B, A, ſuntque tam hi, quàm illi ſucceſſiuè in proportione ſubdupla: Ergo l vt vnitas X ad E, ita eſt C ad A; ideoque m ex multiplicatione numeri C in E, procreatur numerus A, eſtque E par, cum ſit à binario duplus, & C erat impar. Ergo A genitus ex pari E in imparem C, erit n quoque pariter impar. Quę erant oſtendenda.

k def. 5. huius.

A 20	E 4
B 10	D 2
C 5	X 1

l pr. 19 lib. 3

m def 9 huius.

n def. 6. huius.

SCHOLIVM.

Eucl. 21. 22. 23 24. 25. 26. 27. 28. & 29. IX.

Decem propoſitiones à vigeſima ad trigeſimam libri noni facilè ex dictis colligi poſſunt. Nam ſi pares numeri componantur, aut multiplicentur, aut alter ab altero tollatur, pares numeri efficientur, cùm o pares omnes à binario menſurentur; Et ſi pari numero addatur, vel auferatur impar, compoſitum p, aut reſiduum impar erit; at ſi ab impare tollatur, vel ei addatur impar, efficietur par, eo quod duo impares excedunt duos numeros pares duabus vnitatibus, ſcilicet binario, ſeu pari. Tandem impar numerus, multiplicans imparem, efficit numerum imparem, eo quod multitudo numerorum imparium multiplicatorum excedit totidem numeros pares tot vnitatibus, quot ſunt ipſi numeri multiplicati; Sed numeri multiplicati imparem multitudinem componunt. Igitur productum, præter pares numeros, habet etiam imparem; & propterea totus impar erit.

o def 3 huius.

p def. 3 & 4. huius.

PROPOS. XLVII. THEOR. XXXVII.

Eucl. 35. IX.

Si ſint quotcunque numeri continuè proportionales, quorum prior ſit omnium minimus, erit differentia primi, & ſecundi ad primum, vt differentia minimi, & maximi ad omnes maximum pręcedentes.

Sint continuè proportionales numeri A, B, C & D, quorum maximus ſit D & minimus A, ſitque exceſſus ſecundi B

ſupra

ſupra A numerus E, & exceſſus tertij C ſupra ſecundum B ſit H, atque G ſit exceſſus maximi D ſupra C, & fiat F æqualis ipſis E, H, G, ſimul ſumptis; patet exceſſum maximi D ſupra minimum A æqualem eſſe numeris E, H, G, ſimul ſumptis; ſiue numero F. Dico numerum E ad A eandem rationem habere, quam F ad numeros C, B, A, ſimul ſumptos. Quoniam inuertendo [a] D ad C eandem rationem habet, quam C ad B, & quam B ad A; erit [b] diuidendo duorum D, C differentia G, ad C, vt H differentia duorum C, B ad B, & vt differentia E ad A: & [c] omnes antecedentes G, H, E ſimul, ideſt F ad omnes conſequentes C, B, A ſimul ſumptos, eandem rationem habebunt, quam vnus E ad vnum A. Quod erat propoſitum.

E 6	H 18	G 54	
A 3	B 9	C 27	D 81
			F 78

a pr. 9 lib. 5
b pr. 13. lib. 3.
c pr. 15. lib. 3.

PROPOS. XLVIII. PROBL. XI.

Euclid. 36. IX.

Numerum reperire, qui æqualis ſit omnibus partibus eius ſimul ſumptis. Vocetur talis numerus Perfectus.

Ponantur ab vnitate X tot numeri A, B, C, D in proportione dupla, quouſque ex omnibus ſimul ſumptis componatur numerus E, qui ſit primus; & vt X ad D, ita fiat E ad F. Dico numerum F æqualem eſſe omnibus partibus eius, ideſt æqualem eſſe vnitati, & alijs omnibus numeris, qui ipſum F menſurare poſſunt. Quot ſunt numeri A, B, C, D, tot numeri fiant ab E in dupla proportione, ſintque E, G, H, I. Et quia A, B, C, D eandem rationem habent, quam E, G, H, I erit ex [a] compoſitione ordinata, vt A ad D, ita E ad I; erat autem vt X ad D, ita E ad F: Igitur [b] vt X ad eius duplum A ita erit I ſubduplus numeri F. Quare E, G, H, I, F deinceps dupli ſunt. Detrahatur ex G ſecundo prior numerus E, ſitque exceſſus M, qui æqualis erit ipſi E, propterea quod G ponitur duplus ipſius E; pariterque ex poſtremo F detrahatur prior numerus E, ſitque exceſſus N: Igitur [c] vt M ad E, ita erit N ad numeros E, G, H, I, ſimul ſumptos: Eſtque M æqualis E: Igitur [d] N æqualis eſt ipſis E, G, H, I ſimul ſumptis: Erat autem E æqualis ip-

a pr. 19. lib. 3.
b pr. 21. lib. 3.
c pr. 47. huius.
d cor. 1 pr. 16. lib. 3.

 ſis X,

X 1 E 31
M 31
A 2 G 62
R
B 4 H 124
O
C 8 248
N 461 I
D 16 F 496

ſis X, A, B, C, D: Ergo duo numeri ſimul ſumpti N, & E, ideſt numerus F æqualis erit omnibus X, A, B, C, D, E, G, H, I ſimul ſumptis: Cumque vt X ad D, ita ſit E ad F, erit e permutando, vt vnitas X ad E, ita D ad F; & propterea f D, atque adeo g reliquæ omnes eius partes X, A, B, C metientur numerum F. Poſtea quia I metitur ipſum F, cùm ſit eius ſemiſſis, metientur h quoque reliqui H, G, E deinceps ſubdupli eundem numerum F: Quapropter vnitas X, & ſinguli numeri A, B, C, D, E, G, H, I metientur numerum F. Dico iam quòd nullus alius numerus, pręter A, B, C, D, E, G, H, I, metitur ipſum numerum F. Ponatur numerus O, qui ſit quelibet menſura numeri F, & vt O ad F, ita fiat vnitas X ad R; i Quare idem numerus F efficitur ex multiplicatione numeri E in D, atque ex multiplicatione R in O: Igitur k vt E ad R, ita erit O ad D; l ſed D non mēſuratur niſi à numeris A, B, C, eo quod binarius A vnitati proximus primus eſt, ergo O diuerſus ab ipſis A, B, C, non metitur D; & m ideo E non metietur ipſum R. Cumque numerus E ſit primus, erit n quoque ad ipſum R primus; & ideo o E, R in ſua proportione minimi erunt, & propterea, toties E metietur ipſum O, quoties R menſurat ipſum D; Sed numerū D nullus alius menſurare poteſt prætet aliquem pręcedentium A, B, C, vt dictum eſt: Igitur numerus R ęqualis erit, aut ipſi A, vel B, vel C: Ponatur ergo R ęqualis numero B. Et quia vt B ſiue R ad D tertium proportionalem, ita p eſt E ad H, cùm tam illę, quam hę proportiones duplæ ſint: Eſtque q permutando vt R ad D, ita E ad O; Igitur r numerus O æqualis eſt ipſi H. Quapropter quilibet numerus O, dimetiens numerum F diuerſus eſſe non poteſt ab ipſis A, B, C, D, E, H, I: & propterea numerus F tantummodo menſuratur à numeris A, B, C, D, E, G, H, I; eſtque numerus F æqualis vnitati X, & omnibus numeris A, B, C, D, E, G, H, I. Igitur patet propoſitum. Vocetur numerus F, ſupradicta lege conflatus, numerus Perfectus.

e pr. 12. lib. 3
f cor. pr. 7. huius.
g ax. 1. lib. 3.
h ax. 1. lib. 3
i def. 9. huius.
k pr. 8. huius
l prop 44. huius.
m def. 8. lib. 3.
n pr. 4. huius
o pr. 6. huius
p pr. 19. lib. 3
q pr. 12. lib. 13.
r pr. 4. lib. 3.

Finis Libri octaui.

LIBER NONVS.

Poſt expoſitionem elementorum Arithmetices conſiderantur in hoc poſtremo libro ſymmetrię quantitatum, quæ obſcurè ab aliquibus, ab omnibus verò per quam prolixè expoſitę fuerunt, & methodo non vniuerſali; Nam agunt tantummodo de commenſurabilitate, & incommenſurabilitate linearum, & ſuperficierum planarum; at ego compendiosè hanc mathematices partem reddo vniuerſaliorem; Siquidem cuilibet quantitatis generi conuenire eaſdem proprietates oſtendo.

DEFINITIONES.

I.

Si fuerint tres quãtitates eiuſdem generis, & vt prima (quę locum vnitatis habeat) eſt ad ſecundam, ita fiat tertia ad quartam, vocabitur quarta proportionalis: Productum ex ſecunda in tertiam.

II.

Et ſi fuerint duę quantitates, & quam proportionem habet prima (quę vt vnitas vſurpetur) ad ſecundam, ita ſit ſecunda ad tertiam, vocabitur tertia proportionalis Quadratum ipſius ſecundę, aut Potentia, vel Quantitas quadrata. Et ſecunda vocetur Latus prędictę quadratę quantitatis.

Franciſcus Maurolycus Meſſanenſis, qui præcedenti ſæculo Mathematicas ſcientias, barbarie corruptas, ſuo priſtino nitori primus omnium reſtituit, præter alia ingenioſiſſima eius inuenta, hanc partem, quæ de quantitatibus aſymmetris agit, mirificè amplıauit, & præcipuè animaduertit operationes numericas adaptari poſſe quibuslibet quantitatibus eiuſdem generis, ſiue commenſurabilibus, ſiue non: Tanti igitur viri veſtigia ſectando conabor breuiori, & clariori methodo partem hanc Mathematices pro viribus illuſtrare. Itaque licet numeri plani eaſdem paſſiones habere videantur, quas habent ſuperficies planę rectangulæ, nihilominus valde differunt inter ſe. Nam plani numeri R, & H geniti ex D ducta in A & B, habent altitudinem communem D, & baſes eorum ſunt A, & B, &

eſt

a pr. 7. lib 8 | b pr. 1. lib. 4 | c def 9 lib. 8

R 15 H 20
A 3 B 4
D 5
X 1

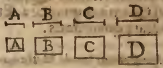
eſt a planus numerus R ad planum H, vt baſis A ad baſim B, & hoc etiam b verificatur in ſuperficiebus rectangulis; ſed differunt, quia c vnitas X ad altitudinem, ſeu multiplicantem D habet proportionem aliquam, & eandem, quam baſis, ſeu multiplicatus numerus A ad planum; ſeu productum numerum R; hoc autem in ſuperficiebus rectangulis locum non habet; Nam neque punctum ad altitudinem D, neque baſis A ad ſuperficiem R proportionem habere poteſt vllam: Itaque in numeris vnitas, altitudo, baſis, & planum ſunt eiuſdem generis, ideſt ſunt omnes quantitates lineares. Vnde colligitur, quod in quibuslibet quantitatibus eiuſdem generis vſum habere poteſt operatio analoga multiplicationi; Propterea quod d qualibet proportio duarum quantitatum eiuſdem generis, vt motuum, vel temporum, &c. eſt commenſurabilis aut incommenſurabilis, primam duo numeri, ſecundam duę rectæ lineæ exprimere poſſunt, vt ſi pondus ponderis partes fuerit e reperiri poſſunt duo numeri eandem proportionem habentes, & è conuerſo communis menſura duorum ponderum multiplicata dabit terminum ſecundum proportionis: At ſi fuerit incommenſurabilis f qualibet recta linea ad aliquam aliam eandem proportionem habebit, & ideo qualibet proportio duorum ponderum declarari, & exponi poteſt in duabus rectis lineis, & ſic vt pondus ad pondus ita intelligi, aut poni poteſt quęlibet recta linea ad aliam rectam lineam, & è conuerſo, Itaque ſi fuerint tres quantitates A, B, C eiuſdem generis, ſiue ſint magnitudines, ſiue motus, aut tempora, &c. &, vt A ad B, ita ponatur C ad quartam proportionalem D; Vocatur D quantitas Producta ex B in C; Et B & C vocantur Latera producti D. Si verò fiat, vt A ad B, ita B ad D: vocabitur tertia proportionalis D quantitas Quadrata, ſeu Quadratum abſolutè, & B erit eius latus. Itaque hæ operationes ſunt analogæ multiplicationi numerorum; Nam A tenet locum vnitatis, B locum multiplicantis, ſeu altitudinis, & C locum multiplicati, ſeu baſis, & D vicem gerit plani multiplicati. Tandem animaduertendum eſt nomine Quadrati alicuius lineę intelligi debere g ſuperficiem quadratam ſupra definitam; At quando dicitur quantitatis Quadratum tunc propriè ſignificatur quantitas analoga quadrato, ſiue tertia proportionalis in hac definitione expoſita: At generaliter nomen quantitatis quadratę vſurpabitur in vtraque ſignificatione, & comprehendet, nedum ſuperficiem planam quadratam, ſed etiam quantitatem quadratam; & nomen Producti



d def. 7. lib. 3

e def 2 & pr. 10. lib. 8

f ax. 2. lib. 3 & pr. 11. lib. 4.



g pr. 34. lib. 1

ducti duarum quantitatum ſignificabit, nedùm parallelogrammum rectangulum, ſed etiam quartam quantitatem proportionalem D paulò ante definitam; & latera producti ſignificabunt nedùm lineas rectas continentes rectum angulum ſpatij plani, ſed etiam ſecundam B, & tertiam quantitatem E, quæ cum vnitate A, & producto D quatuor proportionales conficient.

III.

Lineę, ſeu quantitates ſimplices eiuſdem generis habentes communem aliquam menſuram, vocentur longitudine Cõmenſurabiles: Si verò nulla linea, vel quantitas reperiri poteſt, quę communis menſura ſit illarum linearum, vel quantitatum, vocentur longitudine Incommenſurabiles.

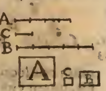
V.

Lineę, ſeu quantitates eiuſdem generis, quarum quadrata eadem quantitas cõmuni menſura metitur: vocentur potentià Commenſurabiles; Si verò nulla quantitas reperiri poteſt, quæ vtrunque quadratum metiatur; vocentur quantitates, vel lineę, quę latera eorum ſunt, potentià Incommenſurabiles.

Vt ſi duarum linearum, vel quantitatum A, & B fuerit C communis menſura, ideſt a A fuerit partes ipſius B: dicentur A, & B longitudine Commenſurabiles; ſi verò b nulla menſura communis reperiri poteſt ipſarum A, & B: vocentur A, & B longitudine Incommenſurabiles: Si poſtea quadrati ex A, & quadrati ex B reperiri poteſt aliqua communis menſura, quę ſit quadratum ex C; Tunc vocantur latera A, & B potentià commenſurabilia. At ſi nullum quadratum reperiri poteſt, quod ſit communis menſura quadratorum ex A, & ex B; Tunc appellantur A, & B potentià incommenſurabiles: animaduertendum tamen eſt eiuſdem generis eſſe debere quantitates A & B; quod licet multoties in hoc libro non repetatur, ſemper ſubintelligi debet.

a def 3. lib. 3.

b ſchol. pr. 30. lib. 2.



AXIOMATA.

ex Pappo Alex.

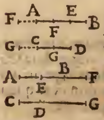
I.

Si inęqualibus ęquales addantur, vel auferantur, erit differentia priorum ęqualis differentię poſtremarum.

II.

II.

Et ſi ab ęqualibus inęqualia tollantur: differentia ablatarum ęqualis erit differentię reſiduarum.



Si enim A B ſit maior, quàm C D exceſſu E B, & ipſis A B, & C D addantur, vel auferantur ęquales F A, & G C: Pariter ſumma F B ſuperat ſummam G D, vel differentia F B ſuperat differentiam G D eodem exceſſu E B. Si poſtea ab ęqualibus A F, & C G auferantur inæquales A B maior, & C D minor, quarum exceſſus ſit E B. Manifeſtum eſt reſiduum B F deficere à reſiduo G D eodem defectu B E.

PROPOS. I. THEOR. I.

Quadratum ex aggregato duarum quantitatum æquale eſt ſummę quadratorum earundem quantitatum, & duplo producti ab eiſdem quantitatibus.

Sint duę quęlibet quantitates eiuſdem generis A, & B. Dico quadratum, cuius latus eſt ſumma quantitatum A, & B ęquale eſſe quàdrato ex A, quadrato ex B vnà cum duplo producti ex A in B. Sit X quantitas eiuſdem generis, quę vt vnitas ſupponatur, & a vt X ad A, ita ponatur A ad C, atq; vt X ad A, ita fiat B ad D: Igitur b A ad C erit, vt B ad D; & propterea c ſumma ipſarum A, & B ad ſummam conſequentium C, & D eandem proportionem habebit, quam vna A ad vnam C, ſeu quam X habet ad A. Ruſus vt X ad B, ita fiat B ad E, & vt X ad B, ita fiat A ad F: Quare, vt prius A, & B ſimul ſumptę, erunt ad E, & F ſimul ſumptas, vt vna B ad vnam E, ſeu vt X eſt ad B; Sed prius, vt eadem X ad A, ita erat eadem ſumma duarum A, & B ad aggregatum ex C, & D: igitur d quam proportionem habet X ad duas conſequentes ſimul A, & B eandem proportionem habebit eadem ſumma A, & B ad quantitates C, D, F, & E ſimul ſumptas: Quare e aggregatum ex C, D, F, & E: erit quadratum, cuius latus eſt ſumma quantitatum A, & B. Et quia vt X ad B, ita erat A ad F; Ergo f permutando, vt X ad A, ita erit B ad F; ſed prius vt eadem X ad eandem A, ita erat B ad D; Igitur

X
A B
C D F E

a def. 2. & 1. huius.
b pr. 7 lib. 3.
c pr. 15. lib. 3
d cor. pr. 22. lib. 3.
e def 2. huius.
f pr. 12. lib 3.

B ad g F, atque ad D eandem rationem habet; Et propterea F, & D h çquales erunt: Et eſt C quadratum ipſius A, atque E eſt quadratum alterius B. Igitur quadratum ex aggregato A, & B çquale eſt quadrato ex A, quadrato ex B, vnà cum duplo producti ex A in B. Quod erat oſtendendum.

g pr. 7. 5. 3.
h pr. 4. l. 3.

COROLLARIVM I.

Deducitur ex demonſtratione huius propoſitionis, quòd quantitates quadratç, ſcilicet illç, inter quas, & tertiam quantitatem ſingulç medię proportionales cadunt, ſunt in duplicata proportione laterum, ſeu mediarum proportionalium.

Nam i permutando vt A ad B, ita eſt C ad D, & vt eadem A ad eandem B, ita erat F, ſeu D, ad E: igitur k C, D, & E continuè proportionales ſunt in ratione A ad B; Et l propterea quadratum C ad quadratum E duplicatam rationem habebit lateris A ad latus B; & è conuerſo.

i pr. 12. l. 3.
k pr. 7. l. 3.
l pr. 19. l. 3.

COROLLARIVM II.

Patet etiam ſi quatuor quantitates quadratç fuerint proportionales, eſſe eorũ latera proportionalia, & è conuerſo.

Nam ſubduplicatę m proportiones earundem proportionum eędem ſunt quoque inter ſe, & è conuerſo.

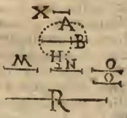
m cor. 3. pr. 19. l. 3.

PROPOS. II. THEOR. II.

Quadratum differentię duarum quantitatum inęqualium æquale eſt exceſſui ſummæ duorum quadratorum ex eiſdem quantitatibus ſupra duplum producti ex eis.

Sit quantitas A maior, & B minor, earumque differentia ſit H; & a vt X, loco vnitatis poſita, eſt ad A, ita fiat A ad R; pariterque fiat O quadratum ipſius B, & M ſit quadratum ipſius H, atque N ſit productum ex H in B. Quoniam b quadratum R lateris A, ſeu aggregati duarum quantitatum H, & B, çquale eſt quadrato M, quadrato O, vnà cum duplo producti N; Ergo addito communi quadrato O; erunt duo quadrata R, & O ſimul ſũpta çqualia quadrato M, duplo produ-

a def. 2. & 3. huius.
b pr. 1. huius.



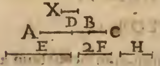
cti N, & duplo quadrati O, ſimul ſumptis; Sed quia vt eadem X ad eandem B, ita eſt H ad N, & ita B ad O: Ergo *c* duę H, B ſimul, ideſt A ad N O ſimul, erunt, vt B ad O, ſeu vt X ad B; Et propterea *d* N, O erit productum ex B in A: Igitur quadratum R vnà cum quadrato O æquale erit quadrato M, vnà cum duplo producti ex A in B; Et propterea ſumma quadratorum ex A, & B, ſcilicet R, & O ſuperat duplum producti ex A in B, eſtq; exceſſus quadratum M. Vnde M, quod eſt quadratum ipſius H, differentię duarum inęqualium quantitatum A; & B, æquale eſt differentię, ſeu exceſſui ſummę quadratorum ex A, & ex B ſupra duplum producti ex A in B. Quod erat oſtendendum.

c pr. 7. & 15 l. 3.
d def. 1. huius.

PROPOS. III. THEOR. III.

Differentia duorum quadratorum ęqualis eſt producto ex aggregato, & ex differentia laterum eorundē quadratorum.

Sit maior quantitas A B, minor verò B C, & ex maiori A B ſecetur B D ęqualis minori B C: Ergo ipſarum A B, & B C ſumma erit A C, differentia verò erit A B; Et fiat *a* vt X (quæ vnitatis locum habet) ad A D, ita A D ad E, atque vt X ad eandem A D, ita fiat D B ad F, & tertiò vt X ad A D, ita fiat B C ad quartam proportionalem, quę ęqualis *b* erit eidem F (cùm C B & B D ęquales ſint). Manifeſtum eſt tres *c* antecedentes A D, D B, & B C ſimul ſumptas habere ad omnes conſequentes E, & duplum F, ſimul ſumptas, eandem proportionem, quam vna A D habet ad vnam E, ſeu eandem quam X habet ad ipſam A D; Et propterea *d* E vnà cum duplo ipſius F erit productum ex differentia A D in ſummam A C laterum inęqualium A B, & B C. Dico iam exceſſum quadrati ex A B ſupra quadratū ex B C eſſe productum compoſitum ex E vnà cum duplo F. Fiat, vt X ad B C, ita B C ad H, erit *e* H quadratum lateris B C. Et quia *f* quadratum ex latere A B, compoſito ex duobus ſegmentis A D, & D B ęquale eſt quadrato ex A D, ſcilicet E, & quadrato ipſius D B, ſeu ei ęqualis B C, ſcilicet H, vnà cum duplo producti ex A D in D B, ſeu in B C, ſcilicet duplo ipſius F; & ſumma quadratorum E, & H vnà cum duplo producti F (ſcilicet quadratum

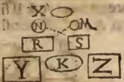


a def. 2 & 3. huius.
b prop. 7. & cor. 1. pr. 16 l. 3.
c pr. 15. l. 3
d def. 1. huius
e def. 2. huius
f pr. 1. huius

ex maiori A B) ſuperat ipſum H, ideſt quadratum minoris B
C, eſtque exceſſus compoſitus ex E cum duplo ipſius F: Igitur
exceſſus quadrati ex maiori A B ſupra quadratum minoris B
C eſt compoſitus ex E cum duplo F; Sed E cū duplo F ęquale
eſt producto ex differentia A D in aggregatum A C earun-
dem inęqualium A B, & B C. Igitur differentia quadratorum
ex A B, & ex B C ęqualis eſt producto ex differentia A D in
aggregatum A C earundem quantitatum inęqualium A B, &
B C. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

Ex his tribus propoſitionibus facilè colligitur verificari in reliquis quantitatibus, ea quæ in prima, & tertia propoſitionibus lib. II. oſtendit Euclides. Productum g enim ex altitudine A D in eandem A D, tanquam baſim fuit ipſa E; atque in baſim B D ducta fuit F, pariterque in B C ducta fuit altera F, & oſtenſum fuit, quod productum ex A D in aggregatum A C ęquale eſt producto E cum duplo F. Simili modo poſſunt reliquæ paſſiones hiſce quantitatibus adaptari, quæ h in numeris, & i in ſuperficiebus planis rectangulis oſtenſæ ſunt. Vt ſi fuerint quatuor quantitates proportionales eiuſdem generis M, N, R, & S, erit productum ex prima M in quartam S ęquale producto ex ſecunda N in tertiam R, & è conuerſo. Si enim ſumatur quælibet quantitas X, loco vnitatis, quę ſit eiuſdem generis cum illis, & k fiat vt X ad M, ita S ad productum Z, pariterq; fiat vt X ad N, ita R ad Y: erunt Z, & Y ęquales inter ſe. Nam ſi vt X ad N, ita fiat S ad K, erit l permutando, vt X ad S, ita N ad K, pariterq; permutando m vt eadem X ad eandem S, ita erit M ad Z; Ergo n M ad Z erit, vt N ad K; & iterum permutando erit Z ad K, vt M ad N. Eodem modo quia duæ rationes R ad Y, & S ad K ſunt eædem vni tertię rationi X ad N; Ergo R ad Y eſt, vt S ad K; Ergo permutando Y ad K erit, vt R ad S; ſed prius Z ad K erat, vt M ad N, ſeu vt R ad S. Igitur Z ad K eſt, vt Y ad eandem K. Et propterea o Z, & Y ęquales ſunt inter ſe. Eodem modo conuerſum demonſtrabitur. Et ſi fuerint tres quantitates proportionales, erit quadratum productum ex intermedia ęquale plano producto ab extremis. Itaque ſi eadem quantitas in duas alias producatur efficientur duæ quantitates productæ, quæ erunt inter ſe, vt producentes. Nam ex ductu N in R facta eſt Y, & ex ductu eiuſdem N in S facta eſt K: & oſtenſum eſt productum Y ad K habere eandem rationem, quā R ad S; & hęc ſunt veluti baſes, & N vicē gerit cōmunis altitudinis.



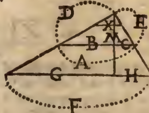
g pr. 3. huius.
h lib. 8.
i lib. 4. & 5.
k def. 1. huius.
l pr. 12. l. 5.
n pr. 9. l. 5.
o pr. 4. l. 5.

Similiter applicatio alicuius quantitatis producta ad aliquam aliam quantitatem eſt inuentio quartę proportionalis duorum laterum dicti producti, & tertię quantitatis. Vt ſi productum Z, cuius latera ſunt M, & S applicandum ſit ad latus R, fieri debet, vt R ad S, ita M ad N, eruntque M, & N noua latera eiuſdem producti Z. Non aliter ſi alicuius quantitatis quadratæ reperiri debeat eius latus; Debet tantummodo inueniri media proportionalis inter aſſumptam vnitatem, & quantitatem quadratam. Eodem modo reliquę paſſiones, quæ de figuris numericis oſtenduntur, poſſunt omnino quibuslibet alijs quantitatibus continuis adaptari.

PROPOS. IV. THEOR. IV.

Si fuerint duę quantitates inter quas, & inter earum ſummam mediæ proportionales poſitæ ſint: erunt quadrata ex poſtremis medijs proportionalibus, ſimul ſumpta ęqualia quadrato ex aggregato; atque productum ex eiſdē medijs proportionalibus æquale erit producto ex media proportionali inter quantitates datas & eorum ſummam.

Sint B, & C duę quęlibet quantitates eiuſdem generis, quarum ſumma ſit A, & inter B, & C ſit media proportionalis M, atque inter A & B ſit media proportionalis D, pariterque inter A, & C ſit media proportionalis E, & ſumpta X pro vnitate a fiat, vt X ad A ita A ad F, atque vt X ad A, ita fiat C ad H, pariterque vt X ad A, ita fiat B ad G; erit igitur H productum ex A in C; ſed b quadratū ex E æquale eſt producto ex A in C (cum E ſit media proportionalis inter A, & C): Ergo H eſt quadratum ipſius E. Similiter productum ex A in B, ſcilicet G ęquale erit quadrato mediæ proportionalis D. Oſtendendū modo eſt quadrata G, & H ſimul ſumpta ęqualia eſſe quadrato F; Quia vt X ad A, ita facta eſt C ad H, atque B ad G, eſtque A ad F, vt X ad A: Igitur c vt A ad F, ita ſunt duę B, & C ſimul ſumptæ ad duas G, & H ſimul ſumptas, ſed antecedentes ęquales ſunt inter ſe, nimirum A ipſis B, & C ſimul ſumptis: Igitur d conſequentes inter ſe ęquales erunt, ſcilicet F ipſis G, & H ſimul ſumptis. Quapropter quadratum ipſius A ęquale erit duobus quadratis ex D, & E, ſimul ſumptis.



a def. 2. & 1. huius.

b ſchol. pr. 3. huius.

c pr. 9. & 15 5.

d cor. 1. pr. 16. 5.

Sc-

Secundò Dico productum ex D in E æquale eſſe producto ex A in M. Quoniam A, D, & B proportionales ſunt, pariterque A, E, C continuè proportionales ſunt: Igitur [e] proportio extremarum B ad C duplicata erit proportionis ipſius D ad E; Eſt verò M media proportionalis inter B, & C; Igitur B ad [f] M erit, vt D ad E; quadratum [g] autem ex D ad productum ex D in E eſt, vt D ad E, propterea quod habent eandem altitudinem D; pariterque productum ex A in B ad productum ex A in M eandem proportionem habet, quam B ad M (cùm A ſit productorum communis altitudo): [h] Igitur quadratum ex D ad productum ex D in E eandem rationem habebit, quam productum ex A in B ad productum ex A in M; ſed [i] productum ex A in B æquale eſt quadrato ipſius D, mediæ proportionalis inter A, & B. Ergo [k] productum ex D in E æquale erit producto ex A in M. Quod erat oſtẽdendum.

A
D E
B M C

e cor. 1. pr. 3 huius.
f cor. 3. pr. 19. l. 3.
g ſch pr. 3. huius.
h pr. 7. l. 3.
i ſch pr 3. huius.
k cor. 1. pr. 16. lib. 3.

COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt, ſi quantitates A, D, E fuerint lineæ rectæ, conſtituere triangulum rectangulum, cuius hypothenuſa erit A. Nam in triangulo rectangulo [l] perpendicularis ab angulo recto media proportionalis eſt inter ſegmenta hypothenuſæ, & latera media proportionalia ſunt inter hypothenuſam, & conterminalia ſegmẽta eius, facta à perpendiculari. Et [m] propterea M erit perpendicularis ab angulo recto, & D & E erũt latera dicti trianguli rectanguli.

l pr. 9 l. 4.
m ſch pr. 9. l. 4. & pr. 20. l. 2.

COROLLARIVM II.

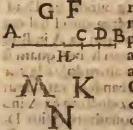
Deducitur etiam, qua ratione reperiri poſſit latus potens differentiam duorum quadratorum inæqualium. Fiat, [n] vt A latus quadrati maioris ad D latus quadrati minoris, ita D ad B, & [o] inter A, eiuſque reſiduum C reperiatur media proportionalis E. Patet ex hac propoſitione eſſe E latus quadrati differentialis inter quadrata quantitatum A, & D.

n def. 2. huius.
o ſch pr. 3. huius.

PROPOS. V. THEOR. V.

Si eadem quantitas bis diuidatur, ſiue interius, ſiue exterius, ita vt ſegmenta ex prima diuiſione facta, inæqualia ſint ſeg-

mentis poſtremis: dupli producti priorum ſegmentorum à duplo producti poſteriorum ſegmentorum differentia ęqualis erit differentię duorum quadratorum ex prioribus ſegmentis à duobus quadratis ex poſterioribus ſegmentis.

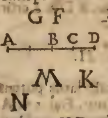


Sit eadem quantitas A B, bis ſecta interius in C & D, vel exterius; ita vt ſegmenta priora A C, & C B inæqualia ſint poſterioribus ſegmentis A D & D B, & F æqualis ſit duplo producti ex A C in C B, atque G ſit æqualis quadratis ex A C, & ex C B; pariterque K ſit æqualis duplo producti ex A D in D B, & M ſit æqualis quadratis ex A D & ex D B, atq; N ſit æqualis quadrato ex A B. Dico differentiam inter F, & K æqualem eſſe differentiæ inter M, & G.

a ſch prop. 3. huius.

Et in primo caſu a ſecetur A B bifariam in H. Et quia ſupponuntur priora ſegmenta A C, C B inæqualia poſterioribus ſegmentis A D, D B, non erunt ambo ſegmenta A C, & A D æqualia inter ſe, & ablata communi A H, erunt reſiduæ H C, & H D inæquales; Ponatur H C minor, quàm H D. Poſtea, quia duarum inæqualium A H, & H C ſumma eſt A C, differentia verò eſt C B (eo quod A H, & H B æquales ſunt inter ſe): erit b quadratum ex A H æquale quadrato ex H C ſimul cum producto ex A C in C B, nimirum contentum ex aggregato, & differentia ipſarum A H, & H C. Pari ratione eidem quadrato ex A H æquale erit quadratum ex H D vnà cum producto ex A D in D B: Quare quadratũ ex H C, vnà cum producto ex A C in C B ęquale erit quadrato ex H D vnà cum producto ex A D in D B; Sed c quadratum ex H C minus eſt quadrato ex H D, cùm latus H C poſitum ſit minus, quàm H D: Igitur reciprocè productum ex A C in C B maius erit producto ex A D in D B. At in ſecundo caſu quia eidem A B adduntur inæquales B C, & B D: Manifeſtum eſt productum A C B ſimiliter inæquale eſſe producto A D B; Quare duplum producti ex A C in C B, idest F, inæquale erit duplo producti ex A D in D B, ſcilicet ipſi K. Et quoniam d in primo caſu quadrato totius A B, ſcilicet quadrato N ęqualia ſunt quadrata ex A C, & ex C B, & duplum producti ex A C in C B: erunt G, & F æ-

b pr. 3. huius.



c cor 3 pr. 17 lib 4. & def. 2 huius

d pr. 1. huius

qualia

qualia quadrato N. Pari ratione eidem quadrato N æqualia erunt M, & K. Igitur F, & G, ſimul ſumpta, æqualia erunt K, & M, ſimul ſumptis. Cùm igitur ab his æqualibus aggregatis tollantur inæqualia F, & K: erit [e] differentia ablatorum æqualis differentiæ reſiduorum. Quare eodem exceſſu ſuperabit F ipſum K, quo M ſuperat ipſum G. *e ax. 2. huius.*

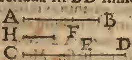
At in ſecundo caſu quoniam [f] quadratum ex differentia A B, ſcilicet N, vnà cum duplo producti A C B, ſcilicet F æquale eſt duobus quadratis ex A C, & ex C B, id eſt ipſi G; Et pari ratione quadratum N vnà cũ K ęquale erit ipſi M: Cùmque ab inæqualibus G, & M tollatur commune quadratum N: erit [g] differentia inter reſidua F, & K eadem, quæ inter tota G, & M; quod erat probandum. *f pr. 2 huius.* *g ax. 1. huius.*

PROPOS. VI. THEOR. VI.

Eucl. 2. X.

Si duabus quantitatibus propoſitis inęqualibus detrahatur ſemper minor de maiore alternè, & reliqua nunquam præcedentem metiatur: incõmenſurabiles erunt ipſæ quantitates.

Sint duæ quantitates inęquales A B, & C D, & minor A B auferatur ex C D, quoties poteſt, & reſidua ſit E D minor, quàm A B, ſeu C E; Rurſus E D auferatur ex A B quoties poteſt, ita vt reſidua F B minor ſit, quàm E D, ſeu A F, & ſic vlterius ſemper alterna detractione auferatur minor de maiore, & nunquam reliqua pręcedentem metiatur. Dico A B, & C D incommenſurabiles eſſe. Si enim hoc verum non eſt; Sit H cõmunis mẽſura earundẽ A B, & C D. Et quia ex C D tollitur C E maior quã ſemiſſis ipſius D C (cũ reſidua E D minor ſit, quã ablata A B, vel C E), & ex A B tollitur A F magis, quàm dimidium illius, & ſic ſemper: Ergo [a] relinquetur tandem aliqua quantitas minor, quàm H. Sit illa F B: Cùmque H ponatur menſura communis ambarum quantitatum A B & C D, & A B metitur C E; Ergo [b] H metitur totam C D, & ablatam C E; ideoque [c] H metietur reſiduam E D; ſed E D metitur A F: Ergo H metietur nedùm totam A B; ſed etiam ablatam A F, & propterea H metietur reſiduam F B, quod [d] eſt abſurdũ. Facta enim fuit F B minor, quàm H. Non igitur aliqua quantitas



a ſch. pr. 17 l. 1. *b ax. 1. l. 5.* *c ax 6. l. 1.* *d def. 13. l. 1*

titas

titas H eſſe poteſt communis menſura quantitatum A B, & C D. ideoque *e* erunt incommenſurabiles. Quod erat oſtendendum.

e def.3. huius.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt quamlibet menſuram cōmunem duarum quantitatum metiri quoque quamlibet portionem, quæ ex alterna detractione relinquitur.

Oſtenſum enim eſt duarum quantitatū A B, & C D communem menſuram H metiri portiones omnes C E, E D, A F, & tandem F B omnium poſtremam.

Eucl.3.4.X.

PROPOS. VII. PROBL. I.

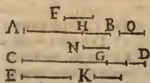
Duabus, vel tribus quantitatibus commenſurabilibus propoſitis, maximam earum communem menſuram reperire.

Sint primò duæ quantitates A B, & C D commenſurabiles inter ſe. Reperiri debet earum menſura communis maxima. Tollatur *a* minor A B ex C D, quoties poteſt, vt nimirum reſidua G D minor ſit, quàm A B, & G D auferatur ex A B quoties poteſt, & hoc ſemper fiat alterna detractione; Tandem aliqua quantitas reſidua præcedentem metietur: Nam ſi nunquam poſtremum reſiduum præcedētem menſuraret, *b* eſſent quantitates A B, & C D incommenſurabiles, quod eſt contra hypotheſin. Metiatur H B præcedentem G D. Et quia H B metitur G D, & G D metitur A H: Igitur *c* H B metitur A H, & menſurat quoque ſe ipſam: Ergo H B metitur totam A B, hæc verò metitur C G: Igitur H B menſurat ipſas C G, & G D, ideoque H B metietur totam C D; & propterea H B menſura communis erit quantitatū A B, & C D. Dico iam H B maximā eſſe omnium quantitatum, quæ menſurare poſſunt ipſas A B, & C D. Si enim hoc verum non eſt, ſit F maior, quàm H B, menſura communis ipſarum A B, & C D. Et quia *d* quęlibet menſura communis quantitatum A B, & C D metitur quamlibet extremam portionem H B, quæ ex alterna detractione relinquitur: Igitur maior F metitur minorem H B, quod eſt impoſ-

a ſch.pr.3. huius.

b pr.6.huius.

c ax.1.l.3.



d cor.pr.6. huius.

impoſſibile. Ergo quælibet alia menſura communis quantitatum A B, & C D minor erit, quàm H B. Et propterea H B erit omnium maxima.

Secundò ſint tres quantitates A B, C D, & E commenſurabiles inter ſe. Reperiri debet earum communis menſura maxima: reperiatur [e] communis maxima menſura quantitatum C D, & E, quæ ſit K, ſicuti H B reperta fuit maxima menſura communis quantitatum A B, & C D. Et quia tres quantitates A B, C D, & E ponuntur inter ſe commenſurabiles, dabitur aliqua communis menſura omnium trium; qualiſcunque ſit illa, cùm ſit menſura communis duarum A B, C D, [f] menſurabit quoque poſtremum reſiduum alternæ detractionis H B; ſed H B oſtenſa fuit maxima communis menſura duarum A B, C D; Ergo illa menſura communis trium A B, C D, & E metietur maximam menſuram communem H B duarum quantitatum A B, & C D. Pari ratione metietur K menſuram communem maximam ipſarum C D, & E; ideoque H B, & K commenſurabiles erunt inter ſe. Iam [g] reperiatur N maxima menſura communis duarum H B, & K. Et quia N metitur H B, hæc autem metitur duas A B, & C D: Igitur [h] N metitur duas A B, & C D; cùmque N metiatur K, & hæc metiatur E: Ergo N metitur tres quantitates A B, C D, & E. Dico iam N eſſe maximam menſuram trium A B, C D, & E. Si enim hoc verum non eſt, ſit O maior, quàm N menſura communis earundem A B, C D, & E. Et quia O menſurat ambas A B, & C D, metietur, [i] vt dictum eſt, ipſam H B earum maximam menſuram communem; Pariterque quia O menſurat ambas C D & E, metietur quoque K earum maximam communem menſuram: Cùmque O metiatur ambas H B, & K, metietur quoque O ipſam N maximam menſuram communem earundem H B, & K; ideoque maior O metietur minorem N, quod eſt impoſſibile. Nulla ergo maior, quàm N metietur tres A B, C D, & E; & propterea N erit earum maxima menſura communis; vt propoſitum fuerat.

[e] par. 1. huius pr.

[f] cor. pr. 6. huius.

[g] par. 1. huius pr.

[h] ax. 1. l. 3.

[i] cor. pr. 6. huius.

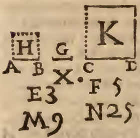
PROPOS. VIII. THEOR. VII.

Eucl. 9. X.

Quadrata, quæ à quantitatibus longitudine commenſurabilibus fiunt, habent inter ſe proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Et quadrata, quę ſunt inter ſe, vt numeri quadrati, habent latera longitudine cõmen-

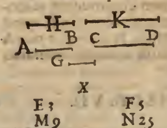
menſurabilia. Quę verò à quantitatibus longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata, non habebunt inter ſe proportionem, quam habent numeri quadrati. Et quadrata, quæ non ſunt inter ſe, vt numeri quadrati, non habebunt latera longitudine commenſurabilia.

Sint primò A B, & C D duæ quęlibet quantitates eiuſdem generis inter ſe commenſurabiles longitudine, & quadratum H lateris A B, & quadratum K lateris C D. Dico quadratum H ad quadratum k habere eandem proportionem, quam habet aliquis numerus quadratus ad aliquem quadratum numerum. Duarum A B, C D longitudine commenſurabilium a reperiatur maxima communis menſura G, & quoties G metitur A B, toties vnitas X metiatur numerum E; atque quoties G metitur C D, toties vnitas X metiatur numerum F: Manifeſtum b eſt A B ad C D eſſe, vt numerus E ad F, cùm antecedentes eędem partes ſint conſequentium; Fiat poſtea c M numerus quadratus lateris E, atque N numerus quadratus lateris F. Et quia d quadratum H ad quadratum k duplicatam proportionem habet lateris A B ad latus C D. Similiter e numerus quadratus M ad numerum quadratum N duplicatam rationem habet lateris E ad F, eſtque A B ad C D, vt numerus E ad F: Igitur f quadratum H ad quadratum k eandem proportionem habet, quam numerus quadratus M ad numerum quadratum N.



a pr. 7. huius
b def. 8 l. 3.
c def. 10. l. 8
d cor. 1. pr. 5. huius.
e pr. 32 & cor. 1. pr. 36 lib 8.
f cor. 3. pr. 19. l. 3.

Secundò ſit quadratum H ad quadratum K, vt numerus quadratus M ad numerum quadratum N. Dico latera A B, & C D eſſe longitudine commenſurabilia. Sint E, & F latera quadratorum numerorum M, & N. Et quoniam quadratum H ad quadratum k ponitur, vt quadratus numerus M ad quadratum numerū K; ſed g quadratum H ad quadratum K habet proportionem duplicatam lateris A B ad latus C D, pariterque quadratus numerus M ad quadratum numerum N duplicatam rationem habet lateris E ad F: Igitur h latus A B ad C D habet



g cor. 1. pr. 2 huius, & pr. 22. l. 8.
h cor 3 pr. 19. l. 3.

habet eandem rationem, quam latus E ad F; Sed *i* numeri E, F habent rationem commenſurabilem ab vnitate. E rgo latera *k* A B, & C D longitudine ſunt commenſurabilia. *i def. 7. l. 3.* *k def. 8. l. 3.*

Tertiò ſint latera A B, & C D longitudine incommenſurabilia. Dico eorum quadrata H, & k non habere proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum H ad quadratum K haberet proportionem, quam quadratus numerus quilibet M ad quadratum numerum N, eſſent *l* latera A B, & C D longitudine commenſurabilia, quod eſt falſum, & contra hypotheſin. Non ergo quadratũ H ad quadratum K proportionem habere poteſt, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum. *l par. 2. huius pr.*

Quarto quadratum H ad quadratum K non habeat proportionem eandem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum, ſiue illa commenſurabilia ſint, ſiue omnino inter ſe incommenſurabilia. Dico eorum latera A B, & C D eſſe longitudine incommenſurabilia. Si enim latera A B, & C D dicantur eſſe longitudine commenſurabilia *m* habebũt eorum quadrata H, & K, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo latera A B, & C D longitudine commenſurabilia ſunt; V t fuerat propoſitum. *m par. 2. huius pr.*

COROLLARIVM I.

Eucl 5. 6. 7. 8. X.

Colligitur ex demonſtratione primę partis huius propoſitionis, quòd quantitates commenſurabiles habent proportionem, quam numerus ad numerum; Et illæ, quæ habent eandem rationem, quam duo numeri inter ſe, erunt commenſurabiles; & quæ incommenſurabiles ſunt, non erunt inter ſe, vt numerus ad numerum. Et illę quę non ſunt inter ſe, vt duo numeri, incõmenſurabiles erunt. Nam *n* quilibet duo numeri commenſurabilem proportionem inter ſe habent, cum ſaltem vnitas ſit eorum communis menſura, & nulla commenſurabilis proportio excogitari poteſt, quæ in numeris exprimi non poſſit. Ergo è contra nulla incommenſurabilis proportio in numeris exprimi poterit; & ideo patet propoſitum. *n ex def. 7. l. 3.*

COROLLARIVM II.

Patet lineas, vel quantitates, quæ longitudine ſunt commenſu-

menſurabiles, omnino potentiâ commenſurabiles eſſe: Nam eorum *o* quadrata ſunt vt numeri quadrati. Quæ *p* verò poteſtate tantùm commenſurabiles ſunt, erunt longitudine incommenſurabiles. Et quę *q* longitudine incommenſurabiles ſunt, poſſunt aliquando poteſtate commenſurabiles eſſe, quando ſcilicet eorum quadrata habent proportionem inter ſe eandem, quam duo numeri, qui nôn ſint quadrati, vel non ſimiles. Et tandem illę, quę poteſtate incommēſurabiles ſunt, omnino longitudine incommenſurabiles erunt. Nam *r* ſi longitudine commenſurabiles eſſent, eorum quadrata, ſeu poteſtates eſſent commenſurabiles. Quod eſt contra hypoteſin.

o par 1. huius pr.
p par. 4. huius pr.
q par 3 huius pr.
r par. 1. huius pr.

Eucl. 10. X.

COROLLARIVM III.

Manifeſtum etiam eſt quatuor quantitatum proportionalium antecedentes, aut longitudine, aut poteſtate tantùm eſſe vnà commenſurabiles, aut vnà incommenſurabiles conſequentibus. Si enim prima partes eſt ſecundę, erit *s* tertia eædem partes quartæ atque prima partes eſt ſecundę. Et ſi prima ad ſecundam nullam commenſurabilem rationem habuerit, neque *t* tertia ad quartam proportionem commenſurabilem habebit.

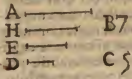
s def. 8 lib 3
t def 11. l. 3

Eucl. 11. X

PROPOS. IX. PROBL. II.

Propoſitæ quantitati inuenire duas alias incommenſurabiles, altera quidem longitudine tantùm, altera verò etiam poteſtate.

Sit quælibet quantitas A, huic primò inueniri debet alia incommenſurabilis longitudine tantùm. Inueniantur *a* duo numeri, B quidem quadratus, & C non quadratus. Deinde *b* vt eſt numerus B ad C, ita fiat A ad D, atque inter A, & D ponatur media proportionalis E. Dico E eſſe incommenſurabilem longitudine tantùm ipſi A. Quoniam eſt *c* quadratum ex A ad quadratum ex E, vt A ad tertiam proportionalem D, vel *d* vt numerus B ad C; ſed numerus B ad numerum C non habet proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: Igitur *e* latera A, & E longitudine ſunt



a ſch pr. 45. l. 8.
b pr. 11 & 10. lib. 4 & ſch pr. 3. huius.
c cor. 3 pr. 17. l. 4 & cor. 1. pr. 1. huius.
d pr. 7. l. 3.
e pr. 8. huius

ſunt incommenſurabilia. Et quia[f] poteſtate ſunt commenſurabilia, cùm quadratum ex A ad quadratum ex E habeat proportionem, quam numerus B ad numerum C. Ergo A, & E incommenſurabiles ſunt tantummodo longitudine.

Secundò eidem A inuenienda ſit alia incommenſurabilis longitudine, & poteſtate. Inueniatur[g] H media proportionalis inter A, & E. Dico H eſſe quęſitam. Quoniam[h] quadratum ex A ad quadratum ex H eſt, vt A ad tertiam proportionalem E; eſtque[i] A incommenſurabilis longitudine ipſi E; Ergo[k] quadratum ex A quadrato ex H incommenſurabile erit. Quare[l] A, & H incommenſurabiles erunt poteſtate; & ideo incommenſurabiles omnino longitudine. Vt propoſitum fuerat.

f def 4. & cor. 1. pr. 8. huius.
g pr 10. l 4. & ſch pr 3. huius.
h cor 3. pr. 17 lib. 4. & cor 1 pr. 1. huius.
i par. 1. huius pr.
k cor. 3. pr 8 huius.
l def. 4 & cor 2. pr. 8. huius.

PROPOS. X. THEOR. VIII.

Eucl. 18. 19 X.

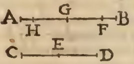
Si fuerint duę quãtitates inęquales, erit ſemiſſis minoris media proportionalis inter ſemiſummam, & ſemidifferentiã maioris, & lateris potẽtis differentiã quadratorum inęqualium quantitatum, & hę erunt vnà commenſurabiles longitudine, vel vnà incommenſurabiles.

Sint duæ quantitates inęquales, A B maior, cuius ſemiſſis A G, & C D minor, cuius dimidium C E; patet[a] C E minorem eſſe ipſa G A; & propterea ex quadrato maioris A G, ſeu G B auferri poterit quadratum minoris C E: Sitque[b] reſiduum quadratum lateris G F, & ſecetur G H ęqualis G F. Et quia G B[c] ad G F cum C E eſt, vt A B ad H F cum C D (cùm illæ ſint harum ſemiſſes): ergo[d] ſicuti quadratum ex G B ęquale eſt quadratis ex G F, & ex C E, ita quadratum ex A B ęquale erit quadratis ex H F, & ex C D: & propterea H F erit latus quadrati differentialis inter quadrata inęqualium AB & C D; & A F erit ſemiſumma, & F B ſemidifferentia ipſarum A B, & H F. Dico primò C E eſſe mediam proportionalem inter A F & F B. Quoniam duarum inęqualium A G, & G F, (ſcilicet medietatum ipſarum A B, H F) eſt A F aggregatum & differentia F B; quadratum[e] maioris A G ęquale erit quadrato minoris G F vnà cum producto A F B ex aggregato, & differentia; ſed quadratum eiuſdem A G ęquale eſt quadrato eiuſdem G F vnà cum quadrato ipſius C E: Igitur quadratum

a pr. 1. l. 3.
b ex pr. 18. l. 5. & cor 2 pr. 4 huius.
c pr 11. l 3.
d pr 18. l. 4 & cor 2 pr. 1. huius.
e cor. pr 21. l. 5 & pr. 3. huius.

ipſius C E æquale eſt producto ex A F in F B; ideoque ᶠC E, ſemiſſis minoris, media proportionalis eſt inter maioris ſegmenta A F, & F B, ſcilicet inter ſemiſummam & ſemidifferentiam maioris A B, & H F lateris potentis differentiam quadratorum inæqualium A B, & C D. Dico ſecundò ſi ſegmenta A F, & F B longitudine commenſurabilia ſunt, eſſe quoque A B ipſi H F longitudine cõmenſurabilem. Sit duarum longitudine commenſurabilium A F, & F B communis menſura X: Manifeſtum eſt ᵍ X metiri quoque aggregatum A B, cùmque X mẽſuret A F, & F B, ſeu ei æqualem A H, metictur quoque X ipſam H F differentiam earundem A F, & A H. Quapropter X metietur ipſas A B, & H F; & ideo A B, & H F longitudine commenſurabiles erunt.

f cor.2 pr 1. lib 4. & ſeb.pr.3.huius.



g def.3.huius, & ax.6 l.1.

Tertiò, ſint A B, & H F commenſurabiles longitudine. Dico A F, & F B longitudine commenſurabiles eſſe. Quia ʰ quam proportionem commenſurabilem longitudine habet A B ad H F, eandem habet G A illius ſemiſſis ad G F dimidium huius: Igitur ⁱ duę commenſurabiles longitudine A G, & G F aliquam communem menſuram habebunt, quę ſit X: ᵏ Vnde eadem X metietur illarum aggregatum A F, atque earundem differentiam F B; & propterea ſegmenta A F, & F B longitudine commenſurabilia erunt.

h pr.11. & def.8. l 3.

i def. 3. huius.

k ax.6. l.1.

Quartò ſit A F incommenſurabilis longitudine ipſi F B. Dico A B longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi H F. Si enim hoc verum non eſt, ſint A B, & H F longitudine commenſurabiles: Erunt ˡ igitur vt in tertia parte dictum eſt, ipſę A F, & F B longitudine commenſurabiles, quod eſt contra hypotheſin. Quare incommenſurabiles longitudine ſunt A B, & H F.

Quintò ſit A B incommenſurabilis longitudine ipſi H F. Dico A F, & F B longitudine incommenſurabiles eſſe. Nam ſi incõmenſurabiles longitudine nõ credantur, erunt ᵐ A B & H F commenſurabiles longitudine, quod eſt contra hypoteheſin. Quare A F, & B F longitudine incommenſurabiles ſunt. Quod erat propoſitum.

m par.2.huius pr.

COROLLARIVM I.

Patet, quòd ſi duę quantitates commenſurabiles componãtur, & totum vtrique ipſarum commenſurabile erit; & ſi

tota

tota vni ipſarum commenſurabilis fuerit, & illę commenſurabiles erunt. Nam illę, vt dictum eſt, *n* habent aliquam communem menſuram, quę neceſſariò differentiam earum, & aggregatum menſurabit. *n par 2 huius pr.*

COROLLARIVM II.

Eucl 17 X.

Conſtat duarum incommenſurabilium quantitatum ſummam, vel differentiam inter ſe, & vtrique ipſarum incommenſurabilem eſſe.

Nam in quarta parte huius propoſitionis ſuppoſitę fuerunt duę quantitates A F, & F B incommenſurabiles, & oſtenſa fuit earum ſumma A B incommenſurabilis ipſi H F differentię earundem. Rurſus ſi ſumma A B non credatur incommenſurabilis vni ipſarum, vt F B, habebunt *o* A B, & F B aliquam communem menſuram, quę *p* reſiduam A F quoque metietur; ideoque A F, & F B commenſurabiles erunt; quod eſt contra hypotheſim. *o def 3. huius.* *p ax. 6. l. 1.*

COROLLARIVM III.

Colligitur ex conſtructione huius propoſitionis, qua ratione maior inęqualium quantitatum ſecari poſſit, vt ſemiſſis minoris media proportionalis ſit inter facta ſegmenta. Si enim G F latus quadrati differentialis inter quadratum ex G B, & C E (quę ſunt ſemiſſes inęqualium A B, & C D) tollatur ex G B, ſecta *q* erit A B in F in duo ſegmenta A F, F B, inter quę C E ſemiſſis minoris media proportionalis eſt. *q par 1. huius pr.*

COROLLARIVM IV.

Et ſi ſemiſſis minoris media proportionalis fuerit inter maioris ſegmēta, erunt facta ſegmēta ęqualia ſemiſummę, & ſemidifferentię maioris datarū, & lateris differentialis quadratorum inęqualiū quantitatū. Nam C E ſemiſſis minoris D C fuit media proportionalis inter ſegmenta A F, F B; & oſtenſum fuit maius ſegmentum A F ęquale A G ſemiſſi maioris A B, & G F ſemiſſi lateris F H quadrati differentialis inter quadrata ex A B, & C D, atque F B ęqualis fuit differentię earundem A G, & G F.

DE-

DEFINITIONES SECVNDAE.

I.

Quantitas notę menſurę, cui cęterę comparantur; vocetur Rationalis, & eius quadratum Rationale.

II.

Quantitates, quę expoſitę Rationali commenſurabiles ſunt lōgitudine, vel potentià tantūmodo, vocētur Rationales.

III.

Quę verò expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt longitudine, vel potentià tantùm: vocentur Irrationales.

IV.

Et quantitates productę, quę expoſito quadrato Rationali commenſurabiles ſunt, vocentur quoque Rationales: Quæ verò eidem Incommenſurabiles ſunt, vocentur Irrationales.

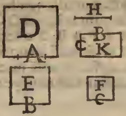
V.

Atque latera, quæ poſſunt quantitates productas irrationales: vocentur Irrationalia.

Si enim proponatur aliqua quantitas A certæ, & notæ magnitudinis & menſuræ, manifeſtum eſt, quòd omnium aliarum B & C, quæ cum illa expoſita comparari poſſunt, erunt quædam ipſi A commenſurabiles longitudine & potentià, aliæ verò potentià tantùm, pariterque aliæ eidem expoſitæ incommenſurabiles erunt longitudine tantùm, quędam verò longitudine, & potententià eidem incommenſurabiles erunt: Iam expoſita quantitas A, ratione cuius cęteræ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles: vocetur Rationalis; Et quadratum eiuſdem A, nempe D, quod certam quoque menſuram habet, pariter vocetur Rationale.

Et ſi quidem B commenſurabilis eſt longitudine rationali A, vocabitur B Rationalis quoque ex comparatione, Et ſi tantummodo quadratum E ex latere B commenſurabile fuerit quadrato Rationali D, at longitudine incōmenſurabilis ſit B ipſi A, ideſt a quadratum E ad quadratum D ſit quidem, vt numerus ad numerum, ſed non vt numerus quadratus ad numerum quadratum: tunc ipſa B vocatur etiam Rationalis ex comparatione, & eius quadratum E, quatenus cōmenſurabile eſt expoſito quadrato Rationali D, vocatur quoque Rationale. Deinde ſit C longi-

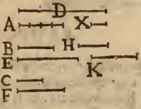
a pr 8. huius.



longitudine incommenſurabilis expoſitę Rationali A: Dicetur C Irrationalis, eiuſque quadratum F, quando Rationali quadrato D incommenſurabile eſt, vocatur quoque Irrationale; Et ſimiliter latus C, potens Irrationale quadratum F, dicetur pariter irrationale, quatenus C potentiâ Incommenſurabilis eſt expoſitæ Rationali A.

Et nedùm quadratum, ſed etiam rectangulum, ſeu productum K ex lateribus B in C Irrationale dicetur, ſi incommenſurabile fuerit quadrato expoſitę Rationalis A; Et latus H, potens quadratum æquale producto Irrationali K, dicetur quoque Irrationale.

Poſtea quia duæ quantitates, quæ expoſitę Rationali comparantur poſſunt quoque inter ſe ipſas comparari; propterea poſſunt eſſe duæ comparatæ quantitates ambę Rationales, vel ambę Irrationales ex comparatione, at inter ſe ipſas collatæ poſſunt eſſe commenſurabiles longitudine, & potentiâ, vel potentiâ tantùm, vt ſi duæ B, & C ſint rationales, quatenus longitudine commenſurabiles ſunt expoſitę Rationali A, ideſt ſi B ad A ſit, vt numerus 5. ad 4. & C ad A ſit, vt 6. ad 4. erunt B, & C Rationales, & inter ſe longitudine commenſurabiles, eo b quod vni tertię A commenſurabiles ſunt longitudine, pariterque c potentiâ, eo quod quadrata laterum commenſurabilium ſunt inter ſe, vt duo numeri.



b cor. pr. 17 l. 3.
c cor. 2. pr. 8. huius.

Secundò ſi qualium partium quadratum D eſt 16, ſit quadratum E 8 partes, & quadratum F 24; tunc d quidem B, & C non longitudine, ſed potentiâ Rationali A commenſurabiles erunt; Nam eorum quadrata E, & F ad quadratum Rationale D eandem proportionem habent, quam numeri 8 & 24, non quadrati, habent ad numerum 16 quadratum; Et hac de cauſa B, & C dicentur Rationales: Et quia inter ſe ipſas poteſtate tantùm commenſurabiles ſunt, eo quod 8 ad 24, ſeu 4 ad 12 non habet proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, dicentur B, & C Rationales, inter ſe verò potentiâ tantùm commenſurabiles.

d pr. 8. huius.

Si verò qualium partium quadratum D eſt 16, ſit quadratum E 6, & quadratum F 24 partes; Tunc quidem B, & C dicentur Rationales, propterea quod potentiâ tantùm commenſurabiles ſunt Rationali A, non autem longitudine, eo quod vterque numerus 6 & 24, ſit non quadratus, & numerus 16 ſit quadratus; Et quoniam qualium partium quadratum E eſt 6 earundem quadratum F eſt 24 & numeri 6 & 24 non ſunt quadrati: Ergo eorum latera B, & C numeris exprimi non poſſunt, quatenus rationales ſunt, ideſt quatenus ab expoſita Rationali A, cui comparantur, denominationem, & menſuram ſortiuntur; ſed ſi abſolutè conſiderentur latera B, & C, erunt inter ſe longitudine commenſurabilia, cùm

eorum quadrata ſint inter ſe, vt 6 ad 24 qui numeri, licet non ſint qua-
e pr. 37. l. 8. *drati, e ſunt tamen plani ſimiles, qui ſunt inter ſe, vt quadrati numeri 4, & 16, propterea B, & C iure merito vocari poſſunt Rationales, & inter ſe longitudine commenſurabiles.*

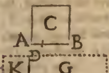
Tandem ſi vt circuli radius ad latus inſcripti quadrati, & ad radium eiuſdem, ita fiat quadratum Rationale D ad quadratum E lateris B, &
f ex pr. 31. l. 5. & pr. 8. huius. *ad quadratum C lateris B; Manifeſtum f eſt nedùm B, ſed C quoque incommenſurabilem eſſe longitudine, & potentiâ expoſitæ Rationali A; Et hac de cauſa erunt B, & C Irrationales, at inter ſe nihilominus erunt*
g pr. 31. l. 5. *longitudine commenſurabiles, eo quod g latus quadrati duplum eſt radij eius. Dicentur igitur B, & C in tali caſu, Irrationales inter ſe longitudine commenſurabiles.*

Eucl. 10. 21. X.

PROPOS. XI. THEOR. IX.

Quantitas genita ex ductu duorum laterum Rationalium, quę quidem inter ſe ſint longitudine commenſurabilia, Rationale eſt. Et ſi quantitatis productę Rationalis vnum latus Rationale fuerit, erit reliquum latus Rationale, & longitudine commenſurabile reliquo lateri.

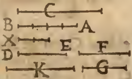
Sit expoſita Rationalis A B notæ menſuræ, cuius quadratum C, & productum G, cuius duo latera D E, & E F primùm ſint Rationalia, ideſt Rationali expoſitæ A B ſint commenſurabilia, aut longitudine, aut potentiâ tantùm, atque etiam ſint D E, & E F inter ſe commenſurabilia longitudine. Dico G Rationale eſſe, ideſt commenſurabile ipſi C. Lateris a D E fiat quadratum K. Quoniam Rationalis D E Rationali expoſitę A B commenſurabilis eſt longitudine, vel potentiâ tantùm, erit b quadratum K commenſurabile Rationali quadrato C, reſpectu cuius cætera dicuntur Rationalia; & ideo c K Rationale erit. Deinde quia eadem D E ducta in ſe ipſam efficit quadratum K; & ducta in E F efficit productum G: erit d K ad G, vt latus D E ad E F; eſtque ex hypotheſi D E ipſi E F longitudine commenſurabilis. Igitur e K ipſi G commenſurabilis quoque erit: Cùmque duo C, & G eidem K commenſurabilia ſint, erit f G commenſurabile rationali C; & propterea g Rectangulum, vel productum G Rationale erit.



a pr. 34. l. 1. & def. 2. huius.
b def. 2. & 4 huius.
c def. 2. sec. huius.
d pr. 1. l. 4. & ſch. pr 3. huius.
e cor. 3. pr. 8 huius
f cor. pr. 17. l. 3
g def. 4. ſec. huius.

Secundò

Secundò iiſdem poſitis ſit rectangulum, vel productum G Rationale, ideſt commenſurabile quadrato Rationali C; atque eiuſdem producti G vnum latus D E ſit Rationale, ideſt commenſurabile Rationali expoſitæ A B lõgitudine, vel potentià tantùm. Dico eiuſdem producti reliquum latus E F Rationale eſſe, & reliquo lateri D E erit commenſurabile longitudine. *h* Rurſus fiat quadratum K lateris D E: erit, vt antea dictum eſt K Rationale; ſed ex hypotheſi productũ G Rationale eſt: *i* Igitur G, & K quadrato C Rationali expoſito cõmenſurabilia erunt; ideoque *k* G, & K inter ſe commenſurabilia erunt; ſed *l* vt K ad G, ita eſt latus D E ad E F (cùm eadem D E ducta in D E, & E F efficiat K, & G): Ergo *m* latera D E, & D F commenſurabilia ſunt longitudine; eſtque expoſita Rationalis A B ipſi D E Rationali aliquo modo commenſurabilis; Igitur *n* E F Rationali A B commenſurabilis erit, vel longitudine, vel potentià tantùm; & propterea E F Rationalis erit, & oſtenſa fuit longitudine commenſurabilis lateri D E. Quod erat oſtendendum.



h pr 34 l. 1. & def. 2. huius.
i def 4 ſeb. huius.
k cor pr. 17. l 3.
l pr 1. l 4. & ſcb. pr. 3. huius.
m cor 3 pr. 8. huius.
n cor. pr. 17. l. 3.

COROLLARIVM.

Eucl. 12. X.

Patet ſi ſpatium Rationale ad latus Rationale applicetur, latitudinem efficere Rationalem, & commenſurabilem longitudine lateri, cui applicatum eſt.

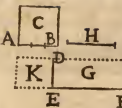
PROPOS. XII. THEOR. X.

Eucl. 21. X.

Productum à duobus lateribus Rationalibus, ſed inter ſe commenſurabilibus potentià tantùm: Irrationale eſt, & latus ipſum potens irrationale eſt: Vocetur autem Mediale, & productum, aut quadratum ei æquale, vocetur Mediale.

Sit expoſita Rationalis A B, cuius quadratum Rationale C, & productum G, cuius latera D E, & E F ſint Rationalia, ſed inter ſe ſint potentià tantùm commenſurabilia. Dico primò productum G Irrationale eſſe. Fiat *a* lateris D E quadratum K, erit, vt *b* dictum eſt, quadratum K Rationale. Et quoniam *c* ſicuti latus D E ad E F, ita eſt quadratum K ad produ-

a pr 34. l. 1. & def 2. huius.
b in pr. 11. huius.
c pr 1. l. 4. & ſch. pr. 3. huius.



ctum G; eſtque latus D E ipſi E F longitudine incommenſurabile (cùm potentiâ ſolummodo commenſurabilia ſuppoſita ſint); Igitur *d* productum G ipſi K incommenſurabile erit; ſed rationale C eidem K Rationali commenſurabile erat: Igitur G ipſi C incommenſurabile erit (aliàs ſi commenſurabile credatur G eidem C, eſſent K, & G commenſurabiles vni tertio C, & ideo *e* inter ſe cōmenſurabiles, quod eſt contra hypotheſin). Quare *f* G incommenſurabile exiſtens ipſi C quadrato Rationalis expoſitæ A B, erit Irrationale.

d cor. 3 pr. 8. huius.

e cor pr. 17. l. 3.

f def. 4 ſec. huius.

Secundò latus H poſſit quadratum æquale ſpatio, vel producto G, vel ſit *g* H media proportionalis inter latera D E, & E F. Dico H Irrationalem eſſe. Quoniam quadratum ex H æquale eſt producto G, eſtque G incommenſurabile quadrato Rationali C: Igitur quadratum ex H incommenſurabile erit quadrato Rationali C; & ideo *h* latus H ipſi A B Rationali nec potentiâ, nec longitudine commenſurabile erit; & propterea H *i* Irrationalis eſt. Quæ erant oſtendenda. Vocetur H Media, propterea quod media proportionalis eſt inter duas Rationales potentiâ tantùm inter ſe commenſurabiles. Et productum G, vel quadratum ex H, vocetur Mediale.

g pr 10 l 4. & ſch. pr 3. huius.

h cor. 2. pr. 8. huius.

i def. 3. ſec. huius.

COROLLARIVM.

Eucl. 13. 14 X.

Patet, quòd ſi duarum quantitatum commenſurabilium vna alicui tertię incommenſurabilis ſit, erit & ręliqua eidem incommenſurabilis, longitudine quidem, ſi illę longitudine commenſurabiles & incommenſurabiles ſunt; aut potentiâ, ſi priores potentiâ commenſurātur, aut non commenſurātur.

In prima enim parte huius propoſitionis fuerunt quantitates C, & k inter ſe commenſurabiles, & K incommenſurabilis erat ipſi G, & oſtenſa fuit C incommenſurabilis eidem G. vnde patet, quòd ſi C, & K longitudine commenſurabiles fuiſſent, & k ipſi G longitudine incommenſurabilis, eſſet quoque C eidem G longitudine incommenſurabilis.

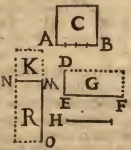
At ſi C, & K potentiâ tantùm commenſurabiles fuerint, & K ipſi G potentiâ ſit incommenſurabilis; erit C eidem G potentiâ incommenſurabilis.

PROPOS. XIII. THEOR. XI.

Eucl. 23. X

Productum mediale ad latus Rationale applicatum latitudinem efficit Rationalem, ſed longitudine incommenſurabilem priori lateri.

Sit latus mediale H, eiuſque quadratum mediale, ſit æquale producto G, contento ſub duabus rationalibus D E, & E F potentiâ tantùm inter ſe commenſurabilibus. Applicetur a poſtea productum R æquale quadrato ex H, vel ſpatio G ad latus Rationale M N, vt ſit reliquum latus M O. Dico M O Rationale eſſe, & ipſi M N longitudine eſſe incommenſurabile.



Quoniam producta G, & R æqualia ſunt, b erit reciprocè latus M N ad E F, vt D E ad M O; & c quadratum ex M N ad quadratum ex E F erit, vt quadratũ ex D E ad quadratum ex M O; Suntque M N, E F, & D E Rationales ex hypotheſi, & ideo d ſaltem potentiâ commenſurabiles Rationali expoſitę A B, & e inter ſe: Igitur f quadratum ex D E ad quadratum ex M O eandem commenſurabilem rationem habet, quàm quadratum ex M N ad quadratum ex E F; Sed g quadratum ex D E rationali commenſurabile eſt quadrato C expoſitę Rationalis A B: Igitur h quadratum ex M O commenſurabile eſt eidem Rationali quadrato C; & propterea i latus M O Rationale erit. Poſtea k fiat quadratum K ex latere N M. Et quia N M Rationalis eſt, erit l quadratum K Rationale quoque, ſeu cõmenſurabile expoſito C Rationali; ſed productum R, ſeu G Irrationale erat, & ideo eidem C incommenſurabile: Igitur m K ipſi R incommenſurabile erit; Eſt verò n latus N M ipſi M O, vt quadratum K ad productum R. Ergo o latus N M ipſi MO incommenſurabile erit longitudine; vt propoſitum fuerat.

a pr 20. l. 4. & ſch pr 3. huius.
b pr. 14. l. 4 & ſch. pr. 3. huius.
c pr. 18 l. 4. & cor. 2. pr. 1. huius.
d def. 2 ſec. huius
e cor. pr. 17. l. 3.
f cor 3 pr. 8 huius
g def. 2 ſec. huius.
h cor pr. 17. l. 3.
i def 2. ſec. huius.
k pr. 34 l. 3 & def 2. huius.
l def. 2. ſec. huius.
m cor prop. 12. huius.
n pr. 1 l. 4. & ſch pr. 3. huius
o cor. 3 pr. 8 huius.

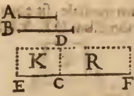
PROPOS. XIV. THEOR. XII.

Eucl. 24. 25. X.

Quantitas commenſurabilis longitudine, vel potentiâ tantùm

tùm mediali, medialis eſt. Et productum ex duabus medialibus longitudine commenſurabilibus, mediale eſt.

Sit primò A latus mediale, & B ſit commenſurabilis longitudine, aut potentià tantùm ipſi A. Dico B medialem eſſe. Sit
a pr. 20 l. 4. & ſcb. pr. 3. huius. expoſita Rationalis D C, ad quam *a* applicentur ſpatium, vel productum K æquale quadrato mediali ex media A, & productũ R æquale quadrato ex B. Et quia ſpatium mediale K applicatur ad latus Rationale D C: igi-
b pr. 13. huius. tur *b* reliquum latus E C Rationale erit, ſed longitudine incommenſurabile ipſi D C: Cùmque quadratum ex B ad quadratum ex A commenſurabile ſit, (eo quod latera B, & A commenſurabilia ſaltem potentià ſupponuntur), ſitque productum K æquale quadrato ex A, atque productum R æquale quadrato ex B: Igitur productum K commenſurabile
c pr. 1. l. 4. & ſcb pr. 3. huius. eſt ſpatio, vel producto R; Eſtque *c* E C ad C F, vt K ad R: Ergo *d* E C ipſi C F longitudine commenſurabile eſt, atque
d cor. 3 & 2 pr 8 huius. etiam potentià; Sed eidem E C potentià tantùm commenſuratur expoſita Rationalis D C, cùm E C Rationalis ſit quo-
e cor. pr. 17. l. 3. que: Igitur *e* C F Rationali D C ſaltem potentià commenſurabilis erit; & ideo *f* C F Rationalis quoque erit. Et quia
f def 2 ſec. huius. duarum C F, & E C longitudine commenſurabilium vna E C
g cor pr. 12. huius. longitudine incommenſurabilis eſt Rationali D C: *g* igitur reliqua C F eidem Rationali D C longitudine incommenſurabilis erit; & propterea ſpatij R latera D C, & C F Rationa-
h pr. 12 huius. lia erunt, & potentià tantùm commenſurabilia; & *h* idcirco productum R mediale erit; ideoque latus B medium erit, eo quod poteſt ſpatium R mediale.



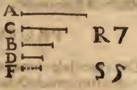
i pr 14 l. 1. & ſcb pr. 3. huius. Secundò rectanguli, vel producti R latera ſint D C, & F C medialia, quæ inter ſe longitudine ſint commenſurabilia. Di-
k pr. 12. huius. co R Mediale eſſe. Fiat *i* quadratum K ex mediali C D, erit-
l pr. 1. l. 4 & ſcb. pr. 3 huius. que *k* quadratum K medium; Et quia, *l* vt latus C F ad D C, ita eſt R ad K; eſtque C F ipſi D C longitudine commenſu-
m cor 3. pr. 8. huius. rabile: Igitur *m* R ipſi K commenſurabile eſt. Quare *n* R com-
n par. 1 huius pr. menſurabile exiſtens mediali K, Medium erit. Quod erat propoſitum.

PRO-

PROPOS. XV. PROBL. III. *Eucl. 18. X.*

Duas mediales inuenire potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum ſit Rationale.

Sit A Rationalis, & ſumantur numeri R, & S quorum quilibet ſit primus, & ideo *b* non erunt inter ſe vt numerus quadratus, ad numerũ quadratum; (& *c* fiat vt R ad S, ita A ad F, & inter A, & F reperiatur media proportionalis B: *d* erit quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt R ad S): & ideo *e* erũt A, & B Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles. poſtea *f* ſit C media proportionalis inter A, & B, & fiat vt A ad B, ita C ad D. Dico C, D eſſe mediales potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum Rationale eſt. Quoniam A, B ſunt Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles, erit *g* productum ex A in B mediale; *h* ſed media proportionalis C poteſt productum extremarum A, & B; Ergo *i* C medialis eſt. Cùmque C ad D ſit vt A ad B, & A, B potentiâ tantùm commenſurabiles ſunt; erit *k* C, ad D tantùm potentiâ commenſurabiles; & propterea *l* D, quę mediali C commenſurabilis eſt, erit quoque medialis. Quapropter inuentæ ſunt duę mediales C, & D potentiâ tantùm inter ſe commenſurabiles. Dico iam C, & D efficere productum Rationale. Quia duę proportiones A ad B, & C ad D eędem ſunt, & proportio A ad C ablata ex ratione A ad B eadem eſt proportioni C ad B ablatę ex ratione C ad D: Igitur *m* reſiduæ rationes C ad B, & B ad D eædem quoque ſunt inter ſe; *n* & ideo quadratum ex B Rationali ęquale erit producto ex medialibus C, & D (cùm B media proportionalis ſit inter C, & D). Vnde productum ex C in D Rationale erit. Quod erat propoſitum.



a pr. 21. l. 8
b cor pr. 37. l. 8.
c pr. 11. 10. l. 4 & ſcb. pr 3 huius.
d pr. 17. l. 4. & cor 1. pr. 1. huius.
e pr. 8 & def. 2. ſec huius.
f 10. 11. l. 4 & ſcb pr 3. huius.
g pr 12. hu.
h cor. 2 pr. 14 l. 4. & ſcb. pr. 3. hu.
i pr. 12. hu.
k cor. 3. pr. 2 huius.
l pr. 14. hu.
m pr. 21 l. 3
n cor 2. pr. 14. lib. 4. & ſcb. pr. 3. hu.

COROLLARIVM I.

Colligitur ex conſtructione, & demonſtratione huius propoſitionis, quòd ſi, vt prima quantitas ad ſecundam, ita fiat media proportionalis inter eas, ad quartam: erunt quatuor illę quantitates continuè proportionales.

Nam

Nam A, C, B, D continuè proportionales oſtenſę ſunt.

COROLLARIVM II.

Rurſus conſtat, quòd ſi vt Rationalis ad Rationalem potẽtiâ tantùm ei commenſurabilem, ita fiat media proportionalis inter eas ad quartam: erunt duæ poſtremę conſequentes mediales potentia tantùm commenſurabiles, quarum productum eſt Rationale.

Eucl. 29 X.

PROPOS. XVI. PROBL. IV.

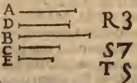
Duas mediales inuenire commenſurabiles potentiâ tantùm; quarum productum ſit mediale.

a pr. 21. & cor pr. 37. l. 8.

b pr. 8. & def 2. sec hu.

c pr. 1. 11. l. 4. & ſch. pr. 3. huius.

Sumantur [a] tres numeri R, S, & T, quorum quilibet primus numerus ſit, & propterea non habebunt inter ſe eandem proportionem, quam habent numeri quadrati; Et ſicuti in precedenti dictum eſt, fiat quadratum lateris Rationalis A ad quadratum lateris B, vt numerus R ad S, pariterque vt R ad T, ita quadratum ex A fiat ad quadratum ex C; Erunt [b] A, B, C Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles inter ſe; Iam [c] inter A, & B ponatur D media proportionalis, & fiat, vt D ad B, ita C ad E. Dico D, & E eſſe mediales potentiâ tantùm commenſurabiles, quę efficiunt productum mediale.



d pr. 12. hu.
e cor. 2 pr. 14. lib. 4. & ſch pr 3 hu
f pr 7. l 3.
g pr 12. l. 3
h pr 8. l. 4. & cor 2. pr. 1 huius.
i pr. 8. hu.
k pr. 14. hu
l cor 1 pr. 14 l. 4 & ſch pr. 3. hu.

Quoniam A, & B ſunt Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles: Erit [d] productum ex A in B, ſiue [e] quadratum ex media proportionali D (quod ęquale eſt tali producto) mediale, & D medialis. Deinde quia, vt D ad B, ita eſt C ad E, eſtque A ad D, vt D ad B: Ergo [f] A ad D eſt, vt C ad E; Et [g] permutando, vt A ad C, ita erit D ad E; & pariter [h] eorum quadrata proportionalia erunt: eſtque quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus R ad T. quare [i] D, & E potentiâ tantùm commenſurabiles ſunt, cùm numeri R, & T non ſint inter ſe, vt duo quadrati numeri; eſtque D oſtenſa medialis; Ergo [k] ei commenſurabilis E medialis quoque erit. Quapropter D, & E mediales erunt potentiâ tantùm commenſurabiles. Poſtremo quia D ad B eſt, vt C ad E; Ergo [l] productum ab extremis D, & E ęquale erit producto ab intermedijs B,

& C;

& C; ſed m productū ex B in C Irrationale, & mediale eſt, (quãdoquidem B, & C ſunt Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles): Igitur productum ex D in E mediale eſt. Vt erat propoſitum. *m pr. 12. huj.*

COROLLARIVM I.

Hinc conſtat productum ex duabus medialibus potentiâ tantùm commenſurabilibus eſſe poſſe Mediale, vel Rationale.

COROLLARIVM II.

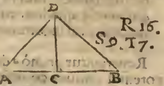
Patet etiam ſi fuerint tres rationales potētiâ tantùm commenſurabiles, & vt prima ad tertiam, ita fiat media proportionalis inter primam, & ſecundam ad aliam: erunt media proportionalis, & extrema potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum mediale eſt.

PROPOS. XVII. PROBL. V.

Eucl. 30. X.

Duas rationales potentiâ tantùm commenſurabiles inuenire tales, vt latus differentiæ quadratorum longitudine commenſurabile, vel incommenſurabile ſit maiori.

Sit expoſita rationalis A B, & primò reperiatur a numerus quadratus R, cuius vna portio S ſit quadratus numerus, & altera T non ſit quadratus numerus; Poſtea b fiat A B ad B C, vt numerus R, ſiue numeri S, T, ſimul ſumpti, ad numerum T: erit c per conuerſionem rationis A B ad A C, vt numerus R ad numerum S; & d B D fiat media proportionalis inter A B, & B C, atque A D fiat media proportionalis inter B A, A C. Et quia e vt A B ad B C, ita eſt quadratum ex A B ad quadratum ex B D, & vt A B ad A C, ita eſt quadratum ex A B ad quadratum ex A D; eſtque A B ad B C, vt numerus quadratus R ad numerum T non quadratum: Igitur quadrata ex A B, & B D non habent proportionem eandem, quam duo quadrati numeri, ſed quam numeri; ideoque f A B, & B D ſunt



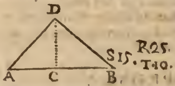
a ſcb pr 49 l. 8.
b pr. 11. l. 4. & ſcb. pr. 3. huius.
c cor pr. 15. l 3.
d pr. 10 l 4. & ſcb pr. 3. huius.
e cor. 3. pr. 17 lib 4. & cor. pr. 1. huius.
f def. 2. ſec. & pr. 8. hu.

Rationales potentiâ tantùm inter ſe commenſurabiles: & quia quadrata ex A B, & ex A D proportionem habent, quam duo numeri quadrati, erunt *g* latera A B, & A D longitudine commenſurabilia. Cùmq; *h* quadratum ex A B ad duo quadrata ex B D, & A D ſit, vt numerus R ad duos numeros S & T, ſitque numerus R æqualis numeris S & T, erit *i* quadratum ex A B æquale quadratis ex B D, & ex A D: Et propterea quadratum ex A D erit differentia quadratorum ex A B, & B D. Quapropter inuentæ ſunt duæ Rationales A B & B D potentiâ ſcilicet quadrato tantùm commenſurabiles, & A D latus differentiæ quadratorum commenſurabile longitudine eſt maiori ipſarum A B.

g pr. 8. huius *h cor. pr. 22. l. 3.* *i cor. 1 prop. 16. l. 3.*

Secundò reperiatur *k* quilibet numerus quadratus R, cuius duę portiones S & T non ſint quadrati numeri, & ponātur ea, quę ſuperius poſita, & conſtructa ſunt. Patet quòd quadrata ex A B, & A D non ſunt inter ſe vt numerus quadratus ad numerum quadratum (cùm numerus S quadratus non ſit); & ideo *l* A D, potens differentiam quadratorum ex A B & B D, longitudine incommenſurabilis eſt maiori A B. Quapropter inuentę erunt duæ rationales A B & B D potentiâ tantùm commenſurabiles, ita vt latus differentię eorundem quadratorum longitudine incommenſurabile ſit maiori A B. Vt quęrebatur.

k ſch prop. 41. l. 8. *l pr. 8. huius*



PROPOS. XVIII. PROBL. VI.

Eucl. 31. 32. X.

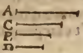
Inuenire duas mediales potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum ſit Rationale, vel Mediale, ita vt latus differentię quadratorum illarum longitudine commenſurabile ſit, vel incommenſurabile maiori.

Reperiantur primò *a* duę Rationales maior A, & B minor potentiâ tantùm commenſurabiles, ita vt latus differentię quadratorum earundem A, & B longitudine commenſurabile ſit in primo caſu, & incommenſurabile in ſecundo, maiori A; & *b* ponatur C media proportionalis inter A & B, & fiat vt A ad B, ita C ad quartam D. Patet *c* eſſe C, & D mediales potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum eſt Rationale: Et quia vt A ad B, ita eſt C ad D, erit *d* quadratū ex A

a prop. 17. huius. *b pr. 10 11. l. 4. & ſch. pr. 3. huius* *c cor 2. pr. 25 huius.* *d pr. 12 l. 4 & cor. 2 pr. 6. huius.*

ad

ad quadratum ex B, vt quadratum ex C ad quadratum ex D; & per conuerſionem rationis, *e* vt quadratum ex A ad differentiam quadratorum ex A, & B, ita erit quadratum ex C ad differentiam quadratorum ex C; & D: ideoque *f* vt A ad latus differentiæ quadratorum ex A, & B, ita erit C ad latus differentię quadratorum ex C, & D.; erat autem in primo caſu, maior A longitudine commenſurabilis lateri differentię quadratorum ex A, & B; in ſecundo verò longitudine incommenſurabilis: Igitur *g* C longitudine commenſurabilis erit in primo caſu, & incommenſurabilis in ſecundo, lateri differentię quadratorum ex C, & D. Quapropter inuentę ſũt duę mediales C, & D potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum eſt rationale, ita vt latus differentię quadratorum ipſarum C, & D longitudine commenſurabile ſit in primo caſu, & incommenſurabile in ſecundo, maiori lateri.



e cor pr. 19. l 3.
f pr 18. l. 4. & cor 2. pr. 1. huius.
g cor. 3 pr. 8 huius.

Poſtea *h* reperiantur duæ Rationales A, F potentiâ tantùm commenſurabiles, ita vt latus differentiæ quadratorum ex A, & F longitudine commenſurabile ſit maiori A in tertio caſu, & incommenſurabile longitudine eidem A ſit in quarto caſu. Et vt numerus primus V ad primum numerum X, ita fiat quadratum ex rationali A ad quadratum ex B: erunt A, & B rationales potentiâ tantùm commenſurabiles, ſicuti in prop. 15 huius oſtenſum eſt. Et *i* ponatur C media proportionalis inter A, & B, & vt C ad B ita fiat F ad D. Dico C, D eſſe mediales potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum eſt mediale, & latus differentiæ quadratorum commenſurabile eſt, vel non, maiori. Quia vt C ad B, ita eſt F ad D, & A ad C eſt, vt C ad B: Ergo *k* A ad C eſt, vt F ad D; Et permutando, *l* vt A ad F, ita erit C ad D: Cùmque ſint tres Rationales A, B, F potentiâ tantùm commenſurabiles, & vt prima A ad tertiam F, ita eſt C (quæ media proportionalis eſt inter primam A, & ſecundam B) ad poſtremam D: *m* erunt C, & D commenſurabiles potentiâ tantùm, quarum productum mediale eſt: Poſtea quia A ad F eſt, vt C ad D: Igitur, *n* vt oſtenſum eſt, maior A ad latus differentię quadratorum A, & F, erit vt C ad latus differentiæ quadratorum ex C, & D; Sed maior A commenſurabilis longitudine eſt in tertio caſu, & incommenſurabilis in quarto, lateri differentię quadratorum ex A,

A	
C	V 7
B	
F	X 5
D	

h pr. 19. huius.
i pr. 10. 11. l 4 & ſch. pr 3. huius.
k pr 7 l. 5.
l pr. 12 l 5.
m cor 2 pr. 16. huius.
n par 1 huius pr.

 & F.

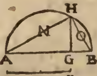
& F. Ergo maior C commenſurabilis longitudine erit lateri differentię quadratorum ex C, & D in tertio caſu, & incommenſurabilis longitudine eidem differentiæ in quarto caſu. Vt erat propoſitum.

Eucl 33. X.

PROPOS. XIX. PROBL. VII.

Duo latera potentiâ incommenſurabilia reperire, quorum ſumma quadratorum Rationalis ſit; productum verò mediale.

a pr. 17. hu. Reperiantur *a* duę quantitates, A B maior, & C D minor Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles, ita vt maior A B incommenſurabilis ſit longitudine lateri potenti differentiam quadratorum ipſarum A B, & C D; Et *b* maior A B ſecetur in G, ita vt C E ſemiſſis minoris, vel ei ęqualis H G media proportionalis ſit inter ſegmenta A G, & G B; & *c* inter A B, & A G reperiatur media proportionalis N, pariterque O ſit media proportionalis inter A B, & B G. Dico N, & O eſſe quæſitas in propoſitione. Quoniam maior A B ſecta eſt in G, ita vt ſit C E ſemiſſis minoris media proportionalis inter ſegmenta A G & G B, atque maior A B longitudine incommenſurabilis facta eſt lateri potenti differentiam quadratorum ex A B & C D, & *d* eiuſdem lateris differentialis, & maioris A B ſemiſumma eſt A G, & ſemidifferentia eſt G D: Ergo ſegmenta A G, & G B longitudine ſunt incommenſurabilia. Et quia *e* vt G A ad A B, ita eſt quadratum ex N ad quadratum ex A B, (cũ N media proportionalis ſit inter G A, & A B), & ſicuti A B ad B G, ita eſt quadratum ex A B ad quadratum ex O. Igitur ex *f* compoſitione ordinata erit quadratum ex N ad quadratum ex O, vt A G ad G B: Quare *g* quadratum ex N incommenſurabile erit quadrato ex O, ſicuti A G ipſi G B incommenſurabilis erat longitudine; & propterea *h* latera N, & O potentiâ incommenſurabilia erunt, & ſunt *i* duo quadrata ex N, & ex O ęqualia quadrato Rationali ex A B: Ergo aggregatum quadratorum ex N, & ex O Rationale eſt. Tandem quia H G media proportionalis eſt inter ſegmenta A G, & G B, atque N, & O mediæ proportionales ſunt inter totam A B, & eius ſegmenta A G, & G B: Igitur *k* productum ex A B in



b cor. 3 pr. 10. huius.

c pr. 10. l. 4 & ſch pr 3 huius.

d pr. 10 hu. eiuſq. cor 4

e cor 3 pr. 17 lib 4 & cor 1. pr. 1. huius.

f pr. 10. l. 5

g cor 3 pr 8 huius

h def 4 hu.

i pr 16 l 5. & pr 4 hu.

k prop. 9. & cor 1 pr 14 l. 4 & pr. 4. huius.

H G æquale erit producto ex N in O; eſt [l] autem productum ipſius A B in H G dimidium producti ex A B in C D (cùm C D dupla ſit ipſius H G). atque [m] productum ex A B in C D mediale eſt (eo quod A B, & C D Rationales ſunt potentià tantùm commenſurabiles): Ergo [n] productum ex A B in H G ei commenſurabile, mediale quoque erit; & propterea huic æquale productum ex N in O mediale erit. Quapropter duæ N, & O potentià incommenſurabiles ſunt, & ſumma quadratorum ex eis Rationalis eſt, at productum ex N in O mediale. Vt quærebatur.

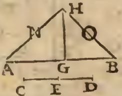
l pr.1. l.4. & ſ.ch pr.3. huius.
m pr 11. huius
n pr.14 hu.

PROPOS. XX. PROBL. VIII.

Eucl 34 35 X.

Duo latera potentià incommenſurabilia reperire, ita vt aggregatum ex eorum quadratis ſit mediale, productum verò rationale; vel productum ſit mediale, & incommenſurabile aggregato quadratorum.

Reperiantur [a] duæ mediales A B maior, & C D minor potentià tantùm commenſurabiles, quę primò Rationale contineant, ita vt maior A B longitudine incommenſurabilis ſit lateri, potenti differentiam quadratorum ipſarum A B, & C D. Et reliqua perficiantur, vt in præcedenti propoſitione factum eſt: erunt, vt antea N, & O potentià incommenſurabiles. Et quia [b] quadrata ex N, & O ęqualia ſunt quadrato ex mediali A B: Igitur [c] aggregatum quadratorum ex N, & O mediale erit. Deinde [d] quia productum ex H G in A B æquale eſt producto ex N in O, atque [e] productum ex H G in A B dimidium eſt producti ex A B in C D; hoc autem productum Rationale eſt ex conſtructione: Igitur [f] productum ex N in O (quod eſt commenſurabile producto ex A B in C D cùm ſit eius ſemiſſis) Rationale quoque erit. Quare duæ N, & O ſunt incommenſurabiles potentià, & eorum quadratorum aggregatum Mediale eſt, at eorum productum Rationale.



a pr.18.hu.
b pr 4.hu.
c pr 11. hu.
d pr.4 hu.
e pr.1. l.4. & ſcb.pr 3. huius
f def 4. ſec. huius.

Secundò [g] reperiantur eedem mediales A B, & C D cum omnibus dictis conditionibus, ſed eorum productum ſit mediale, & completà conſtructione, vt prius erunt rurſus N, & O potentià incõmenſurabiles, & quadratorum [h] aggregatum

g pr.18. hu.
h prop 4. & 11. huius.

carun-

earundem mediale erit, cùm ſit ęquale quadrato medialis A B. Poſtea quia productum ex A B in C D mediale eſt ex conſtructione: Ergo *i* productum ex N in O mediale erit, eo quod eſt cōmenſurabile, ſcilicet dimidium eſt producti ex A B in C D. Tandem quia factę ſunt A B, & C D longitudine incommenſurabiles, erit *k* quadratum ex A B incommenſurabile producto ex A B in C D; eſtque productum ex N in O dimidium producti ex A B in C D, vt dictum eſt. Igitur *l* quadratum ex A B, ſeu aggregatum quadratorum ex N & O, incommenſurabile eſt producto ex N in O. Et propterea repertæ erunt duæ N, & O potentiâ incommenſurabiles, cum omnibus conditionibus quæſitis. Vt fuit propoſitum.

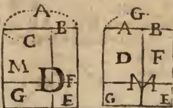
i pr. 1. l. 4 ſch. pr. 3. & pr. 14. huius
k pr. 1. l. 4. ſch. pr. 3. & cor. 3. pr. 8. huius.
l cor. pr. 12. huius.

Eucl. 36. 73. X.

PROPOS. XXI. THEOR. XIII.

Duarum Rationalium potentiâ tantùm commenſurabilium ſumma, vel differentia Irrationalis eſt. Vocetur autem ſumma Binomium; At earundem differentia Reſiduum; Atque Rationales illę Binomium, aut Reſiduum componentes: vocentur Nomina.

Sint duę Rationales A, & B potentiâ tantùm commenſurabiles. Dico ipſarum A, & B ſummam, vel differentiam C Irrationalem eſſe. Fiat *a* M quadratum ipſius C, & D ſit quadratum ipſius A, & E ſit quadratum ipſius B, & tam G, quàm F ſit productum ex A in B. Manifeſtum eſt quando C eſt aggregatum ipſarum A, & B, vt in prima figura, eſſe *b* quadratum M ex aggregato laterum ęquale duobus quadratis laterum, ſcilicet D & E, & duplo producti ex lateribus A in B, ſcilicet ipſius G, & F, vel duplo producti F, & propterea quadratum M ęquale erit aggregato duorum quadratorum D & E, & dupli producti F; At quando C eſt differentia eorundem laterum, vt in ſecundâ figurâ, *c* quadratum M ex differentia laterum minus erit, quàm duo quadrata D & E, & defectus erit duplum producti F; Et quoniam A, & B ponuntur potentiâ tantùm commenſurabiles, erunt *d* ipſę incommenſurabiles longitudine, & *e* eorum productum F mediale erit, atque *f* eorum quadrata, ſcilicet D, & E rationalia erũt,



a pr. 34. l. 1. & def. 2. & 1. huius.
b cor. 2. pr. 19 l. 5 & pr. 2. huius.
c cor. 1. pr. 20 l. 5 & pr. 2. huius.
d def. 4. hu.
e pr. 12 hu
f def. 2. ſec. huius.

&

& inter ſe commenſurabilia: Quare g mediale, ſeu irrationa- *g pr. 12. &*
le productum F incommenſurabile eſt rationali quadrato D; *def. 3 ſec.*
& h ſunt duo quadrata D, & E, ſimul ſumpta, commenſurabi- *huius.*
lia cuilibet eorum; ſcilicet quadrato D (eo quod quadrata D, *h cor 1. pr.*
& E commenſurabilia inter ſe oſtenſa fuerunt): igitur i pro- *10 huius.*
ductum F incommenſurabile eſt aggregato quadratorum D, *i cor. pr. 12.*
& E; eſt verò duplum producti F commenſurabile eius me- *huius.*
dietati, ſcilicet producto F. Igitur k duplũ producti F incom- *k cor. pr. 12*
menſurabile eſt ſummę quadratorum D, & E: Cùmque to- *huius.*
tum quadratum M aggregatum ſit, in primo caſu, & diffe-
rentia in ſecundo, ſummæ quadratorum D & E, & dupli pro-
ducti F; Ergo l tam aggregatum, quàm differentia M incom- *l cor. 2. pr.*
menſurabilis eſt ſummę quadratorum D, & E; Sed quadra- *10. huius.*
tum D commenſurabile eſt ſummę quadratorum D, & E: Er-
go m quadratum M, totale, vel differentiale, eſt incommen- *m cor prop.*
ſurabile quadrato D, erat autem ex hypotheſi quadratum D *12. huius.*
Rationale: Igitur n quadratum M Irrationale erit; & pro- *n def 4. ſec.*
pterea o C ſumma, vel differentia ipſarum A & B, Irrationa- *huius.*
lis erit, vt propoſitum fuerat. Vocetur autem ſumma C Bino- *o def. 5 ſec.*
mium; & differentia C Reſiduum, vel Apotome. Et tam A, *huius.*
quàm B: vocentur Nomina Irrationalis C.

COROLLARIVM.

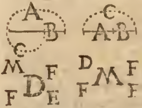
Manifeſtum eſt nominum eiuſdem Binomialis, aut Reſiduæ ſummam duorum quadratorum ex eis, Rationalem eſſe, & incommẽſurabilem mediali duplo producti eorundem nominum. Nam nominum A, & B Binomij, vel Reſidui C ſumma quadratorum, ſcilicet D, & E oſtenſa eſt in hac propoſitione, Rationalis, & incommenſurabilis duplo producti medialis F eorundem nominum.

PROPOS. XXII. THEOR. XIV. *Eucl. 37. 74. X.*

Duarum medialium potentiâ tantùm comenſurabilium, quarum productum ſit Rationale, ſumma, vel differentia Irrationalis eſt; Vocetur autem ſumma Bimedialis prima; Differentia verò vocetur Reſidua medialis prima; Et duæ illę partes Bimedialem primam, aut Reſiduam medialem primam efficientes: vocentur Nomina.

Sint

Sint duę mediales A, & B potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum, quod ſit F, Rationale ſit (quę reperiri poſſe conſtat ex pr. 15. huius), & C ſit ſumma in primo caſu, & differentia in ſecundo earundem A, & B. Dico C Irrationalem eſſe. Sit rurſus D quadratum ipſius A & E ſit quadratum alterius B, atque M ſit quadratum ipſius C aggregati, vel differentię earundem A, & B. Patet [a] eſſe quadratum M, in primo caſu, aggregati ſummæ quadratorum D, & E, atque dupli producti F: At in ſecundo [b] M erit differentia duorum quadratorum D, & E ſimul ſumptorum, & dupli producti F. Quoniam A, & B potentiâ tantùm ſunt commenſurabiles, erit [c] A ipſi B longitudine incommenſurabilis; ſed [d] vt B ad A, ita eſt productum ex A in B, ſcilicet F ad productum ex A in ſe, ſcilicet ad quadratum D: Igitur [e] productum F incommenſurabile eſt quadrato D; Sed duplum ipſius F commenſurabile eſt ipſi F; Igitur [f] duplum ipſius F incommenſurabile erit quadrato D; eſtque ſumma quadratorum D, & E commenſurabilis quadrato D, (eo quod A, & B ſupponuntur potentiâ tantùm commenſurabiles); igitur [g] duplum ipſius F incommenſurabile eſt ſummæ quadratorum D, & E; ideoque [h] quadratum M, quod eſt aggregatũ, vel differentia dupli ipſius F, & ſummæ quadratorum D & E, incommenſurabile erit vtrique ipſorum; ideſt quadratum M incommenſurabile erit duplo ipſius F; ſed duplum ipſius F Rationale eſt (cùm F productũ ex A in B Rationale ſit ex hypotheſi): Ergo [i] quadratum M, & eius latus C Irrationale erit, vt fuit propoſitum. Vocetur autem ipſarum A, & B ſumma C, Bimedialis prima, & earundem differentia C: Vocetur reſidua medialis prima.



a cor. 2. pr. 19 l. 5 & pr. 1 huius
b cor. 1 pr. 20. lib. 5. & pr. 2. huius.
c def. 4 hu.
d pr. 1. l. 4. & ſch. pr. 3. huius.
e cor. 3. pr. 8. huius.
f cor. pr. 12. huius.
g cor. pr. 12. huius.
h cor. 2 pr. 10. huius.
i def. 4. 5 ſec. huius.

COROLLARIVM. I

Manifeſtum eſt Bimedialis primę, vel Reſiduę medialis primę ſummam quadratorum ex nominibus factorum medialem eſſe, & incommenſurabilem Rationali duplo producti eorundem nominum.

Nam Bimedialis primæ, vel Reſiduę medialis primę duo nomina in hac propoſitione fuerunt A, & B, & oſtenſa fuit ſumma quadratorum D, & E incommenſurabilis duplo producti

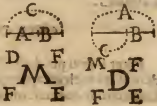
ducti F eorundem nominum A, & B; eſtque ſumma quadratorum D, & E Medialis, cùm ſit commenſurabilis quadrato Mediali D ex latere Mediali A.

PROPOS. XXIII. THEOR. XV.

Eucl. 38. 75. X.

Duarum Medialium potentiâ tantùm commenſurabilium, quarum productum ſit mediale, ſumma, vel differentia Irrationalis eſt: Vocetur ſumma Bimedialis ſecunda; Differentia verò vocetur Reſidua medialis ſecunda. Et illæ, quæ has Irrationales efficiunt, vocentur Nomina eius.

Sint duæ mediales A, & B potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum productum, quod ſit F, mediale ſit, quæ repertę fuerunt in pr. 16. huius; & reliqua perficiantur, vt in præcedenti propoſitione dictum eſt. Et quia A, & B potentiâ tantùm commenſurabiles ſunt. Ergo vt prius, oſtendetur ſummam quadratorum D, & E incommenſurabilē eſſe duplo producti F: Eſtque ſumma a quadratorū Medialium D, & E commenſurabilis mediali quadrato D (cùm A, & B ſupponantur mediales potentiâ tantùm



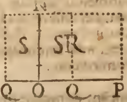
commenſurabiles): Igitur b ſumma quadratorum D, & E medialis eſt: pariterque duplum producti ipſius F medialis, erit quoque mediale (eo quod mediali F commenſurabile eſt eius duplū). Poſtea exponatur Rationalis N O, & c ei applicetur productum R ęquale ſummæ quadratorum D, & E, quod efficiat latitudinē OP. Et quia ſumma quadratorum D, & E medialis eſt, erit d R mediale, quod applicatum ad Rationalem N O efficiet e latus O P Rationale incommenſurabile longitudine ipſi N O: Simili modo ad Rationalem N O applicetur productum S ęquale duplo ipſius F medialis, quod ſimiliter mediale erit, & ideo efficiet latus Q O Rationale, & longitudine incommenſurabile ipſi N O. Et quoniam ſumma quadratorum D, & E incommenſurabilis oſtenſa eſt duplo ipſius F, eſtque R ęqualis ſummę quadratorum D & E, atque S æqualis duplo ipſius F: f Igitur R ipſi S incommenſurabilis eſt, ſed, vt R ad S, ita eſt latus O P ad O Q. Ergo g latus O P longitudine incommenſurabile eſt lateri O Q, & ſunt Rationa-

a cor. 1. & 10. huius.
b pr. 14. hu.
c pr. 10. l. 6. & ſch. pr. 3. huius.
d pr. 12. hu.
e pr. 13. hu.
f pr. 1. l. 4. & ſch. pr. 3. huius.
g cor. 3. pr. 8. huius.

 lia,

i def 2. ſec. huius, & cor. pr 17 l 3 l cor. 21. hu. lia, vt dictum eſt: Igitur i tantùm commenſurabilia potentia inter ſe erunt O P, & O Q: Quare l P Q ſumma, vel differentia earum Irrationalis erit, quæ vocatur Binomialis, vel Reſidua. Tandem quia ſumma productorum Medialium R, & S, vel eorum differentia applicata ad Rationalem N O, efficit alterum latus P Q Irrationale: erit ſumma, vel differentia Medialiũ R, & S Irrationalis (Nam k ſi Rationalis eſſet applicata ad Rationalem N O, efficeret latitudinem P Q Rationalem, quod non ponitur); Sed quadratum M æquale eſt ſummæ in primo caſu, & differentiæ in ſecundo Medialium R, & S: Igitur l quadratum M Irrationale eſt, & propterea eius latus C Irrationale erit; Vt erat propoſitum. Vocetur ſumma C Bimedialis ſecunda. Et differentia C earundem A, & B: Vocetur Reſidua Bimedialis ſecunda.

k cor pr. 11. huius.



l def 4 & 5. ſec. huius.

COROLLARIVM I.

Patet ſi duo producta Medialia incommenſurabilia ad eandem Rationalem applicentur, efficere reliquorum literarum ſummam Binomialem, differentiam verò Apotomen.

COROLLARIVM II.

Eucl. 27. X.

Manifeſtum eſt ſummam, vel differentiam duorum productorum Medialium, Irrationalem eſſe.

Oſtenſa enim fuit in hac propoſitione ſumma, vel differentia Medialium productorum incommenſurabilium R, & S Irrationalem eſſe. At ſi medialia R, S fuerint commenſurabilia, erit m eorum ſumma, vel differentia commenſurabilis vni ipſorum S; ſed n quadratum ex rationali N O (cui applicata ſupponũtur producta medialia) incõmenſurabile eſt mediali S: ergo o ſumma, vel differentia medialium R, S incommenſurabilis eſt quadrato rationalis N O: & ideo p ſumma, vel differentia R, & S irrationalis erit.

m cor. 1. pr. 10. huius. n def. 4 ſec. huius. o cor. pr. 12 huius. p def 4 ſec. huius.

COROLLARIVM III.

Similiter conſtat Bimedialis ſecundę, & Reſiduæ medialis ſecun-

ſecundę, ſi ſumma duorum quadratorum, ex nominibus eius ad eandem Rationalem applicetur, ad quam duplum producti eorundem nominum applicatur: efficere duorum reliquorum laterū ſummam Binomialē, differentiā verò Apotomē.

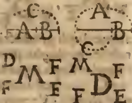
Nam duorum nominum Bimedialis ſecundæ C, & Reſiduæ medialis ſecundæ C, ſumma quadratorum D & E applicata ad Rationalem N O facit latus O P, atque duplum producti F applicatum ad eandem Rationalem N O latitudinem facit O Q. Et oſtenſa fuit in hac propoſitione ſumma latitudinum P Q Irrationalis, quæ Binomialis dicitur, & differentia earundem P Q Irrationalis, quæ Reſidua dicitur.

PROPOS. XXIV. THEOR. XVI.

Eucl. 39. 76. X.

Duarum quantitatum potentiâ incommenſurabilium, quarum quadrata, ſimul ſumpta, Rationale conſtituant, & eorum productum ſit Mediale; ſumma vel differentia Irrationalis eſt: vocetur autem ſumma Maior, & differentia vocetur Minor. Et illæ, quæ has irrationales efficiunt vocentur Nomina earum.

Sint [a] duę quantitates A, & B potentiâ incommenſurabiles, quarum quadrata D, & E, ſimul ſumpta, Rationale efficiant, at productum ex A in B, quod ſit F, Mediale ſit. Dico ipſarum A, & B ſummam, vel differentiam C Irrationalem eſſe. Quoniam productum F ponitur Mediale, & eſt duplum ipſius F commenſurabile eidem F; Igitur [b] duplum ipſius F Mediale eſt; & ideo irrationale: erat autem ſumma duorum quadratorum D, & E Rationalis. Ergo [c] ſumma duorum quadratorum D, & E incommenſurabilis eſt duplo producti F: Quare [d] quadratum M, quod eſt ęquale, vt dictum eſt, aggregato, vel differentię ſummę quadratorū D, & E, & dupli producti F, erit incōmenſurabile ſummę quadratorū D, & E; eſtque talis ſumma quadratorum D, & E Rationalis; igitur [e] quadratum M Irrationale erit, cùm eidem ſummę incommenſurabile ſit. Quapropter [f] eius latus C ſumma, vel differentia ipſarum A, & B irrationalis erit. Vt erat propoſitum. Vocetur ſumma C Maior, & differentia C vocetur Minor.



[a] ex pr. 19. huius.
[b] pr. 14 & 12. huius.
[c] def. 3. & 4 ſec. huius.
[d] cor. 1 pr. 10. huius.
[e] def. 4 ſec. huius.
[f] def. 5. ſec. huius.

COROLLARIVM.

Patet Irrationalis, quæ Maior, aut Minor vocatur ſummã quadratorum ex eius nominibus Rationalẽ eſſe; Et duplum producti eorundem nominum, Mediale.

Eucl 40.77. X.

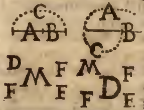
PROPOS. XXV. THEOR. XVII.

Duarum quantitatum potentiâ incommenſurabilium, quarum ſumma quadratorum Medialis ſit, & earum productum ſit Rationale, ſumma, vel differentia Irrationalis eſt. Vocetur autem ſumma Rationale, ac medium potens. At differentia vocetur Faciens cum rationali totum mediale. Et ipſæ efficientes vocentur Nomina earum.

a ex pr. 10. huius.

Sint a duę quantitates A, & B potentiâ incommenſurabiles, & facta eadem conſtructione, ſumma quadratorum D, & E Mediale compoſitum efficiat, at productum F ex A in B ſit Rationale. Dico ipſarum A, & B ſummam, vel differentiam C Irrationalem eſſe. Quoniam ſumma duorum quadratorum

b def 4 ſec. huius.



D, & E Mediale compoſitum efficit, & duplũ b producti F eſt Rationale, cùm eius dimidium F ſupponatur Rationale: erit ſumma duorum quadratorum D, & E incommenſurabilis duplo producti F: Igitur c aggregatum, vel differentia ſummæ quadratorum D & E, atque dupli producti F, ſcilicet quadratum M, incommenſurabile erit duplo producti F; eſtque duplum producti F Rationale; Ergo d quadratum M Irrationale eſt; & ideo eius latus C, quod eſt ſumma, vel differentia ipſorum A, & B, Irrationale erit; Vt erat propoſitum. Vocetur ſumma C Rationale, ac medium potens; At differentia C vocetur Faciẽs cum rationali totum mediale.

c cor. 2. pr. 10. huius.

d def. 4. & 5 ſec. huius.

Eucl 41.78. X.

PROPOS. XXVI. THEOR. XVIII.

Duarum quantitatum potentiâ incommenſurabilium, quarum ſumma quadratorum Medialis ſit, & earum productũ Mediale, incommenſurabileque ſummę quadratorum:

erit

erit ſumma, vel differentia Irrationalis. Vocetur autem ſumma Bina media potēs. At differentia C vocetur Efficiēs cum mediali totum mediale. Et quæ eas efficiunt, vocentur Nomina earum.

Sint *a* duę quantitates A, & B potentià incommenſurabiles, & facta eadem conſtructione, ſumma quadratorum D, & E Mediale compoſitum efficiat, at productum F ſit pariter mediale, ſed ſit incommenſurabile ſummę quadratorum D, & E. Dico ipſarum A, & B ſummam, vel differentiam C Irrationalem eſſe. Quoniam *b* duplum producti F Mediale eſt, eo quòd eius dimidium F Mediale ponitur; atque ſumma quadratorum D, & E Medialis eſt: Igitur *c* quadratum M, (quod eſt ex ſuperius dictis, aggregatum, vel exceſſus duarum Medialium, ſcilicet ſummæ duorum quadratorum D, & E, atque dupli producti F) Irrationale eſt; ideoque *d* eius latus C Irrationale erit; Vt erat propoſitum. Vocetur ſumma C Potens bina media; At differentia C vocetur Efficiens cum mediali totum mediale. *a ex pr. 20. huius.* *b pr. 14. huius.* *c cor 2. pr. 23. huius.* *d def. 5. sec. huius.*

C A B
2F
M D E

COROLLARIVM.

Patet etiam, quòd Potentis bina media, aut Efficientis cum mediali totum mediale, ſi ſumma duorum quadratorum ex nominibus ad eandem Rationalem applicetur, ad quam duplum producti eorundem nominum applicatur: efficietur duorum reliquorum laterum ſumma, vel differentia Binomialis vel Reſidua. Nam, vt oſtenſum, eſt *e* duo Medialia inter ſe incommenſurabilia, ſcilicet ſumma quadratorum D, E, & duplum producti F, ad Rationalem applicata, efficiunt latitudines Rationales, quæ longitudine incommenſurabiles ſunt inter ſe; & propterea prædictæ latitudines Rationales erunt potentià tantùm commenſurabiles: quare *f* component Binomialem, aut Reſiduam. *e pr. 23. huius.* *f pr. 21. hu.*

PROPOS. XXVII. THEOR. XIX.

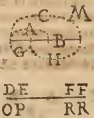
Eucl 42. 43.44.45. 46.47 79. 80.81.82. 83.84. X.

Quælibet ex dictis duodecim Irrationalibus reſolui non poteſt in nomina inęqualia ijs, ex quibus genita fuit.

Sit

a in 6. præced prop. Sit quælibet ex duodecim *a* dictis Irrationalibus C orta ex ſumma, aut ſubtractione nominum A, & B. Dico eam reſolui non poſſe in alia nomina inæqualia ipſis A, & B. Si enim hoc verum non eſt, reſoluatur C in nomina G, & H inæqualia ipſis A, & B. Et fiat *b* M quadratum ipſius C, & ſint D, E quadrata nominum A & B, atque duplum F ſit duplum producti ex A in B; pariterque O, & P ſint quadrata nominũ G & H, & duplũ R ſit duplum producti ex G in H. Et primò ſit C Binomialis aut Reſidua, vel certè irrationalis, quę vocatur Maior, vel Minor. Quoniam tam *c* ſumma quadratorum D, & E, quàm ſumma quadratorum O, P Rationalis eſt: & tam duplum producti F, quàm duplum producti R Mediale eſt: erit *d* differentia dupli F Medialis à duplo R Mediali, Irrationalis; & quia eadem quantitas C diuiditur intra, aut extra, bis inæqualiter; ergo *e* eadem eſt differentia inter duplum producti F, & duplum R, quæ inter quadratorum ſummam D, E, & O, P: igitur cùm differentia Medialium dupli F, & dupli R ſit Irrationalis; erit quoque differentia inter D E, & O P Irrationalis, quod eſt abſurdum. Differentia enim Rationalium D E, & O P commenſurabilis vtrique *f* rationalium eſt Rationalis. Quare C reſolui non poteſt in alia nomina præter A, & B.

b pr 34. l. 1 pr. 20 l. 4. & def. 1. 2. huius.

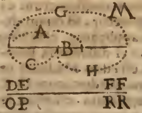


c cor pr. 21. & cor pr. 24 huius.

d cor. 2 pr. 23. huius.

e pr. 5. huius

f cor 1. pr. 10 & def 4 ſec. huius.



Secundò ſit C Bimedialis prima, vel Reſidua Medialis prima, vel C ſit Rationale, ac medium potens, vel Faciens cum rationali totũ mediale. Quoniam tam duplum *g* producti F, quàm duplum producti R Rationale eſt, atque tam ſumma quadratorum D, E, quàm ſumma quadratorum O, P eſt Medialis; eſtque *h* differentia dupli F à duplo R æqualis differentiæ D, E ab O, P: Ergo ſicuti differentia Rationalium dupli F, & dupli R eſt, Rationalis, ita differentia D, E ab O P Rationalis eſt: Igitur differentia duorum Medialium D, E, & O, P Rationalis eſt, quod eſt *i* abſurdum. Non ergo C, H inæqualia ipſis A, B poſſunt eſſe nomina ipſius C.

g cor pr 22. & ex pr. 25 huius.

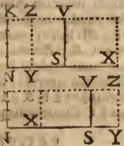
h pr. 5 huius

i cor. 2 pr. 23. huius.

Tertiò ſit C Bimedialis ſecunda, vel Reſidua medialis ſecunda; Vel certè C ſit Potens bina media, aut Efficiens cum mediali totum mediale. Ad eandem rationalem K N applicetur

tur k productum K X equale quadrato M, & K S ęquale quadratis D, E; necnon K Y ęquale duobus quadratis O, P. Et quoniam in primo caſu l tam ſumma quadratorum D, E, & dupli producti F, quàm ſumma quadratorum O, P, & dupli producti R ęqualis eſt eidem quadrato M: At in ſecundo m caſu tam exceſſus quadratorum D, E ſupra duplum producti F; quàm exceſſus quadratorum O P ſupra duplum R ęqualis eſt quadrato M: Ergo reſiduum V X ęquale erit duplo producti F, & Z X ęquale erit duplo producti R. Quare n ex applicatione ſummę quadratorum D, E, & dupli producti F, nominum Binomialis ſecundæ, & Reſiduæ medialis ſecundæ; o vel Potentis bina media, & Efficientis cum mediali totum mediale ad eandem Rationalem K N efficientur duo latera, ſeu nomina N S, S X, necnon N Y, Y X ex applicatione facta, quorum ſumma N X Binomialis, & differentia Reſidua erit: & ideo eiuſdem Binomialis N X, aut Reſiduæ nomina erunt, nedùm N S, S X ſed etiam N Y, Y Z, p quod eſt impoſſibile: Non igitur Irrationalis C reſolui poteſt in alia nomina diuerſa ab ipſis A, & B, quod erat oſtendendum.

k pr. 10 l. 4 & ſch pr. 10 huius.
l cor 2. pr. 19 lib 5 & pr. 1 huius.
m cor. 1. pr. 20 l. 5. & pr 2. huius.
n cor 3. pr. 23 huius.
o cor pr. 26 huius.



p par. 1. huius pr.

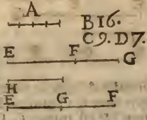
Eucl. 48. 85 X.

PROPOS. XXVIII. PROBL. IX.

Binomialem, aut Reſiduam reperire, cuius maius nomen commenſurabile longitudine ſit, nedùm expoſitæ Rationali, ſed etiam lateri potenti differentiam quadratorum eorundem nominum: Vocetur illa Binomialis prima; hęc verò Reſidua prima.

Sit a quantitas E F commenſurabilis longitudine expoſitæ Rationali A: Et b ſumatur quadratus numerus B, cuius portio C ſit numerus quadratus, at portio D non ſit quadratus numerus; & c vt numerus B ad D, ita fiat quadratum ex E F ad quadratum ex F G, atque vt idem numerus B ad C, ita fiat idem quadratum

a ex pr. 9. huius.
b ſch. pro. 45 l. 8.
c ex cor. 3. pr. 17. l. 4. & ſch pr. 3. huius.



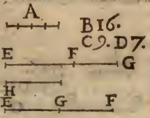
dratum

d cor. pr. 22. lib. 3. dratum ex E F ad quadratum ex H. Et quoniam *d* vt numerus B eſt ad duos numeros C, & D, ita eſt quadratum ex E F ad duo quadrata laterum F G, & H; eſtque numerus B ęqualis *e cor. 1. pr. 16 l. 3.* numeris C, & D. Ergo *e* quadratum ex E F ęquale erit quadratis ex F G, & ex H, ideoque E F maior erit, quàm F G, & H erit latus potens differentiam quadratorum ex E F, & F G: *f pr 8 huius g def. 2. ſec. huius.* eſtque *f* H ipſi E F longitudine commenſurabilis, eo quod quadratum ex H ad quadratum ex E F eſt, vt numerus quadratus C ad numerum quadratum B; & E F, & F G ſunt potentiâ tantùm commenſurabiles, non autem longitudine, eo quod eorum quadrata habent eandem proportionem, quam numerus quadratus B ad non quadratum D, & *g* ſunt *h pr. 21. hu.* Rationales, eo quod E F expoſitæ Rationali A commenſurabilis eſt: Igitur *h* nominum E F, & F G ſumma E G erit Binomialis, & differentia Reſiduum erit, & eſt maius nomen E F commenſurabile longitudine nedùm expoſitę Rationali A, ſed etiam lateri H, quod poteſt differentiam quadratorum nominum E F, & F G; Et hoc erat faciendum. Vocetur ſumma E G Binomialis prima. Et differentia E G Reſidua prima.

Eucl. 49. 86. X.

PROPOS. XXIX. PROBL. X.

Binomialem, aut Reſiduam inuenire, cuius minus nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine. At maius nomen commenſurabile ſit longitudine lateri potenti differentiam quadratorum eorundem nominum. Vocetur illa Binomialis ſecunda; reliqua verò Reſidua ſecunda.



a ſch. pr. 45. lib. 8. b ex cor. 3. pr. 17. l. 4. & ſch. pr. 3. huius. c prop. 8 & def 2 ſec. huius.

Sit F G expoſitę Rationali A cōmenſurabilis longitudine, poſitiſq; eiſdē *a* numeris præcedentis propoſitionis fiat, *b* vt numerus quadratus B ad eius portionem nō quadratam D, ita quadratum ex E F ad quadratum ex data F G, & vt numerus B ad C, ita fiat quadratum ex E F ad quadratū ex H. Quia *c* E F, & F G ſunt Rationales & inter ſe potentiâ tantùm cōmenſurabiles (eo quod ſunt inter ſe vt numeri B, & D, licet non, vt duo numeri quadrati) & eſt minor G F expoſitę Rationali A longitudine com-

commenſurabilis: Igitur *d* ſumma E G eſt Binomium, & differentia Reſiduũ, cuius minus nomen longitudine commenſurabile eſt expoſitę Rationali, at maius nomen eſt commenſurabile longitudine lateri H, quod poteſt differentiam quadratorum nominum. quod faciendum erat. Vocetur ſumma E G Binomialis ſecunda, & differentia E G Reſidua ſecunda. *d pr. 21. huius.*

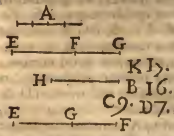
PROPOS. XXX. PROBL. XI.

Eucl. 50. & 87. X.

Binomialem, aut Reſiduam reperire, cuius duo nomina non ſint longitudine commenſurabilia expoſitæ Rationali, & maius nomen longitudine commenſurabile ſit lateri potenti differentiam quadratorum nominum. Vocetur illa Binomialis tertia, & reliqua Reſidua tertia.

Reperiatur *a* numerus quadratus B, cuius portio D non ſit quadratus, & ſit numerus impar & primus, & portio C ſit numerus quadratus, ponaturque quilibet alius numerus primus K, maior quàm B. Patet numerum K quadratum non eſſe, aliàs primus numerus K ab eius latere, ſcilicet ab aliquo numero metiretur; Poſtea *b* vt numerus primus K ad B, ita fiat poteſtate Rationalis A ad E F, atq; vt numerus B ad D, ita fiat E F ad F G potentià, nec non vt numerus B ad C, ita fiat E F ad H potentià. Et quia quadrata ex E F, & ex A ſunt, vt quadratus numerus B ad non quadratum K; erit *c* E F expoſitę Rationali A potentià tantùm commenſurabilis; cùmque duo quadrata ex E F & F G habeãt rationem eandem, quàm numeri B, D, qui vt duo quadrati non ſunt: erunt E F, & F G potentià commenſurabiles tantummodo; Et quia vt numerus K ad B; ita erat quadratum ex A ad quadratum ex E F; & vt numerus B ad D, ita erat quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Ergo *d* ex compoſitione ordinata erunt quadrata ex A, & ex F G inter ſe, vt duo numeri primi K & D, & ideo *e* non vt numeri quadrati; quare *f* F G, & A potentià tantùm commenſurabiles ſunt; igitur nec E F, nec F G eſt longitudine commenſurabilis expoſitę Rationali A: ſed tantùmodo potentià; & ideo *g* duarum

a ex cor pr. 43 & ex pr. 21. lib. 8.
b ex cor 5. pr 17. lib 4. & ſch. pr. 3. huius.
c pr 8. huius.
d pr. 19 l. 3.
e cor pr. 15. lib. 8.
f prop 8. hu.
g pr. 21. hu.



Iii Ratio-

Rationalium E F, F G potentiâ tantùm commenſurabilium ſumma E G Binomialis eſt, differentia verò Reſidua, cuius maius nomen E F longitudine b commenſurabile eſt lateri H, quod poteſt, vt prius dictum eſt, differentiam quadratorum nominum (cùm ſit E F ad H potentiâ, vt numerus quadratus B ad numerũ quadratũ C); & neq; E F, neq; F G lõgitudine eſt commenſurabile expoſitæ Rationali A. Et hoc erat faciendum. Vocetur ſumma E G Binomialis tertia; Et differentia E G Reſidua tertia.

b pr. 8 huius

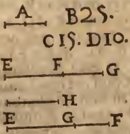
Eucl. 51. 90. X.

PROPOS. XXXI. PROBL. XII.

Binomialem, aut Reſiduam quantitatem reperire, cuius maius nomen commenſurabile ſit longitudine expoſitę Rationali, at lateri quadrati differentialis quadratorum nominum, ſit longitudine incommenſurabile. Vocetur ſumma Binomialis quarta; Et differentia Reſidua quarta.

a ſch. pr. 45. lib. 8.

Ponatur rurſus E F longitudine commenſurabilis expoſitę Rationali A: Et a numerus quadratus B diſtribuatur in duos numeros C, & D, quorum neuter quadratus ſit, & vt antea fiat, vt numerus B ad D, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Patet b eſſe E F, & F G Rationales potentiâ tantùm inter ſe commenſurabiles, eo quod eorum quadrata habent proportionem eandem, quam duo numeri D, & B, qui non ſunt, vt duo quadrati; & ſunt F G, & E F Rationali expoſitę A commenſurabiles: Quare c ſumma nominum E G Binomialis erit, & differentia erit Reſidua: Cumque quadratum ex E F ſit ad differentiam quadratorum ex E F, & F G, vt numerus B quadratus ad non quadratum C, erit d maius nomen E F incommenſurabile lõgitudine lateri quadrati differentialis quadratorum eorundem laterum, quod ſit H. Reperta ergo eſt Binomialis, aut Reſidua, cuius maius nomen commenſurabile eſt longitudine expoſitę Rationali, pariterque nomen eius maius longitudine incommenſurabile eſt lateri potenti differẽtiam quadratorum nominum. quod erat faciendum. Vocetur ſumma



b cor. pr. 12. def. 2. ſec. & pr. 6. huius.

c pr. 21. hu.

d pr. 8. huius

ma

ma A G Binomialis quarta; & differẽtia A G Reſidua quarta.

PROPOS. XXXII. PROBL. XIII.

Eucl. 52. 92. X.

Binomialem, aut Reſiduam inuenire, cuius minus nomen expoſitę Rationali commenſurabile ſit longitudine, at maius nomen incommenſurabile ſit longitudine lateri potenti differentiam quadratorum nominum. Vocetur ſumma Binomialis quinta; differentia verò Reſidua quinta.

Sit F G expoſitę Rationali A commenſurabilis longitudine; & poſitis iiſdem numeris pręcedentis propoſitionis, fiat, vt a numerus B ad D, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G, & reliqua perficiantur vt prius. Quoniam quadrata ex E F, & F G ſunt inter ſe, vt duo numeri B, & D, qui vt duo quadrati non ſunt: Igitur b E F, & F G potentiâ tantùm commenſurabiles ſunt; & c ſunt Rationales, eo quod F G expoſitę Rationali A commenſurabilis erat: Igitur d ſumma nominum F G erit Binomialis, & differentia erit Reſidua; & e eſt maius nomen E F incommenſurabile longitudine ipſi H, quod eſt latus potens differentiã quadratorũ ex E F, & F G, eo quod vt prius prædicta quadrata ex E F, & ex H ſunt inter ſe, vt duo numeri B, C qui non ſunt, vt duo quadrati numeri: Igitur Binomialis, aut Reſidua E G habet minus nomen F G longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali A, atque maius nomen eius incommenſurabile eſt longitudine lateri potenti differentiã quadratorũ nominũ. Et hoc erat faciẽdũ. Vocetur ſumma Binomialis quinta, differentia verò Reſidua quinta.

a ex cor. 5. pr 17. l. 4. & ſch pr. 3. huius.
b pr 8 hu.
c cor pr. 12. & def 2. ſec huius.
d pr. 2. hu.
e pr 8 huius.

PROPOS. XXXIII. PROBL. XIV.

Eucl. 53. 92. X.

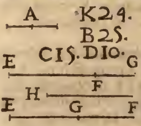
Binomialem, aut Reſiduam reperire, cuius duo nomina expoſitę Rationali incommenſurabilia ſint longitudine, & maius nomen ſit longitudine incommenſurabile lateri potenti differentiam quadratorũ nominum. Vocetur autem ſumma Binomialis ſexta, & differentia Reſidua ſexta.

Diuiſo rurſus a quadrato numero B in duos numeros C, & D non quadratos, ponatur b numerus primus K maior, quàm B, & c vt k ad numerum B, ita fiat poteſtate expoſita Rationalis A ad E F, & vt B ad D, ita fiat potentiâ E F ad F G, atque

a ſch pr 45. l 8.
b ex pr. 21. l 8.
c ex cor. 5. pr 17. l. 4. & ſch pr. 3. huius.

Vt B ad C, ita fiat E F ad H poteſtate: erunt (vt dictum eſt in 30. propoſ. huius) E F & F G commenſurabiles potentiâ tantùm eidem Rationali A, non autem longitudine; & propterea *d* E F, & F G Rationales erunt, & *e* inter ſe potentiâ tantùm commenſurabiles, eſtque *f* E F longitudine incommenſurabilis ipſi H lateri differentię quadratorum ex E F, & F G; propterea quod quadrata ex E F, & ex H ſunt inter ſe, vt numeri B, & C, qui non ſunt, vt duo numeri quadrati: Igitur *g* ſumma E G eſt Binomialis, & differentia E G eſt Reſidua, cuius duo nomina incommenſurabilia ſunt longitudine expoſitæ Rationali A, atque maius nomen eius E F incommenſurabile eſt longitudine lateri quadrati differentialis inter quadrata nominum. Et hoc erat faciendũ.

d def.2 ſec. huius.
e cor pr.17. lib 6.
f pr.8 huius
g pr.21.hu.



Vocetur autem ſumma E G Binomialis ſexta; & differentia E G Reſidua ſexta.

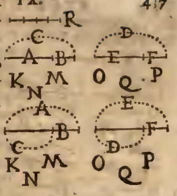
PROPOS. XXXIV. THEOR. XX.

Eucl.66.67. 68.69 70. 103. 104. 105. 106. 107. X.

Quęlibet quantitas commenſurabilis cuilibet ex dictis Irrationalibus, & ipſa Irrationalis eſt eiuſdem denominationis, & ordinis. Et illa quæ longitudine commenſurabilis fuerit cuilibet ſpeciei Binomialium, vel Reſiduarum: & ipſa Binomialis, aut Reſidua erit eiuſdem denominationis, & ſpeciei.

Sit primò quælibet ex Irrationalibus iam *a* expoſitis C, cuius nomina A, & B; ſitque quęlibet quantitas D commenſurabilis ipſi C, ſiue longitudine, ſiue potentiâ tantùm. Dico D Irrationalem eſſe eiuſdem denominationis cum ipſa C. Fiat vt *b* C ad D, ita B ad F: erit reſidua, *c* vel ſumma A ad reſiduam, vel ſummam E, vt C ad D; & ideo permutando, *d* vt A ad B, ita erit E ad F: quare *e* A ipſi B, atque E ipſi F vnà commenſurabiles ſunt potentiâ, vel vnà incommenſurabiles. Poſtea fiant *f* quadrata K ipſius A, M ipſius B, O ipſius E, & P ipſius F; Inſuper N ſit productum ex A in B, & Q ſit productum ex E in F. Quoniam vt C ad D, ita eſt A ad E, atque B ad F; Ergo quam rationem commenſurabilem habet C ad D, ſiue longitudine & potentiâ, ſiue potentiâ tantùm *g* eandem commenſura-

a in 12 prg. ad pr.
b pr.11 l.4. & ſch.pr.3. huius.
c pr 15.l 3.
d pr.12.l 3.
e cor. 3. pr. 8.huius.
f pr 34. l.1. & ſ.b.pr.3. huius.
g cor.3. pr. 8.huius.

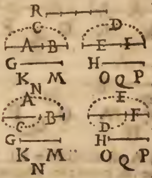


ſurabilem rationem habebit A ad E, atque B ad F; ideoque h eorum quadrata k ad O, & M, ad P & i ſummę K, O ad M P, nec k nō productum N ad ei ſimile Q eandem cōmenſurabilem rationem habebunt, quam quadratum ex C ad quadratum ex D habet. Iam ſi maius nomēn A commenſurabile exiſtens expoſitæ Rationali R, fuerit Rationale, l erit E quatenus commenſurabile eſt, Rationali A pariter Rationale; ſimiliter quando A eſt mediale m erit ei commenſurabile E mediale quoque, & propterea eorum quadrata K & O erunt vnà rationalia, vel vnà medialia; eadem ratione nomina B & F erunt vnà Rationalia, vel vnà medialia, atque eorum quadrata M, & P erunt vnà rationalia, vel vnà medialia, pariterque quadratorum ſummę K, M, & O, P erunt vnà rationales, vel vnà mediales; nec non producta N & Q erunt vnà rationalia, vel vnà medialia. poſtea quia vt quadratorum ſumma K, M ad ſummam O, P ita erat productum N ad Q; permutando n K M ad N, erunt vt O, P ad Q; & ideo o K, M, ipſi N, atque O, P, ipſi Q vnà commenſurabilia, vel vnà incommenſurabilia erunt. Et quoniam in qualibet ex dictis Irrationalibus, aut nomina A, & B p ſunt Rationalia potentià commenſurabilia, aut ſunt q Medialia potentià tantùm commenſurabilia, aut ſunt r potentià Incommenſurabilia, & ſumma quadratorum K, & M Rationalis eſt vel Medialis, productum verò N, aut Rationale eſt vel Mediale, quod aut commenſurabile eſt, vel incommenſurabile ſummæ quadratorum K & M, Sed nomina E, & F oſtenſa ſunt eodem modo Rationalia, vel Medialia, vel potentià incommenſurabilia; & habere omnes conditiones, quas habent nomina A, & B. Igitur Irrationalis quantitas D eiuſdem denominationis eſt cum Irrationali C; ſcilicet ſi C fuerit Binomialis, erit quoque D Binomialis, & ſi C fuerit Maior, erit quoque D Maior, & ſi C fuerit Reſiduum mediale primum, erit quoque D Reſiduum mediale primum, & ſic de reliquis.

Secundò ſit C vna ex ſex ſpeciebus Binomialium, ſ aut Reſiduum; & D ſit longitudine commenſurabilis Irrationali C. Dico D eſſe Irrationalem, eiuſdem denominationis, & ſpeciei,

h pr 18. l. 4. cor. 2 pr. 1. & cor 3 pr. 8. huius.
i pr. 15. l. 3.
k pr 18 l 4. & ſch pr. 3. huius.
l def 2. ſec. huius.
m pr. 14 hu.
n pr. 22. l. 3
o cor. 3. pr. 8. huius.
p pr 21. hu.
q pr 22. & 23. huius.
r pr 24. 25. 26. huius.
ſ pr 28. 29. 30. 31 32. 33. huius.

cici, ſcilicet ambę erunt Binomiales primæ, aut ambę Binomiales ſecundæ &c. Sit G latus potens differentiam quadratorum K, & M nominum A. B; pariterque H ſit latus potens differentiam quadratorum O, & P nominũ E F. Et quia, vt dictum *t* eſt, quadratum K ad quadratum O, eſt vt quadratum M ad quadratum P; erit *u* reliquum quadratum ex G ad reliquũ quadratum ex H, vt totum quadratum K ad totum quadratum O. Et permutando *x* quadratum K ad quadratum ex G erit, vt quadratum O ad quadratum ex H; & *y* propterea latus prioris, ſcilicet A ad G erit, vt E ad H: Pari modo oſtendetur B ad G, vt F ad H; Quare ſi maius nomen A commenſurabile longitudine, vel incommenſurabile fuerit ipſi G, potenti differentiam quadratorum nominum; Simili *z* modo maius nomen E commenſurabile longitudine, aut incommenſurabile erit lateri H, potenti differentiam quadratorum nominum E, & F: Et ſi quidem maius nomen A, vel minus B longitudine commenſurabile, vel incommenſurabile fuerit expoſitæ Rationali R; cùm nomina E, & F longitudine commenſurabilia ſint nominibus A, & B (eo quod in eadem ſunt ratione commenſurabili, quã D habet ad C), erunt quoque *a* nomina, E vel F eodem modo longitudine commenſurabilia, aut incõmenſurabilia Rationali R. Igitur *b* qualiſcunque ex ſex Binomialibus, aut Reſiduis fuerit C, erit D eiuſdem ſpeciei. Vt propoſitum fuerat.



t pr. 1. huius pr.
u pr. 15. l. 3.
x pr. 12. l. 3.
y pr. 18. l. 4. & cor. 2. pr. 1. huius.
z cor. 3 pr. 8. huius.
a cor. pr. 17. l. 3 & cor 3 pr 8. huius.
b pr. 28 uſq; ad 33. huius

PROPOS. XXXV. THEOR. XXI.

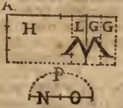
Eucl. 54 91. 55. 92 56. 93 57 94 58. 95. 59. 96. X.

Si inter Rationalem, & vnam ex ſex ſpeciebus Binomialium, aut Reſiduarum media proportionalis ponatur, erit illa vna ex prioribus 12 Irrationalibus.

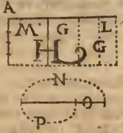
Sit expoſita Rationalis A, & M ſit vna ex 6 ſpeciebus Binomialium, aut Reſiduarum, cuius nomina ſint H L maius, & 2 G minus, ſitque P media proportionalis inter A, & M. Dico P eſſe vnam ex 12 Irrationalibus expoſitis in prop. 21. 22. 23. 24. 25, & 26. Ponatur *a* 1 G ſemiſſis minoris nominis media

a pr. 10. l. 4. cor. 3. pr. 10. huius, & ſeb. pr. 3. huius.

dia proportionalis inter ſegmenta H & L nominis maioris, & ponatur inter H, & A media proportionalis N, & inter L & A media proportionalis O. Quoniam



in qualibet ſpecie *b* Binomialium, aut Reſiduarum nomina H L & 2 G ſunt Rationalia inter ſe potentià tantùm commenſurabilia, eſtque G commenſurabilis longitudine eius duplo 2 G: Ergo *c* G erit Rationalis, & non longitudine, ſed potentià tantùm commenſurabilis erit nomini H L; Et quia G ſemiſſis minoris nominis eſt media proportionalis inter maioris nominis ſegmenta H, & L: Ergo *d* H eſt ſemiſumma, & L ſemidifferentia maioris H L, & lateris potentis differentiam quadratorum ex H L & 2 G: ſed in 3 prioribus ſpeciebus *e* maius nomen H L longitudine commenſurabile eſt lateri potenti differentiam quadratorum nominum, & *f* in 3 poſterioribus eidem lateri eſt incommenſurabile longitudine: Ergo *g* in tribus poſterioribus ſpeciebus Binomialium, & Reſiduarum H, & L ſunt longitudine incommenſurabilia inter ſe, & in tribus prioribus ſpeciebus ſegmenta H, & L ſunt longitudine inter ſe commenſurabilia; & propterea *h* erit Rationalis ſumma H L vtrique H, & L longitudine commenſurabilis; & ideo tam H, quam L Rationales erunt longitudine inter ſe commenſurabiles.



b pr. 28, 29, 30. 31. 32. 33. huius.
c def. 2. sec. & cor prop. 12. huius.
d cor. 4. pr. 10. huius.
e pr. 28. 29. 30 huius.
f pr. 31. 32. 33. huius.
g pr. 10. hu.
h cor. 1. & 2 prop 10. & def. 2 sec. huius.

Et verò quoniam *i* in Binomiali, aut Reſidua prima maius nomen H L longitudine commenſurabile eſt expoſitæ Rationali A: Ergo Rationalis H, quæ longitudine commenſurabilis oſtenſa eſt nomini H L, erit *k* quoque longitudine commenſurabilis Rationali A; & propterea N, media proportionalis inter A, & H, erit *l* quoque Rationalis: ſed quia continuè proportionales ſunt A, N, H, & A, O, L, atq; *m* H, G, L; erit N ad O, vt H ad G; & ideo *n* eodem modo N ipſi O potentià tantùm commenſurabilis erit, ſicuti H ipſi G cõmenſurabilis oſtenſa eſt; & fuit N Rationalis: Ergo *o* ei commenſurabilis O Rationalis quoque erit. Quapropter *p* nominum N, & O ſumma P Binomialis erit, & differentia Reſidua.

i pr. 28 hu.
k cor. pr. 27 & 3.
l ex pr 11. huius.
m ex cor. 28 pr 1 & 5. & pr. 1 hu.
n cor 3 pr. 8 huius
o def 2. sec huius.
p pr. 21. hu.

Secundò quoniam in Binomiali, aut Reſidua ſecunda ex

prop.

prop. 29. huius, eidem expoſitę Rationali A maius nomen Rationale H L incommenſurabile eſt longitudine, & Rationale minus nomen 2 G longitudine commenſurabile eſt, erunt *q* Rationalia ſegmenta H, & L (quæ *r* longitudine commenſurantur ſummæ H L) non longitudine, ſed potentiâ tantùm commenſurabilia Rationali A; atque G ſemiſſis Rationalis 2 G, erit longitudine commenſurabilis Rationali A. Quare *s* N & O (quæ medię proportionales ſunt inter A, H, & A, L Rationales potentiâ commenſurabiles) erunt Medialia, & productum ex N in O, quod *t* eſt æquale producto ex A in G, Rationalibus longitudine commenſurabilibus, erit *u* Rationale. Quare nominum N, & O ſumma P erit *x* Bimedialis prima, & differentia erit Reſidua medialis prima.

q cor. pr. 12. huius.
r cor. 1. 2 pr. 10 huius.
s pr. 12. hu.
t cor 2. pr. 14. lib. 4. & ſch. pr. 3. hu.
u pr. 11. hu.
x pr 22 hu.
y pr. 30. hu.

Tertiò quoniam *y* in Binomiali, aut Reſidua tertia ambo Rationalia nomina H L & 2 G ſunt longitudine incommenſurabilia expoſitę Rationali A, erunt *z* Rationalia ſegmenta H, L & G (quæ longitudine commenſurabilia erant ipſis H L, & 2 G) longitudine incõmenſurabilia Rationali A: Quare *a* N & O medialia erunt, eo quod ſunt media proportionalia inter Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles; pariterque productum ex N in O Mediale erit, quia vt dictum eſt, ęquale eſt producto ex Rationalibus potentiâ tantùm commenſurabilibus A, & G. Et propterea *b* nominum N, O ſumma P erit Bimedialis ſecunda, differentia verò Reſidua medialis ſecunda.

z cor. pr. 12. huius.
a pr. 12. hu.
b pr. 23. hu.

Quartò quoniam *c* in Binomiali, aut Reſidua quarta maius nomen H L longitudine eſt commenſurabile expoſitæ Rationali A: erit *d* productum ex A in H L Rationale, & ſunt continuè proportionales A, N, H, & A, O, L: Ergo *e* quadratum ex N æquale eſt producto ex A in H, & quadratum ex O ęquale eſt producto ex A in L; & propterea ſumma quadratorum ex N & O ęqualis erit producto Rationali ex A in H L, & ideo ſumma quadratorum Rationalis erit: poſtea quia minus nomen 2 G Rationale, & incommenſurabile longitudine eſt Rationali A: erunt 2 G & A Rationalia potentiâ tantùm commenſurabilia; & ideo *f* productum ex A in 2 G Mediale erit, & *g* eius ſemiſſis, ſcilicet productum ex G in A, ſeu *h* ei ęquale productum ex N in O Mediale erit: *i* ſuntq; N & O potentiâ, vt eſt longitudine commenſurabilis H ad L:

		2 G	
M	H		L
P		N O	
		A	

c pr. 31. hu.
d pr. 11 hu.
e cor. 2. pr. 14. lib. 1. & ſch. pr. 3. hu.
f pr. 12. hu.
g pr 14. hu.
h cor 1. pr. 14 lib. 4 & ſch. pr. 3. hu.
i ex cor. 3 pr. 17 & 4 pr 1. & cor. 3 pr. 8. hu.

Igitur k nominum N & O ſumma P Irrationalis eſt, quę Maior vocatur, differentia verò minor.

Quintò quoniam l Binomialis, aut Reſiduæ quintæ minus nomen 2 G cõmenſurabile eſt longitudine expoſitę Rationali A: erit m eius ſemiſſis G Rationalis longitudine commenſurabilis Rationali A; & ideo n productum ex A in G, ſeu o ex N in O Rationale erit: Et quia H L Rationalis eſt, & longitudine incommenſurabilis Rationali A, erunt H L & A Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles; & ideo p productum ex A in H L, ſeu ex A in H, & ex A in L Medialia erunt; sũtque quadrata ex medijs proportionalibus ex N & O ęqualia productis ex A in H & in L: Ergo ſumma quadratorum ex N, & O medialis eſt. Tandem quia N ad O potentiâ eſt vt H ad L longitudine, hæ autem ſunt longitudine incommenſurabiles: Ergo N & O potentiâ ſunt incommenſurabiles. Et propterea q nominum N, O ſumma P erit Potens rationale ac medium, differentia verò Efficiens cum rationali totum mediale.

Sextò quoniam r Binomialis, aut Reſiduę ſextę ambo Rationalia nomina non longitudine, ſed potentiâ tantùm commenſurabilia ſunt expoſitę Rationali A: Ergo ſ productum ex A in H L, ſeu ex A in H, & ex A in L ſimul, Mediale conficiunt, ſuntque t quadrata ex medijs proportionalibus N & O ęqualia productis ex A in H, & ex A in L: Ergo quadratorum ex N & O ſumma Medialis erit. Similiter u G ſemiſſis minoris nominis potentiâ tantùm commenſurabilis erit Rationali A; & ideo productum ex A in G, ſeu x ex N in O Mediale erit: Eſtque Binomialis, aut Reſiduæ maius nomen H L lõgitudine incõmẽſurabile minori nomini 2 G, & eius ſemiſſi G: Igitur y producta ex A in H L, & ex A in G incommenſurabilia ſunt; & propterea ſumma quadratorum ex N & O æqualis priori producto incommenſurabilis erit producto ex N in O, ęqu[ali] ſecundo producto. Tandem quia N ad O potentiâ eſt, vt H ad L longitudine, vt dictum eſt, & fuit H longitudine incommenſurabilis ipſi L: Ergo N ipſi O potentiâ incommenſuſurabilis eſt. Quapropter z nominum N & O ſumma P, erit Potens bina media, & differentia erit Efficiens cum mediali totum mediale. Quæ erunt oſtendenda.

k pr. 24. hu.
l pr. 32. hu.
m cor pr 17 l. .. & def. 2. ſec huius.
n pr 12 hu.
o cor. 1 pr. 14 lib 4 & ſch pr. 3 hu.
p pr 12. & ſch pr. 3. hu.
q pr. 25. hu.
r pr. 33. hu.
ſ pr 12. hu. & ſch. pr. 1. l. 4. & ſch. pr. 3 huius.
t cor 2. pr. 14 lib. 4. & ſch pr 3 hu.
u cor pr. 12 huius.
x cor 1. pr. 4. lib 4 & ſch pr. 3. & pr 12 hu.
y pr 1 l. .. ſchol pr. 3. & cor 1. pr. 6 huius.
z pr. 20 hu.

Add. 60. 97. 61. 98. 62. 99. 63. 100. 64. 101. 65. 102. X.

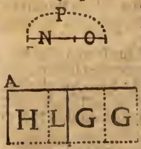
PROPOS. XXXVI. THEOR. XXII.

Si vt Rationalis ad aliquam ex duodecim prioribus Irrationalibus, ita hæc fiat ad tertiam proportionalem, erit poſtrema vna ex ſpeciebus Binomialium, aut Reſiduarum.

a pr. 10 11. l. 4. & ſcb. pr. 3. huius. b pr. 15 l. 3 & pr. 1. 2 hu.

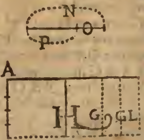
Sit expoſita Rationalis A, & ſit P quęlibet ex 12 prioribus Irrationalibus, cuius nomina ſint N maius, & O minus, & vt A ad N *a* ita fiat N ad H, & O ad G, atque vt A ad O, ita fiat O ad L, & N ad G. Patet *b* eſſe ſummam, vel differentiam H L, & 2 G tertiam proportionalem Rationalis A, & ſummæ, vel differentię nominum N & O. & ſit M ęqualis ſummæ, vel differentię ipſarum H L, & 2 G. Quoniam G ſemiſſis ipſius 2 G media proportionalis eſt inter portiones H, & L: Ergo duę

c cor. 2 pr. 26. l. 3. d cor. 4. pr. 10. huius. e pr. 10. hu.



G *c* minores ſunt, quàm duę H & L; *d* & H eſt ſemiſumma, & L ſemidifferentia maioris H L, & lateris potentis differentiam quadratorum inęqualium H L, & 2 G; & *e* propterea H ipſi L, nec non maius latus H L lateri potenti differentiam quadratorum ipſarum H L, & 2 G vnà commenſurabilia erunt lõgitudine, vel vnà incommenſurabilia. Rurſus quoties G Rationalis fuerit potentià tantùm commenſurabilis ipſi H L, erit *f* quoque eius duplum 2 G Rationale, & potentià tantùm commenſurabile ipſi H L; & quando H, & L fuerint commenſurabiles inter ſe longitudine, & Rationales, erit eorum ſumma H L (quę vtrique ipſarum commenſurabilis eſt longitudine) Rationalis quoque.

f cor pr. 12. & def 2 ſec. huius.



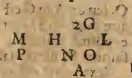
g pr. 21. & def 2 ſec hu. h cor. 3. pr. 17. l. 4. & cor 1. pr 1. huius. i cor pr. 17. l. 3. k cor. 1. pr. 10 & par. 2 huius. pr.

Iam quia Binomialis, *g* aut Reſiduæ nomina N & O Rationalia ſaltem potentià, commenſurabilia ſunt expoſitę Rationali A, & ſunt potentià tantùm inter ſe commenſurabilia, atque *h* ſunt tertiæ proportionales H, & L, longitudine ad eandem A, vt N & O potentià commenſurabiles ſunt ad A: Ergo H, & L Rationales ſunt longitudine commenſurabiles eidem A; & ideo *i* inter ſe quoque cõmenſurabiles, & *k* ſumma

ma H L nedùm Rationali A longitudine, ſed etiam lateri po-
tenti differentiam quadratorum ex H L, & ex duplo mediæ
proportionalis inter H & L longitudine commenſurabilis e-
rit; cùmque l G ad H ſit, vt O ad N, quæ ſunt potentiâ tan- *l cor. 3. pr. 19 l. 3.*
tùm commenſurabilia: Ergo m G, & eius duplum 2 G poten-
tiâ tantùm commenſurabilis erit ipſi H, & ideo erit Rationa- *m cor pr 10 & def 3 ſecun huius.*
lis; eſtque n ſumma H L commenſurabilis longitudine H, vel
L inter ſe longitudine commenſurabilium: Ergo o minus no- *n cor 1 pr. 10 huius.*
men 2 G Rationale, & potentiâ commenſurabile eſt maiori
nomini H L. Quapropter p nominum H L & 2 G ſumma M *o cor. pr 17. l 3 & def. 2 ſec huius.*
Binomialis prima erit, & eius differentia Reſidua prima.

Secundò quia q Bimedialis primæ, aut Reſiduæ medialis *p pr. 28 hu.*
primę nomina N, O medialia ſunt potētiâ tantùm commen- *q pr 22 hu.*
ſurabilia, quorum productum eſt Rationale, & ſunt N, O *r pr 13 hu.*
media proportionalia inter expoſitam Rationalem A & H, *ſ cor. pr 12. & def. 2 ſecun. huius.*
L: Ergo r H & L Rationalia ſunt non longitudine, ſed poten-
tiâ tantùm commenſurabilia ipſi A; & ſ eorum ſumma H L
potentiâ tantùm commenſurabilis ipſi A, Rationalis erit, eſtq;
vt N ad O cōmēſurabilis potētiâ, ita H ad L longitudine, vt di-
ctum eſt: Ergo H ipſi L longitudine commenſurabilis erit,
& ideo t ſumma H L longitudine commenſurabilis erit lateri *t par. 1. huius pr.*
potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex duplo me-
diæ proportionalis G. Tandem quia productū ex N in O, u ſeu *u cor 1. pr. 14 lib. 4. & ſcb pr. 3 hu.*
ex A in G Rationale eſt: Igitur x G eiuſque duplum Ratio-
nale erit, & longitudine commenſurabile ipſi A. Quare y no- *x pr. 31. hu.*
minum H L & 2 G ſumma M Binomialis ſecunda erit, & dif- *y pr 29. hu.*
ferentia Reſidua ſecunda.

Tertiò quoniam z Bimedialis ſecundæ, & Reſiduæ media- *z pr 23. hu.*
lis ſecundæ nomina N, O medialia ſunt potentiâ tantùm *a par 1. huius pr.*
commenſurabilia, quorum productum eſt mediale, erūt, a vt
dictum eſt H, & L Rationalia non longitudine, ſed potentiâ
tantùm commenſurabilia expoſitę Ra-
tionali A, & eorum ſumma H L Ratio-
nalis, & potētiâ tantùm cōmenſurabilis
Rationali A; eſtq; vt N ad O potētiâ, ita
H ad L longitudine: Ergo H ipſi L lon- *b par 1 huius pr*
gitudine commenſurabilis erit, & ideo



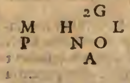
latus b H L longitudine commenſurabile erit lateri potenti *c cor 1. pr. 14 lib. 4 & ſcb pr 3. hu.*
differentiam quadratorum ex H L & ex 2 G. Tandem quia
productum ex N in O, ſeu c ei ęquale ex A in G mediale eſt, *d pr. 13. 14. huius.*
erit d latus G, eiuſque duplum 2 G Rationale, & longitudine

 incom-

p pr.30.bu. incommenſurabile expoſitæ Rationali A. Quare nominum H L, & 2 G ſumma M Binomialis tertia erit, & differentia Reſidua tertia.

f pr.24.bu. Quartò quia f Maioris, aut Minoris nomina N. O potentiâ incommenſurabilia ſunt, quorum quadrata Rationale, & g cor 2 pr. 14 & ſch. pr.1.l.4 & ſch pr.3 bu. productum Mediale efficiunt, ſuntque g quadrata ex N & O æqualia productis ex A in H, & ex A in L ſcilicet producto ex A in H L: Igitur productum ex A in H L Rationale erit; & h pr.11.bu. ideo h latus H L Rationale, & longitudine commenſurabile i cor 2 pr. 17.lib.4 & cor 1 pr 1. & cor.3.pr. 8 huius. erit expoſitę Rationali A. Et quia i vt N ad O eſt potentiâ incommenſurabilis, ita H ad L longitudine incommenſurabilis eſt, propterea k H L longitudine incommenſurabilis erit lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex 2 G. k par.1.huius pr. Tandem quia productum ex N in O, ſeu ex A in G Mediale eſt, erit reliquum l latus G, & eius duplum 2 G Rationale, & l pr.13.14. huius. longitudine incommenſurabile expoſitæ Rationali A. Quare m nominum H L & 2 G ſumma M Binomialis quarta erit, & m pr.31.bu differentia Reſidua quarta.

n pr.25 bu. Quintò quia n Potentis rationale ac medium, vel efficientis cum rationali totum mediale, nomina N & O potentiâ ſunt incommenſurabilia, quorum productum eſt Rationale, & quadratorum ſumma medialis; ſuntque quadrata ex N & o par.4.huius pr. O æqualia producto ex A in H L, vt o dictum eſt, Ergo p producti medialis ex A in H L latus H L Rationale eſt longitu- p pr.13.bu. dine incommenſurabile expoſitę Rationali A. Et quia vt N ad O eſt potentiâ incommenſurabilis,



q par.4.huius pr. ita H ad L longitudine incommenſurabilis q oſtenſa eſt: Ergo r H L longitudi- r par.1.huius pr. ne incommenſurabilis eſt lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex 2 G. Tandem quia productum ex N in O, ſeu ex A in G eſt Rationale: erit ſ reliquum latus G eiuſ- ſ pr.11. bu. que duplum 2 G rationale, & longitudine commenſurabile t pr.32.bu. expoſitæ Rationali A. Quapropter t nominum H L, & 2 G ſumma M Binomialis quinta eſt, & differētia reſidua quinta.

u pr.26.bu. Sextò quia u Potentis bina media, vel Efficientis cum mediali totum mediale nomina N, O, ſunt potentiâ incommenſurabilia, quorum ſumma quadratorum medialis eſt, & productum mediale incommenſurabile ſummæ quadratorum; x par.4.5. huius pr. eſtque x ſumma medialis quadratorũ ex N & O æqualis proy pr.13.bu. ducto ex A in H L, vt dictum eſt: Ergo y latus H L Rationale

eſt,

eſt, & longitudine incommenſurabile expoſitæ Rationali A; Et quia vt N ad O eſt potentiâ incommenſurabilis, ita oſtenſa eſt H ad L longitudine incommenſurabilis: Ergo a H L longitudine incommenſurabilis eſt lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex 2 G: Poſtea quia productum ex N in O, ſeu ex A in G eſt mediale, erit b reliquum latus G eiuſque duplum 2 G Rationale, & longitudine incommenſurabile Rationali A. Tandem quia ſumma quadratorum ex N & O incommenſurabilis eſt producto ex N in O, ſeu ex A in G, & fuit productum ex A in H L æquale quadratis ex N & C: Ergo productum ex A in H L incommenſurabile eſt producto ex A in G, & ideo c H L incommẽſurabile longitudine erit ipſi G, eiuſque duplo 2 G, & d propterea nominum H L & 2 G ſumma M Binomialis ſexta erit, differentia verò Reſidua ſexta. Quæ erant oſtendenda.

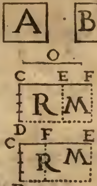
x par. 4. & huius pr. — a par. 1 huius pr. — b pr. 13. huius — c pr. 1. l. 4. ſcb pr 3. & cor 3. pr. 8. huius. — d pr. 33. hu.

PROPOS. XXXVII. THEOR. XXIII.

Eucl 71. 108. 109. X.

Latus potens ſummam, vel differentiã Rationalis, & Medij, Irrationale eſt vnum ex octo prioribus.

Sit productum Rationale A, & latus ipſum potens ſit R, productum verò B ſit Mediale, eumque poſſit latus M, & a vt expoſita Rationalis D C ad R, ita ponatur R ad C E, atque vt D C ad M, ita ponatur M ad E F. Et quia æquè altis productis eiuſdem D C in C E, & in E F b æqualia ſunt quadrata ex medijs proportionalibus M, & R, ſeu producta A & B: Ergo c ſumma, vel differentia ipſorum A & B æqualis erit producto ex D C in C F ſummam, vel differentiam ipſarum C E, & E F; ſitque O potens ſummam, vel differentiam productorum A & B: manifeſtum eſt d O mediam proportionalem eſſe inter D C, & C F ſummam, vel differentiam ipſarum C E, & E F. Dico iam O eſſe Binomialem, aut Bimedialem primam, vel Maiorem, aut Potentem Rationale, ac Medium, vel certè earundem Reſiduam aliquam. Quoniam productum ex D C in C E æquale eſt Rationali A: erit e C E Rationale, & longitudine commenſurabile expoſitę Rationali D C; pariterque quia productum



a pr 10 l. 4. & ſcb. pr. 3. huius. — b cor 2. pr. 14. lib 4. & ſcb. pr 3 hu. — c ſcb. pr. 8. l 4 & ſcb. pr. 3. huius. — d cor. 2. pr. 14. lib 4. & ſcb pr. 3. huius. — e cor. pr. 1 x. huius.

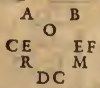
ex D C

f pr.13.hu. ex D C in E F æquale eſt Mediali B; erit *f* E F Rationale, at longitudine incommenſurabile erit expoſitæ Rationali D C, & *g cor. pr 12. & def. 2. ſec huius.* ideo *g* C E, E F erunt Rationales non longitudine, ſed potentiâ tantùm commenſurabiles inter ſe, & propterea inæquales erunt. Sit primo loco C E maior reliqua, & longitudine commenſurabilis lateri potenti differẽtiam quadratorum earundem C E, & E F, et erat C E longitudine commenſurabilis *h pr 28. hu.* expoſitæ Rationali D C: Igitur *h* nominum C E, et E F ſumma *i pr. 35. hu.* C F erit Binomialis prima, et differentia Reſidua prima: Quare *i* O media proportionalis inter Rationalem D C, et Binomialem, aut Reſiduam primam C F: erit Binomialis, aut Reſidua.

Secundò, reliquis manentibus, ſit maius nomen C E longitudine incommenſurabile lateri potenti differentiam quadratorum ex C E, et E F. Patet *k* C F ſummam, vel differentiam eorundem nominum Binomialem aut Reſiduam quartam eſſe, et *l* mediam proportionalem O inter E F, et Rationalem D C Irrationalẽ eſſe Maiorem, aut Minorem dictam. *k pr 31. hu* *l pr. 35. hu.*

Tertiò ſit nomen E F maius, quàm C E, & E F commenſurabile ſit lõgitudine lateri potenti differentiam quadratorum nominum; cùmque minus nomen C E longitudine commenſurabile ſit expoſitæ Rationali D C: erit *m* Rationalium potentiâ commenſurabilium ſumma C F Binomialis ſecunda *n*, & differentia Reſidua ſecunda: Igitur *n* media proportionalis O erit Bimedialis prima, aut Reſidua medialis prima. *m pr. 29. hu* *n pr 35. hu.*

Quartò ſit maius nomen E F longitudine incommenſurabile lateri potenti differentiam quadratorum nominum (reliquis manentibus) erit *o* ſumma nominũ C F Binomialis quinta, & differentia Reſidua quinta; & propterea *p* O media proportionalis inter Rationalem D C, & dictam Irrationalem, erit Potens Rationale ac Medium, vel efficiens cum Rationali totum Mediale. Vt propoſitum fuerat. *o pr. 32. hu.* *p pr. 35. hu.*



PROPOS. XXXVIII. THEOR. XXIV.

Eucl 72. 110. X.

Latus potens ſummam, vel differentiam duorum Medialium inter ſe incommenſurabilium, vnum eſt ex quatuor irrationalibus poſtremis expoſitis.

Sint

Sint A, & B Medialia inter ſe incommenſurabilia & R poſſit productum A, ſed M poſſit productum B, & facta eadem conſtructione præcedentis propoſitionis, O poſſit ſummam, vel differentiam Medialium A & B, ſeu productorum eiuſdem altitudinis D C in C E, & E F. Dico O eſſe Bimedialem ſecundam, vel Potentem bina media, ſiue earundem Reſiduam aliquam. Quoniam Medialia A B, ſeu producta illis æqualia D C in C E, & D C in E F ponuntur incõmenſurabilia, erunt inæqualia; & ideo *a* C E, & E F incommenſurabiles longitudine, & inæquales erunt. Sit iam primò C E maior, & longitudine commenſurabilis lateri potenti differentiam quadratorum inæqualium C E, & E F. Cùmque producta ex D C in C E, & E F æqualia ſint Medialibus A & B, erunt *b* latera C E, & E F Rationalia, & expoſitæ Rationali D C incõmenſurabilia longitudine, vt prius inter ſe longitudine incommenſurabilia oſtenſa fuerunt; & ideo Rationalia C E, & E F potentiâ tantùm commenſurabilia erunt. Quare *c* nominum C E, & E F ſumma C F Binomialis tertia erit, differentia verò Reſidua tertia. Igitur *d* O media proportionalis inter C F, & Rationalem D C, erit Bimedialis ſecunda, vel Reſidua medialis ſecunda.

A B
O
CE EF
R M
DC

a pr. 1 l. 4. ſch. pr. 3 & cor. 3. pr. 8. huius.

b pr. 12 hu.

c pr. 31 hu.

d pr. 35. hu.

Sit ſecundò maius nomen C E longitudine incommenſurabile lateri potenti differentiam quadratorum nominum, cùmque ambo medialia nomina incommenſurabilia ſint lõgitudine expoſitæ Rationali C D: erit *e* ſumma nominũ C F Binomialis ſexta; differentia verò Reſidua ſexta. Quare *f* O media proportionalis inter Rationalem C D, & C F erit Potens bina media, vel Efficiens cum mediali totum mediale. Vt fuit propoſitum.

e pr. 33. hu.

f pr. 35. hu.

PROPOS. XXXIX. THEOR. XXV.

Eucl. 111. X

Eadem quantitas non poteſt eſſe Reſidua, & Binomialis.

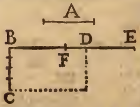
Sit A quælibet Reſidua. Dico A eſſe non poſſe Binomialem. Si enim hoc verum non eſt, ſit A nedùm Reſidua, ſed etiã Binomialis, & *a* vt expoſita Rationalis BC eſt ad A, ita fiat A ad B D. Et quoniam A Reſidua eſt, erit *b* latitudo B D Reſidua prima: Sitque D E minus nomen eius. Ergo *c* erunt nomina

a pr. 10. l. 4. & ſch. pr. 3. huius.

b pr. 36. hu.

c pr. 28. hu.

mina B E, D E Rationalia potentiâ tantùm commenſurabilia, & B E longitudine commenſurabile erit nedùm Rationali B C, ſed etiam lateri potenti differentiam quadratorum nominum B E & D E. Poſtea quia A ſupponitur quoque Binomialis, & fuit B D tertia proportionalis expoſitæ Rationa-



d pr. 28 hu. lis B C, & A: igitur *d* B D eſt Binomialis prima, cuius maius nomẽ ſit B F: quare B F, F D erũt Rationales potentiâ tãtũ commenſurabiles, atque B F longitudine commenſurabilis erit nedùm Rationali B C; ſed etiam lateri potenti differentiam quadratorum ex B F & F D; Itaque tam B E, quàm B F eidem B C commenſurabiles

e cor pr. 17. l. 3. ſunt longitudine: Ergo *e* B E, & B F inter ſe commenſurabiles quoque longitudine erunt; & propterea *f* B E ipſi F E reli-

f cor. 1 pr. 10. huius ctæ longitudine commenſurabilis erit: Cùmque B E Ratio-

g def 2 sec huius. nalis ſit, erit quoque *g* F E Rationalis: Et quia duarum B E, F E longitudine commenſurabilium ipſa B E longitudine incommenſurabilis eſt ipſi D E (eo quod ſunt potentiâ tantùm

h cor. pr. 12. huius commenſurabiles) erit *h* quoque altera F E eidem D E incommenſurabilis longitudine, & fuerunt ambæ oſtenſæ Rationales; Igitur F E, & D E Rationales ſunt potentiâ tantùm

i pr. 21. hu. commenſurabiles; ideoque *i* eorum differentia F D Irrationalis erit, quę Reſidua dicitur, oſtenſa autem fuit Rationalis, quod eſt impoſſibile. Non ergo A eſſe poteſt ſimul Reſidua, & Binomialis. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Ex dictis colligitur Binomialem, atque Reſiduam, & reliquas declaratas Irrationales, neque Mediali, neque inter ſe

k pr. 13. hu. eaſdem eſſe. Nam *k* quadratum Medialis ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Rationalem, & longitudine in-

l pr. 36. hu. commenſurabilem eidem Rationali; Sed *l* quadratum Binomialis, aut Reſiduæ ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Binomialem primam, aut Reſiduam primam.

Et quadratum Bimedialis primæ, vel Reſiduę Medialis primæ ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Binomialem ſecundam, aut Reſiduam ſecundam.

Quadratum verò Bimedialis ſecundæ, vel Reſiduæ Medialis ſecundę ad Rationalem applicatum latitudinem facit

Bino-

Binomialem tertiam, vel Reſiduam tertiam.

Atque quadratum Maioris, vel Minoris ad Rationalem applicatum latitudinem facit Binomialem quartam, aut Reſiduam quartam.

Quadratum verò Potentis rationale, ac medium, vel eius, quę cum Rationali totum Mediale efficit ad Rationalem applicatum latitudinem facit Binomialem quintam, vel Reſiduam quintam.

Tandem quadratum Potentis bina medialia, vel eius, quæ cum Mediali totum mediale efficit ad Rationalem applicatum latitudinem facit Binomialem ſextam, aut Reſiduam ſextam.

Cùmque hę latitudines differant à latitudine Medialis, & inter ſe: à latitudine quidem Medialis, quia hęc Rationalis eſt, illę verò Irrationales; inter ſe verò quia non ſunt eędem ordine, aut ſpecie ex Binomialibus, & Reſiduis, neque Binomialis vlla eadem eſt cum Reſidua. Vnde manifeſtum eſt omnes Irrationales quantitates huc vſque traditas inter ſe diuerſas eſſe.

Ex his ſequitur, quòd expoſita qualibet Rationali tredecim numero erũt quantitates Irrationales hactenus conſideratę, quarũ prima eſt Medialis; ſecunda Binomialis (quę in ſex ſpecies diuiſa eſt) tertia Bimedialis prima, quarta Bimedialis ſecunda, quinta Maior, ſexta Potens rationale, ac Mediale; Septima Potens bina medialia; octaua Reſidua, cuius ſex ſpecies inuentę ſunt, nona Reſidua medialis prima, decima Reſidua medialis ſecunda, vndecima Minor, duodecima Efficiens cum rationali totum mediale, decima tertia Efficiẽs cum mediali totum mediale.

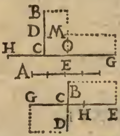
PROPOS. XL. THEOR. XXVI.

Eucl. 112, 113, X.

Quadratum Rationalis ad Binomialem applicatum latitudinem efficit eiuſdem ſpeciei Reſiduam; & ad Reſiduam applicatum latitudinem efficit Binomialem eiuſdem ſpeciei, quorum nomina ſunt proportionalia, & longitudine commenſurabilia.

Sit Rationalis expoſita A, & Binomialis, aut Reſidua B C; cuius nomina ſint B D maius, & D C minus, & ad B C, atque ad eius minus nomen D C applicata ſint producta M & O

ęqualia quadrato ex Rationali A, quę faciant latitudines C E, & C G. Dico quando B C eſt Binomialis, vt in primo caſu, eſſe C E Reſiduam; at quando B C eſt Reſidua, vt in ſecundo caſu, eſſe C E Binomialem, & erunt nomina ipſius C E proportionalia, & longitudine commenſurabilia nominibus ipſius B C, atque C E erit Irrationalis eiuſdem ſpeciei, ac eſt B C. Vt *a* G E ad E C, ita fiat E H ad H C. Quoniam producta M, & O ęqualia ſunt eidem quadrato ex Rationali A, erunt illa inter ſe ęqualia; & propterea *b* B C ad C D erit, vt G C ad C E, & diuidendo, *c* vel componendo B D ad D C erit, vt G E ad E C, vel vt E H ad H C; & propterea *d* E H ipſi H C potentià tantùm commenſurabilis erit, veluti maius nomen B D minori nomini D C potentià tantùm commenſurabile eſt. Poſtea quia G E ad E C eſt, vt E H ad H C; Ergo *e* homologarum ſummę vel differentię, ſcilicet G H ad H E erit, vt E H ad H C; cùmque ſint tres continuè proportionales G H, H E, H C, erit *d* quadratum ex H E, ad quadratum ex H C, ſeu vt quadratum ex B D ad quadratum ex D C in eadem ratione, ac eſt G H ad H C; eſt verò quadratum ex D B ad quadratum ex D C, ſeu quadratum ex E H ad quadratum ex H C commenſurabile, propterea quod nomina B D, & D C potentià commenſurabilia ſupponuntur: Igitur *e* G H longitudine commenſurabilis eſt ipſi H C, & propterea *f* eius Reſiduum G C longitudine commenſurabile erit ipſi H C, ſed *g* G C Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis Rationali C D (propterea quod ad Rationalem C D applicatum eſt productum O Rationale ęquale quadrato ex A, efficiens latitudinem C G); Ergo *h* H C Rationalis quoque erit, & longitudine commenſurabilis eidem Rationali C D: Et quia vt B D ad D C, ita erat E H ad H C, *i* permutando B D ad E H erit vt D C ad C H; ſuntque D C, & H C Rationales, & longitudine commenſurabiles inter ſe; Igitur *k* Rationali B D longitudine commenſurabilis erit E H, & ideo, *l* Rationalis quoque erit. Cùm ergo E H, & H C ſint Rationales, & potentià tantùm inter ſe commenſurabiles, vt prius dictum eſt: erit *m* C E nominum differentia in primo caſu Reſidua, & ſumma C E in ſecundo Binomialis, eiuſque nomina E H, & H C ſunt proportionalia, & longitudine commenſurabilia nominibus



a pr. 11. l. 4. & ſch. pr. 3 huius.
b cor. 2. pr. 1. lib 4. & ſch. pr. 3 hu.
c pr. 13 14 lib 3.
d cor 3. pr. 8 huius.
e pr 15. l. 3.
d cor 3 pr 17. lib 4. & cor. 1. pr. 1. huius.
e cor. 3. pr. 8. huius.
f cor. 1. pr. 8 huius.
g cor. pr. 11. huius.
h cor. pr. 17. l. 3. & def. 2 ſec. huius.
i pr. 12. l. 3.
k cor. 3. pr. 8 huius.
l def 2. ſec. huius.
m pr. 21. hu.

bus

bus B D, & D C alterius Irrationalis B C. Tandem *a* quoniam duæ ſummæ, vel duæ differentiæ nominum B D, D C, & E H, H C efficiũt Binomiales aut Reſiduas eiuſdem ordinis & ſpeciei, eo quod commenſurabilia ſunt longitudine nomina inter ſe; & ideo eorum ſummæ, vel differentiæ commenſurabiles ſunt longitudine inter ſe; ſed eorundem nominum E H, & H C ſumma, & differentia efficiunt Binomialem, & Reſiduam eiuſdem ſpeciei, vt oſtenſum eſt in propoſitione 34 huius. Ergo Binomialis B C, & Reſidua C E, vel Reſidua B C, & Binomialis C E eiuſdem ſpeciei ſunt. Vt erat propoſitum.

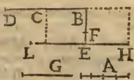
a pr. 34 hu.

PROPOS. XLI. THEOR. XXVII.

Eucl. 114. X.

Media proportionalis inter Binomialem & Reſiduã, quę habeant nomina proportionalia, & inter ſe longitudine commenſurabilia, Rationalis eſt.

Sit B C Reſidua, cuius nomina B D & D C, atque B E ſit Binomialis, cuius maius nomen B F, minus F E; Sitque B D ad B F, vt C D, ad F E, & ſit tam B D ipſi B F, quàm C D ipſi F E longitudine commenſurabilis, & inter C B & B E poſita ſit media proportionalis G. Dico G Rationalem eſſe. Fiat *a* B E ad expoſitam Rationalem A, vt A ad E H. manifeſtum eſt *b* productum ex B E in E H, (quod æquale eſt quadrato Rationalis A) efficere latitudinẽ E H Reſiduam, cuius nomina, quæ ſint H L, & L E,



proportionalia erunt, & longitudine commenſurabilia nominibus B F, & F E; Sed ex hypotheſi nomina D B, & D C longitudine commenſurabilia, & proportionalia ſunt nominibus B F, & F E; Igitur *c* L H ad L E eſt, vt D B ad D C, atq; L H ipſi B D, nec non L E ipſi D C longitudine commenſurabile erit: Quare permutando *d* L H ad B D erit, vt L E ad D C, ideoque *e* Reſidua E H ad Reſiduam C B erit, vt tota H L ad totam B D, & propterea *f* E H, & C B longitudine commenſurabiles erunt: Cùmque *g* productum ex B E in E H, ſcilicet quadratum ex A, ad productum ex E B in B C, ſeu ad ei *h* æquale quadratum ex G; Sit vt latitudo E H ad latitudinem C B, cùm B E ſit altitudo communis; fuerunt autem huiuſmodi latitudines oſtenſę commenſurabiles inter ſe longitudine.

a pr. 10 l. 4. & ſch. pr. 3. huius
b cor. 2. pr. 14. l. 4 ſch. pr 3. & pr 40. huius.
c pr 097. & cor. pr 17. lib 3.
d pr 12. l. 3.
e pr 15. l. 3.
f cor. . pr 8 huius.
g pr 1. l 4. & ſch pr. 3. huius.
h cor 2. pr. 14. lib. 4. & ſch. pr 3. hu.

Igitur quadratum ex Rationali expoſita A commenſurabile erit quadrato ex latere G; & propterea *i* latus G medium proportionale inter Reſiduā C B, & Binomialem B E Rationale erit. Quod erat oſtendendum.

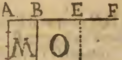
i def. 2 ſec. huius.

Eucl. 115. X.

PROPOS. XLII. THEOR. XXVIII.

A Mediali infinitę Irrationales fiunt, & nulla alicui expoſitarum eſt eadem.

Sit Medialis A B. Dico ex illa oriri poſſe infinitas quantitates Irrationales, quarum nulla eadem erit alicui ex tredecim Irrationalibus ſuperius expoſitis. Sit enim expoſita Rationalis A C, & ex Rationali A C in Medialem A B fiat productum M. Patet productum M Irrationale eſſe (eo quod *a* ſi Rationale concedatur efficeret latitudinem A B Rationalem, quod non ponitur, conceſſa enim fuit A B Medialis: Sit iam *b* B E latus quadrati ęqualis producto M: Erit ergo *c* B E Irrationalis. Dico quòd B E nō eſt aliqua ex tredecim Irrationalibus iam declaratis; Si enim B E eſt medialis, *d* eius quadratum ad Rationalem A C applicatum efficiet latitudinem A B Rationalem; at ſi B E credatur vna ex duodecim expoſitis irrationalibus *e* eius quadratum ad Rationalem A C applicatum efficiet latitudinem A B Binomialem aut Reſiduam; eſtque A B Medialis ex hypotheſi: Ergo eadem quātitas A B eſt Medialis & ſimul Binomialis aut Reſidua, aut alia Irrationalis diuerſa; quod *f* eſt impoſſibile. Igitur Irrationalis B E diuerſa eſt ab omnibus Irrationalibus expoſitis.



a pr. 21. hu.
b pr. 21. l. 4. & ſch pr. 3. huius.
c def. 5. ſec. huius.
d pr. 13. hu.
e pr. 35. hu.
f cor. pr. 39. huius.

Poſtea fiat productum O ex Rationali A C & inuentā Irrationali B E, atque *g* latus E F poſſit productum O. Manifeſtum eſt *h* productum O ex Rationali A, & Irrationali B E eſſe Irrationale: & propterea *i* latus E F, potens productum O Irrationale erit. Dico iam E F non eſſe aliquam ex declaratis tredecim Irrationalibus, nec eſſe eandem ipſi B E. Quoniam quadratum ex E F ad Rationalem A C applicatum efficit latitudinem B E; ſed quadrata declaratarum Irrationalium, atque ipſiuſmet B E latitudines faciunt in eadem applicatione diuerſas ab ipſa B E, vt dictum eſt. Eodem modo alię infinitę Irrationales inueniri poſſunt, quæ & inter ſe, & à dictis

g pr. 10. & cor. 2. pr. 14. l. 4. & ſ. 6 pr. 3 huius.
h ex pr. 11. huius.
i def. 5 ſec. huius.

ctis Irrationalibus differunt. Quare patet propoſitum.

PROPOS. XLIII. THEOR. XXIX. *Eucl. 6, XIII.*

Cuiuslibet lineę extrema ac media ratione diuiſe vtrumque ſegmentum irrationale eſt, quod vocatur Reſiduum.

Sit linea Rationalis A B diuiſa in C extrema ac Media ratione, ita vt ſit tota A B ad maius ſegmentum eius A C, vt eſt A C ad minus ſegmentum C B. Dico vtrunque ſegmentum A C, & C B Irrationale eſſe, quod vocatur Reſiduum. Addatur maiori ſegmento A C ipſa D A, quæ ęqualis ſit dimidiæ totius A B. Quoniam [a] quadratum ipſius C D quintuplum eſt quadrati ipſius D A, erunt [b] quadrata ex C D, & ex D A commenſurabilia, & propterea latera C D, & D A commenſurabilia erunt potentiâ tantùm, *a pr. 7. l. 5.* *b pr. 8. hu.*



quandoquidem eorum quadrata ſunt inter ſe, vt, duo numeri 5 & 1, qui [c] non ſunt vt duo numeri quadrati, cùm ſint numeri primi; & [d] eſt D A Rationalis, cùm dimidia ſit Rationalis A B: Igitur C D commenſurabili potentiâ tantùm ipſi D A Rationali, erit quoque Rationalis; Cùmque A C ſit differentia duarum Rationalium C D, & D A potentiâ tantùm commenſurabilium, erit [e] ipſa A C Irrationalis, quę Reſidua vocatur. Et ſiquidem ipſa A B fuerit expoſita Rationalis, vel ipſa A B longitudine commenſurabilis ſit expoſitę Rationali, erit eius ſemiſſis D A expoſitæ Rationali longitudine commenſurabilis; Cùmque maius nomen C D quintuplum poſſit minoris nominis D A, erit quadratum differentiale eorundem nominum quatuor partes earum, quarum quadratum D C eſt quinque partes; & propterea huiuſmodi quadrata erunt, vt 5 ad 4. qui [f] duo numeri non ſunt ambo quadrati; & propterea maius nomen C D longitudine incommenſurabile erit lateri, potenti differẽtiam quadratorum nominum, & eſt minus nomen D A longitudine commenſurabile expoſitę Rationali, vt dictum eſt. Ergo [g] A C erit Reſidua quinta.

c cor. pr. 37. lib. 8. *d def. 2. ſec. huius.* *e pr. 21. hu.* *f ex ſch. pr. 45. l. 8.* *g pr. 32 hu.*

Rurſus quia [h] productum ex A B in B C ęquale eſt quadrato Medię proportionalis A C: Igitur quadratum ex A C applicatum ad Rationalem A B efficit latitudinẽ B C; [i] Sed quadratum Reſiduę A C applicatum ad Rationalem A B efficit latitu- *h pr. 25. & cor. 2. pr 14 l. 4.* *i pr. 36. hu.*

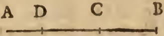
latitudinem Reſiduam primam. Igitur ſegmentum minus C B Reſiduum primum erit. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Deducitur ex hac propoſitione, quòd ſi maius ſegmentum lineæ diuiſę extrema, & media ratione fuerit Rationale: erit minus ſegmentum eius Reſiduum.

Nam ſi ex maiori ſegmento A C abſcindatur portio C D æqualis minori ſegmento C B, erit *k* A C diuiſa in D extrema, ac media ratione, cuius maius ſegmentum eſt D C, & propterea exiſtente A C Rationali, erit ex hac propoſitione C D, ſeu C B Reſidua.

k cor pr. 25 lib. 4.



Eukl. 11. XIII.

PROPOS. XLIV. THEOR. XXX.

Si diameter circuli Rationalis fuerit; Pentagoni latus erit Irrationalis linea, quæ vocatur Minor.

Sit circulus A F G, cuius diameter A G, vel radius A B Rationalis ſit. Secetur *a* radius A B in puncto C extrema, ac media ratione, ita vt C B ſit maius ſegmentum eius, & *b* ducta perpendiculari B F, coniungatur recta C F. Quia *c* radius circuli A B ęqualis eſt inſcripto lateri hexagoni regularis, & ſecatur in C extrema, ac media ratione: Igitur *d* maius eius ſegmentum C B erit latus inſcripti decagoni regularis; Sed *e* latus pentagoni poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni: Igitur C F, potens radium F B, ſeu A B & C B, erit latus inſcripti pentagoni. Dico iam C F Irrationalem eſſe, quę vocatur Minor. Secetur radius B G bifariam in D, & producatur diameter G A in E, vt ſit E A ęqualis radio A B. Quoniam D B ſemiſſis eſt radii B G, ſeu ei ęqualis E A, erit D B quarta pars diametri Rationalis A G, ſeu ei æqualis E B; & propterea D B quinta pars erit totius E D; & ideo *f* E D Rationalis erit longitudine commenſurabilis expoſitę Rationali A G. Poſtea quia A B ſecatur in C extrema, & media ratione, & maiori eius ſegmento C B additur B D ſemiſſis totius A B: ergo *g* quadratum ex C D quintuplum eſt quadrati B D ſemiſſis totius; erat autem longitudine E D quintupla eiuſdem

a pr. 25. l. 4.
b pr. 10 l. 1.
c ſcb pr. 3. lib. 5.
d ſcb pr. 8. lib. 5.
e pr. 32. l. 5.
f def 2 ſec. huius.
g pr. 22 l 5.

dem

dem B D: ergo *h* E D, D C, & B D proportionales ſunt, & ideo quadratum ex E D quintuplum erit quadrati ex C D; Quare C D potentiâ tantùm commenſurabilis Rationali E D, *i* vt dictum eſt, Rationalis *k* quoque erit; eſtque E D longitudine incommenſurabilis lateri differentiæ quadratorum ex E D, & ex C D (eo *l* quod eorum quadrata ſunt inter ſe, vt numeri 5, & 4, ſicuti in precedenti prop. dictum eſt, qui ambo quadrati non ſunt), atque maior E D longitudine commenſurabilis fuit expoſitę Rationali A G. Ergo *m* nominum E D, & D C differentia, E C Reſidua quarta eſt. Iam quia *n* rectangulum C E A æquale eſt quadrato ex F A, vel ex F B vnà cum Rectangulo E A C, ſiue ei æquali B A C, vel *o* huic ęquali quadrato ex C B: Ergo rectangulũ C E A ęquale eſt duobus quadratis ex F B latere hexagoni, & ex C B latere decagoni: Quare *p* rectangulum C E A æquale erit quadrato ex C F latere pentagoni, quod illis duobus quadratis ęquale eſt; & ideo latus *q* pẽtagoni medium proportionale eſt inter radium circuli A E & rectam C E: ſed *r* media proportionalis inter Rationalem E A, & Reſiduam quartã E C Irrationalis quantitas eſt, quę vocatur Minor. Igitur latus pentagoni C F Irrationalis quantitas eſt, quę Minor vocatur. Vt erat propoſitum.



h cor. 3. pr. 17. l. 4. — *i in præced. prop.* — *k def. 2. ſec. huius.* — *l pr. 8. hu. & ſch pr. 15. lib 8.* — *m pr 31. huius.* — *n ſch pr. 1. & cor. 1. l. 4.* — *o pr. 25. & cor. 2 pr. 14 l. 4.* — *p pr. 32. l. 5* — *q cor. 2. pr. 14 l. 4.* — *r pr. 36. hu.*

PROPOS. XLV. THEOR. XXXI.

Eucl. 16. 18. XIII.

SI diameter ſphęrę Rationalis fuerit, erit latus inſcripti Icoſaedri Irrationalis linea, quę vocatur Minor; Et latus Dodecaedri erit linea Irrationalis, quæ vocatur Reſidua.

Quoniam *a* ſphęrę diameter poteſtate eſt ad latus Icoſaedri, vt quintuplum quadrati lateris hexagoni; ad quadratum lateris pentagoni, ſed exiſtente *b* latere hexagoni, ſeu radio circuli Rationali, eſt *c* latus inſcripti pentagoni Irrationalis linea, quę vocatur Minor, & eſt quintuplum quadrati lateris hexagoni commenſurabile quadrato eiuſdem lateris hexagoni: Igitur *d* quintuplum quadrati prædicti lateris hexagoni Rationale quoque erit; Sed *e* quintuplo huius quadrati ęquale eſt quadratum diametri ſphęrę: Igitur quadratum diametri ſphętæ Rationale erit, & propterea *f* diameter ipſa Rationalis.

a cor 1. pr. 4 l 7. — *b ſch. pr. 3. l 1.* — *c pr. 44 hu.* — *d def 4. ſec. huius* — *e ex pr. 4. l. 7.* — *f def 2 ſec. huius.*

nalis. Quapropter exiſtente ſphęrę diametro Rationali, erit latus Icoſaedri linea Irrationalis, quę Minor vocatur.

g cor. 2. pr. 8. l. 7. Secundò quoniam *g* ſphęrę diameter poteſtate ad latus Dodecaedri eſt, vt triplum quadrati lateris hexagoni ad quadratum lateris Decagoni; *h ſch. pr. 3. l. 5.* Et exiſtente latere hexagoni, *h* ſeu radio ſphæræ Rationali, *i* erit latus Decagoni Irrationalis linea, *i ex prop. 44. huius.* quę Reſidua vocatur. Eſtque *k* triplum quadrati lateris hexagoni Rationale quoque, vtpote illi commenſurabile, ſed *l* triplo *k def. 4 ſec. huius.* huius quadrati ęquale eſt quadratum diametri ſphæræ; Quare ſphęrę diameter Rationalis quoque erit; & tunc latus *l ex pr. 5. l. 7.* Dodecaedri linea Irrationalis erit, quę vocatur Reſidua. Quod erat oſtendendum.

F I N I S.

BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA